Первая космическая скорость

Определим с какой скоростью необходимо бросить камень на небольшой высоте h в горизонтальном направлении, чтобы он никогда не упал на Землю.

Земля притягивает камень с силой тяжести

$$F = mg,$$

где m — масса камня, а g — ускорение свободного падения. Эта сила направлена к центру Земли. Будем считать, что высота h, на которой находится камень, значительно меньше радиуса Земли, а так оно и есть. Тогда можно считать, что ускорение свободного падения на этой высоте не слишком отличается от ускорения свободного падения на поверхности Земли.

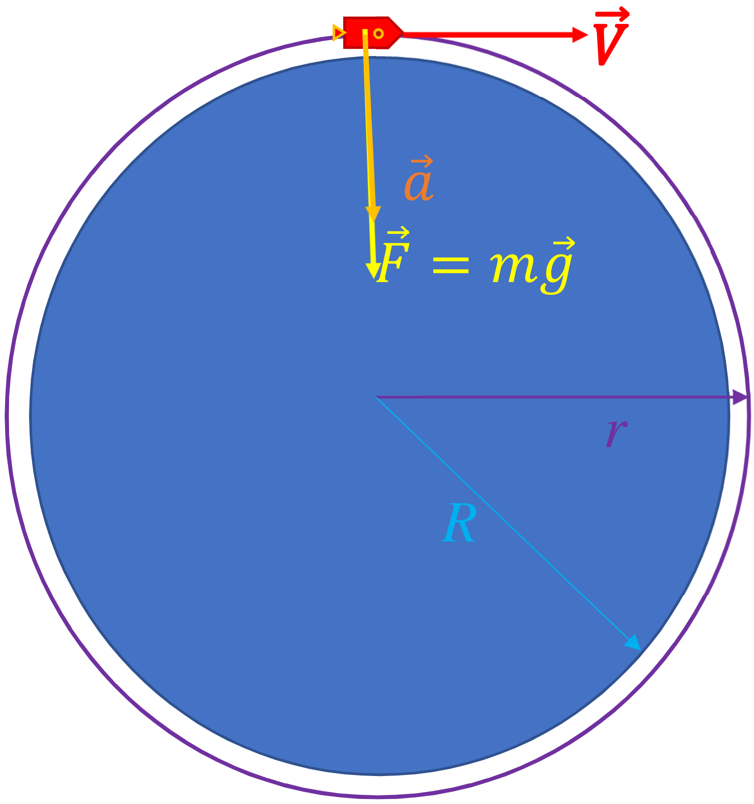

Рисунок 1.

Очевидно, наш камень, брошенный в горизонтальном направлении, будет летать по круговой орбите радиуса $r=R+h$ вокруг Земли (Рис. 1). По второму закону И. Ньютона

$$F=ma,$$

где a — центростремительное ускорение, равное

$$a = \frac{V^2}{r}.$$

Как уже было принято выше высота h много меньше радиуса Земли R и поэтому можно считать, что радиус орбиты приблизительно равен радиусу Земли, что недалеко от истины. Таким образом,

$$mg = ma$$

и, следовательно,

$$g = a = \frac{V^2}{R}.$$

Из последнего уравнения выразим скорость камня

$$V = \sqrt{gR}.$$

Подставив в найденное выражение значение ускорения свободного падения, которое для Земли равно $g = 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, и радиус Земли $R = 6378\,\text{км} = 6{,}378 \cdot 10^6\text{м}$, получим

$$V = \sqrt{9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 6{,}378 \cdot 10^6\text{м}} = 7906\frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 7{,}9\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Это та скорость, с которой надо бросить камень или любой другой предмет, например, искусственный спутник, в горизонтальном направлении, чтобы он начал двигаться вокруг Земли по круговой орбите. Эту скорость принято называть *первой космической скоростью*. Как мы убедились, для Земли первая космическая скорость равна почти 8 километров в секунду.

Согласно закону всемирного тяготения И. Ньютона, сила, с которой планета притягивает тело, равна

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Здесь M — масса планеты, m — масса тела, r — расстояние от центра планеты до тела.

Если тело находится на поверхности планеты, то расстояние от тела до её центра равно радиусу планеты, то есть $r = R$. С другой стороны, $F = mg$. Сравнивая два последних выражения для силы притяжения, получим выражение для ускорения свободного падения на поверхности планеты

$$g = G\frac{M}{R^2}.$$

Масса планеты равна

$$M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

где ρ — средняя плотность планеты. Подставляя выражение для массы в формулу для ускорения свободного падения, получим

$$g = \frac{4}{3}\pi G R \rho.$$

Тогда первая космическая скорость равна

$$V = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G R^2 \rho} = 2R\sqrt{\frac{\pi G \rho}{3}}.$$

То есть при одинаковой средней плотности планет первая космическая скорость линейно зависит от их радиуса.

Нет сомнения, что у разных планет значение первой космической скорости будут разными, так как радиусы планет и ускорение свободного падения на их поверхности отличаются от земных. У каждой планеты эти значения разные. Для Луны значение первой космической скорости равно 1,68 километров в секунду, так как радиус Луны равен 1738 километров, а ускорение свободного падения на Луне равно 1,62 м/с^2. Значение первой космической скорости для планет солнечной системы приведены в таблице.

Планета	**Радиус планеты (км)**	**Ускорение свободного падения (м/с^2)**	**Первая космическая скорость (км/с)**
Меркурий	2439	3,7	3,05
Венера	6052	8,87	7,33
Земля	6378	9,81	7,91
Марс	3397	3,71	3,55
Юпитер	71492	24,79	42,58
Сатурн	60268	10,44	25,54
Уран	25559	8,87	15,06
Нептун	24764	11,15	23,5
Плутон	1188	0,62	0,86

Из этой таблицы видно, что пальма первенства в конкурсе первых космических скоростей, как и следовало ожидать, принадлежит Юпитеру. Однако мы забыли сказать о подлинном владыке солнечной системы самом Солнце. Радиус Солнца 695500 километров, или $6{,}955\cdot 10^8$ метров, а ускорение свободного падения 274 м/с^2. Таким образом, первая космическая скорость для Солнца равна 436,54 километра в секунду. Ясно, что ни одна планета солнечной системы не может тягаться с Солнцем по этому параметру. С другой стороны, надо быть полным идиотом, чтобы пытаться летать вокруг Солнца по близкой к нему орбите. Поэтому оставим титул чемпиона по первой космической скорости за Юпитером.

Что касается аутсайдера, то это, очевидно, Плутон. Бедняга Плутон, был разжалован из числа планет в 2006 году. Многочисленные демонстрации и массовые протесты не помогли ему отстоять титул планеты, и он был объявлен карликовой планетой. Всё бы ничего, карликовая планета — это тоже планета, но вот только оказалось, что таких карликовых планет довольно много. В таблице ниже приведён список таких карликовых планет и значения первой космической скорости для них.

Карликовая планета	**Радиус карликовой планеты (км)**	**Ускорение свободного падения (м/с^2)**	**Первая космическая скорость (м/с)**
Плутон	1188	0,62	860
Церера	463,5	0,27	360
Хаумеа	816	0,44	570
Макемаке	751	0,4	520
Эрида	1163	0,82	980
Седна	995	0,4	631
Орк	900	0,23	455

Приведённые значения весьма приблизительны ввиду дальности этих объектов и значительной неправильности их формы. В оправдание решения астрономов отказать Плутону в звании планеты следует отметить, что некоторые спутники планет, как та же Луна, превосходят его своими размерами. Но Луна не самый большой спутник в солнечной системе. В таблице ниже приведён список некоторых спутников и значения их первой космической скорости.

Спутник	**Планета**	**Радиус спутника (км)**	**Ускорение свободного падения (м/с^2)**	**Первая космическая скорость (м/с)**
Луна	Земля	1738	1,62	1680
Деймос	Марс	6,2	0,0039	4,9
Фобос	Марс	11,1	0,0084	9,7
Ио	Юпитер	1821	1,8	1809
Европа	Юпитер	1561	1,32	1435
Ганимед	Юпитер	2634	1,428	1939
Каллисто	Юпитер	2410	1,235	1725
Амальтея	Юпитер	83,4	0,02	40,8
Гималия	Юпитер	85	0,062	72,6
Элара	Юпитер	43	0,031	36,5
Пасифе	Юпитер	29	0,022	25,3
Синопе	Юпитер	19	0,014	16,3
Лиситея	Юпитер	18	0,013	15,3
Карме	Юпитер	11,5	0,017	14
Ананке	Юпитер	14	0,01	11,8

Леда	Юпитер	10	0,0073	8,5
Титан	Сатурн	2576	1,35	1867
Япет	Сатурн	734	0,223	404,6
Рея	Сатурн	763,5	0,264	449
Тефия	Сатурн	531	0,145	381
Диона	Сатурн	561,7	0,231	360,2
Энцелад	Сатурн	252	0,111	167,2
Мимас	Сатурн	198	0,064	112,6
Гиперион	Сатурн	145	0,017	49,6
Феба	Сатурн	110	0,049	73,4
Янус	Сатурн	89	0,0137	34,9
Эпиметей	Сатурн	57	0,0078	21,1
Титания	Уран	788	0,379	546,5
Оберон	Уран	761	0,346	513,1
Ареэль	Уран	579	0,27	395,4
Умбриэль	Уран	585	0,23	366,8
Миранда	Уран	236	0,079	136,5
Пак	Уран	81	0,028	47,6
Джульета	Уран	53	0,016	29,1
Порция	Уран	70	0,023	40,1
Крессида	Уран	41	0,013	23,1
Дездемона	Уран	34	0,011	19,3
Розалинда	Уран	36	0,012	20,8
Белинда	Уран	45	0,014	25,1
Корделия	Уран	21	0,0073	12,4
Офелия	Уран	23	0,007	12,7
Бианка	Уран	27	0,0086	15,2
Калибан	Уран	36	0,015	23,2
Сикоракса	Уран	95	0,04	61,6
Пердита	Уран	15	0,0047	8,4
Сетебос	Уран	12	0,0063	8,7
Стефано	Уран	16	0,0041	8,1
Просперо	Уран	12,5	0,0063	8,9
Тринкуло	Уран	9	0,0021	4,3
Фердинанд	Уран	6	0,0025	3,9
Франциско	Уран	11	0,0025	5,2
Маб	Уран	12	0,0044	7,3
Купидон	Уран	9	0,0031	5,3
Маргарита	Уран	10	0,0023	4,5
Тритон	Нептун	1353	0,779	1026,6
Нереида	Нептун	170	0,072	110,6
Ларисса	Нептун	97	0,035	58,3
Протей	Нептун	211	0,07	121,5
Деспина	Нептун	75	0,027	45
Галатея	Нептун	88	0,018	39,8
Таласса	Нептун	41	0,015	24,8
Наяда	Нептун	33	0,012	19,9
Сао	Нептун	22	0,009	14,1
Галимеда	Нептун	31	0,013	20,1
Лаомедия	Нептун	21	0,0088	13,6
Несо	Нептун	30	0,0126	19,4

Псамафа	Нептун	20	0,0084	13
Гиппокамп	Нептун	17,7	0,0074	11,4
Харон	Плутон	606	0,278	410
Никта	Плутон	23	0,008	13,6
Гидра	Плутон	19	??	??
Кербер	Плутон	6	0,03	13,4
Стикс	Плутон	6	0,014	9,2
Хииака	Хаумеа	195	0,031	77,7
Намака	Хаумеа	85	0,017	38
S/2015 (136472) 1	Макемаке	88	0,037	57
Дисномия	Эрида	158	0,066	102

Рассмотрим с какой угловой скоростью должна вращаться планета, чтобы её точки на экваторе двигались с первой космической скоростью. Эта угловая скорость равна

$$\omega = \frac{V}{R} = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{G\frac{M}{R^3}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho},$$

где ρ — средняя плотность планеты. Тогда период обращения планеты или длина суток на ней составляют

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Это предельно допустимый и минимальный период обращения планеты. При меньшем периоде (большей угловой скорости) внешний слой на экваторе будет попросту отрываться от планеты. Для планеты Земля, например, $\rho = 5515{,}3\ \text{кг}/\text{м}^3$. Следовательно, при таком вращении сутки на Земле составляли бы

$$T = \sqrt{\frac{3\cdot 3{,}14}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot 5515{,}3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}} = 5061{,}6\ \text{с} = 84\ \text{мин}\ 22\text{с}$$
$$= 1\text{час}\ 24\ \text{мин}\ 22\ \text{с},$$

то есть в 17 раз быстрее, чем она вертится сейчас. Для Солнца этот период равен 10011,68 секунд или приблизительно 167 минут. Интересно, могут ли существовать звёзды или планеты, у которых реальный период обращения меньше рассмотренного критического значения.

Задача. Автомобиль движется по выпуклому мосту в виде дуги окружности радиуса R=100 м. При какой наименьшей скорости автомобиля его колёса перестанут оказывать давление на поверхность моста и начнут отрываться от моста.

Решение

На автомобиль, движущийся по мосту, кроме силы тяжести $m\vec{g}$, направленной вниз, действует реакция опоры моста $\vec{N}$, направленная вверх (рис. 2). По второму закону Ньютона

$$mg - N = ma.$$

Здесь центростремительное ускорение равно

$$a = \frac{V^2}{R}.$$

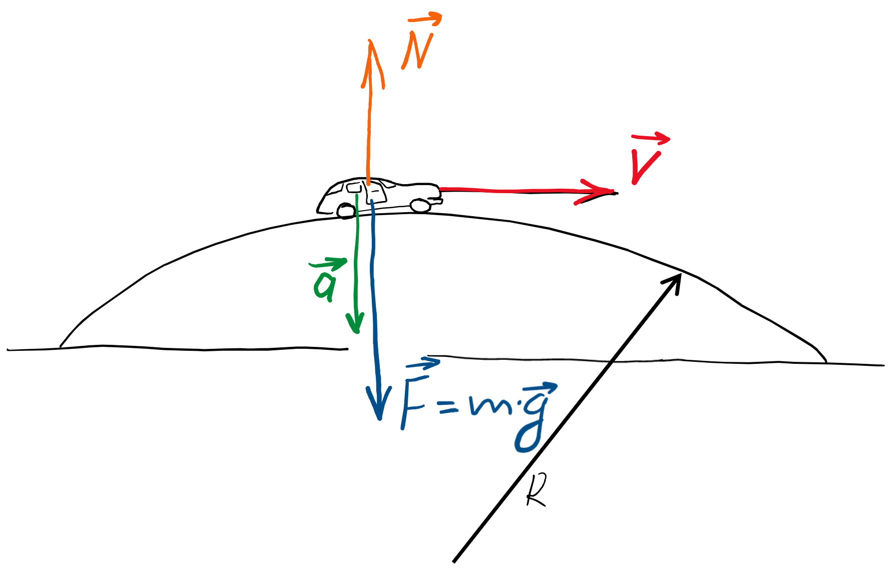

Рисунок 2.

Однако в момент отрыва колёс автомобиля $N = 0$. Следовательно, $mg = ma$ и

$$g = \frac{V^2}{R},$$

Откуда

$$V = \sqrt{gR}.$$

Для скорости, при которой автомобиль отрывается от моста и взлетает над ним, имеется та же самая формула, что и для первой космической скорости. Подставляя в эту формулу данные, получим

$$V = \sqrt{9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 100\text{м}} = 31{,}3\frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 113\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Перед въездом на такой мост должен стоять ограничитель скорости 110 километров в час или даже меньше, чтобы автомобили не прыгали, как это происходит в художественных фильмах с погоней, так называемых боевиках и триллерах.

Ответ: 113 км/ч.

Задача. В цирке бывает такой аттракцион. Из толстой металлической арматуры делается сфера радиуса 6 метров (предположительно) так, что внутренность сферы достаточно хорошо просматривается зрителями, пришедшими на цирковое представление. Через специальное отверстие внутрь сферы заезжает мотоциклист на мотоцикле. Постепенно набирая скорость, мотоциклист движется по окружностям внутри сферы. Сначала эти окружности почти горизонтальные в нижней части сферы, а затем постепенно поднимаются к её экватору. В некоторый момент траектории движения мотоциклиста становятся наклонными, а затем и вертикальными. При какой минимальной скорости мотоциклиста становится возможным его движение по траектории, лежащей в вертикальной плоскости?

Решение

Рассмотрим условия движения мотоциклиста в верхней точке траектории, когда она проходит через полюс металлической сферы (рис. 3). На мотоцикл с мотоциклистом действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и реакция со стороны сферической клети $\vec{N}$, которая также направлена вниз. По второму закону Ньютона

$$mg + N = ma.$$

Здесь центростремительное ускорение равно

$$a = \frac{V^2}{R}.$$

Пока сфера оказывает давление на мотоцикл опытный мотоциклист находится в безопасности. То есть допустимые значения реакции опоры определяются равенством

$$N = m(a - g) \geq 0.$$

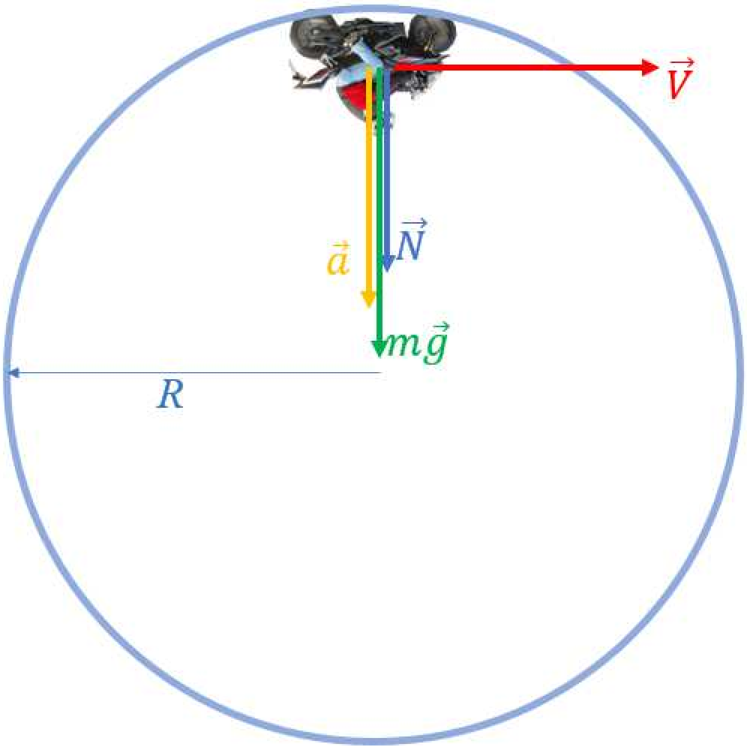

Рисунок 3.

Проблемы у него начнутся в момент, когда $N = 0$. В этот момент центростремительное ускорения $a = V^2/R$ примет значение, равное $a = g$. Отсюда для критической скорости получаем уравнение

$$\frac{V^2}{R} = g,$$

из которого находим

$$V = \sqrt{gR}.$$

И опять мы видим ту же самую формулу. То есть движение вокруг земной сферы подчиняется тому же критерию, что и движение внутри цирковой сферы. Законы физики, как для космонавтов, так и для цирковых каскадёров одни и те же.

Подставляя в последнюю формулу данные, получим

$$V = \sqrt{9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 6\text{м}} = 7{,}67\frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 28\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Эта скорость сравнительно небольшая. При скоростях больших 28 километров в час мотоциклисту ничего не угрожает. Главное, чтобы у него не закружилась голова. Поэтому мотоциклисту часто завязывают глаза, перед тем как он начнёт двигаться, для его же блага.

Задача. Лётчикам асам, летающим на истребителях или спортивных самолётах, известна фигура высшего пилотажа в виде замкнутой петли, которая называется “мёртвой петлёй” или “петлёй Нестерова”. Так эту фигуру назвали в честь штабс-капитана авиации Петра Нестерова, который впервые её выполнил близ Киева 27 августа 1913 года вечером в четверть минут седьмого на самолёте французского производства “Ньюпор-4” с двигателем “Гном”. При выполнении этой фигуры самолёт движется по круговой траектории, расположенной в вертикальной плоскости. Известно, что “Ньюпор-4” с двигателем “Гном” в 70 лошадиных сил развивает скорость до 120 км/ч. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить предполагаемый радиус “мёртвой петли” по этим данным.

Решение

Полагая, что на самолёт в верхней точке траектории действует только сила тяжести (рис. 4), по второму закону Ньютона получим

$$mg = ma.$$

При движении по окружности самолёт испытывает центростремительное ускорения

$$a = \frac{V^2}{R}.$$

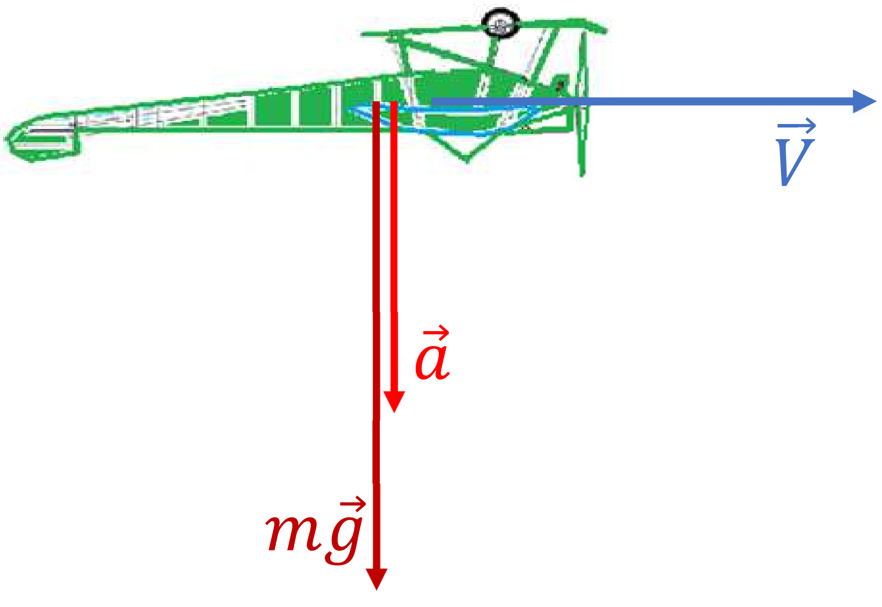

Рисунок 4.

Из последних двух равенств находим

$$\frac{V^2}{R} = g,$$

а отсюда получаем

$$V = \sqrt{gR}.$$

Снова мы видим ту же самую формулу. То есть движение самолёта, выполняющего фигуру высшего пилотажа мёртвая петля или петля Нестерова, подчиняется тем же законам, что и движение мотоцикла в цирке или искусственного спутника на околоземной орбите. А лётчики также подвержены действию физических законов, как и космонавты или каскадёры.

Но в задаче требуется найти не скорость, а радиус петли, так как скорость известна и равна 120 километров в час, что составляет 33,3 метра в секунду. Для радиуса получаем верхнюю оценку

$$R = \frac{V^2}{g} = \frac{(33{,}3\text{м/с})^2}{9{,}8\text{м}/c^2} = 113{,}3 \text{ м}.$$

Ответ: 113,3 м.

Задача. Ведро частично заполнено водой. Мальчик берёт это ведро и начинает его вращать, совершая круговые движения вытянутой рукой с ведром в вертикальной плоскости так, что ведро движется по окружности радиуса 1 метр. При этом вода не выливается из ведра. Найти скорость ведра в верхней точке траектории. С какой угловой скоростью должен мальчик вращать руку с ведром?

Решение

Рассматривая воду как материальную точку (рис. 5). Заметим, что на неё кроме силы тяжести $m\vec{g}$, направленной вниз, действует реакция дна ведра $\vec{N}$, направленная тоже вниз. По второму закону Ньютона

$$mg + N = ma.$$

Здесь центростремительное ускорение равно

$$a = \frac{V^2}{R}.$$

Пока $N = m(a - g) \geq 0$ вода действует на дно, а дно на воду. Вода не выливается из ведра. В критический момент, когда $N = 0$, вода начнёт выливаться. Следовательно, если $g \leq a$ или $V^2 \geq gR$, вращение ведра происходит без потери воды. Отсюда для критической скорости получаем выражение

$$V = \sqrt{gR}.$$

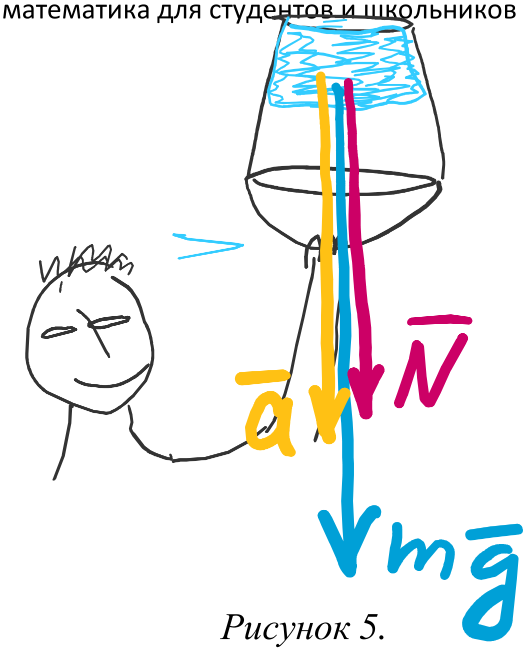

Рисунок 5.

Подставляя в это выражение данные, получим

$$V = \sqrt{9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 1\text{м}} = 3{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

А для угловой скорости получаем

$$\omega = \frac{V}{R} = 3{,}1 \text{ рад}/c.$$

Ответ: $V = 3{,}1 \text{ м}/c$; $\omega = 3{,}1 \text{ рад}/c$.

Снова мы видим ту же самую формулу. То есть движение ведра и космического корабля, как и движение самолёта, выполняющего фигуру высшего пилотажа, и мотоцикла в цирке, подчиняются одним и тем же физическим закономерностям.

Задача. Автомобиль, совершая поворот, движется по закруглённому участку шоссе, радиус которого равен 50 метров. Коэффициент трения колёс автомобиля об асфальт равен 0,4. Какую предельно допустимую скорость может иметь автомобиль на повороте, чтобы удержаться на трассе и не вылететь в кювет?

Решение

При движении по закруглённому участку шоссе автомобиль удерживается на полотне благодаря силе трения между колёсами и полотном асфальта. Если бы не было силы трения или она была бы слишком маленькой, автомобиль не смог бы повернуть и проехал бы юзом слетев с трассы. Благодаря силе трения он удерживается на повороте. Применим второй закон Ньютона.

$$F_{\text{тр}} = ma.$$

Центростремительное ускорения

$$a = \frac{V^2}{R}$$

и сила трения

$$F_{\text{тр}} = \mu m g,$$

где μ — коэффициент трения.

Подставляя во второй закон Ньютона, получим

$$\mu m g = m\frac{V^2}{R}.$$

Отсюда

$$V = \sqrt{\mu g R}.$$

Снова мы видим ту же самую формулу, с той лишь разницей, что под корнем добавился коэффициент трения. То есть автомобиль, совершающий поворот на закруглённом участке шоссе, как и самолёт, выполняющего фигуру высшего пилотажа, как и каскадёр-мотоциклист в цирке, подобен в своём движении спутнику на околоземной орбите и подчиняется тому же закону. А водитель, получается тот же космонавт или пилот, и должен ответственно относится к данному манёвру.

Подставляя в это выражение данные, получим

$$V = \sqrt{0{,}4 \cdot 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 50\text{м}} = 14\frac{\text{м}}{\text{с}} = 50{,}4\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Это предельно допустимая скорость на данном повороте. При большей скорости автомобиль будет соскальзывать с автострады. Заметим, что значение предельной скорости не зависит от массы автомобиля. Для гружённой фуры, спорткара и скутера, значение предельной скорости одно и то же. Перед поворотом должен стоять знак, ограничивающий скорость в 50 км/ч.

Ответ: 50,4 км/ч.