Ю. И. Дорогов

Время падения камня на Землю

Решается задача определения времени падения камня на поверхность планеты без учёта сопротивления атмосферы.

За какое время тело, расположенное на высоте h, упадёт на поверхность Земли? Обычно, в качестве ответа на этот вопрос, приводится формула

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad (1)$$

известная из школьного учебника физики. В этой формуле $g = 9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Но проблема в том, что с высотой ускорение свободного падения меняется, а значит время падения будет больше, чем то, которое получается по вышеуказанной формуле.

В этой статье решается задача о нахождении времени падения тела с высоты h. Сразу оговоримся, сопротивление воздуха не учитываем. То есть ищется время падения на Землю без учёта её атмосферы, или время падения тела на какую-либо планету, у которой отсутствует атмосфера.

Каково же оно — время падения тела на Землю?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим тело массы m, падающее с высоты h на поверхность некоторой планеты массы M и радиуса R. Тело падает без начальной скорости. Будем считать планету неподвижной и предполагать, что поблизости нет других планет, которые могут повлиять на движение тела и планеты. Расстояние от центра планеты до тела в начальный момент равно $H = R + h$. Расстояние от центра планеты до тела в момент времени обозначим через r. Тогда $R \leq r \leq H$. На тело действует только сила притяжения со стороны планеты

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$F = ma,$$

где $a = -d^2r/dt^2$ — ускорение.

Подставляя выражение для силы F и ускорения a во второй закон Ньютона, получим

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\gamma\frac{Mm}{r^2},$$

или после сокращения на m и преобразования

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -g\frac{R^2}{r^2}. \tag{2}$$

Здесь g — ускорение свободного падения на поверхности планет. Как известно

$$g = \gamma\frac{M}{R^2}.$$

Перепишем дифференциальное уравнение (2) в виде

$$\ddot{r} = -g\frac{R^2}{r^2}.$$

Понизим порядок уравнения при помощи замены $\dot{r} = z(r)$. Тогда вторая производная $\ddot{r} = z' \cdot z$ и уравнение запишется

$$\frac{dz}{dr}z = -g\frac{R^2}{r^2}.$$

Разделим переменные и интегрируем

$$\int zdz = -gR^2\int\frac{dr}{r^2}.$$

Вычисляя интегралы в левой и правой части последнего выражения, получим

$$\frac{z^2}{2} = \frac{gR^2}{r} + C.$$

В начальный момент времени: $r = H$ и $z = \dot{r} = 0$. Подставляя в последнее выражение, для произвольной постоянной C получим

$$C = -\frac{2gR^2}{H}.$$

Тогда

$$\frac{z^2}{2} = \frac{gR^2}{r} - \frac{gR^2}{H}$$

или

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2gR^2}{rH}(H - r)}, \qquad (3)$$

так как $z = \dot{r} = dr/dt$.

Снова разделим переменные

$$\sqrt{\frac{r}{H - r}}dr = \sqrt{\frac{2gR^2}{H}}dt$$

и интегрируем

$$\int \sqrt{\frac{r}{H - r}}dr = \sqrt{\frac{2gR^2}{H}}t + C.$$

Сделаем замену

$$\frac{r}{H - r} = y^2.$$

Тогда

$$r = \frac{Hy^2}{1 + y^2}$$

и

$$dr = \frac{dr}{dy}dy = \frac{d\left(\frac{Hy^2}{1 + y^2}\right)}{dy}dy = H\frac{2y(1 + y^2) - 2yy^2}{(1 + y^2)^2}dy = \frac{2Hy}{(1 + y^2)^2}dy.$$

Интеграл запишется

$$\int \sqrt{\frac{r}{H - r}}dr = \int y\frac{2Hy}{(1 + y^2)^2}dy.$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

для этого обозначим

$$u = Hy, \qquad dv = \frac{2y}{(1 + y^2)^2}dy.$$

Тогда

$$du = Hdy, \qquad v = \int dv = \int \frac{2y}{(1+y^2)^2}dy = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Интеграл запишется

$$\int \sqrt{\frac{r}{H-r}}dr = -\frac{Hy}{1+y^2} + H\int \frac{dy}{1+y^2} = Harctgy - \frac{Hy}{1+y^2}.$$

Общее решение

$$H \cdot arctgy - \frac{Hy}{1+y^2} = \sqrt{\frac{2gR^2}{H}}t + C.$$

С учётом выражения для y и ограничений значений арктангенса $arctgy \le \pi/2$ получим

$$\sqrt{r(H-r)} - H \cdot arctg\sqrt{\frac{r}{H-r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{H}}t + C.$$

Для определения постоянной C подставим начальное условия $t = 0,\ r = H$. Получим $C = -H\pi/2$.

Закон изменения r от времени t:

$$\sqrt{r(H-r)} - H \cdot arctg\sqrt{\frac{r}{H-r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{H}}t - \frac{H\pi}{2}.$$

Отсюда для времени падения t получим

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{H}{2g}}\left(\sqrt{r(H-r)} + H\left(\frac{\pi}{2} - arctg\sqrt{\frac{r}{H-r}}\right)\right).$$

В момент падения на поверхность планеты, когда $r = R,\ \ H - R = h$, время падения

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + (R+h)\left(\frac{\pi}{2} - arctg\sqrt{\frac{R}{h}}\right)\right). \qquad (4)$$

В частности, когда $h \gg R$ и R можно пренебречь в сравнении с h, получим

$$T_\infty = \sqrt{\frac{h}{2g}},$$

Поученное значение ровно в два раза меньше, чем значение, получаемое по формуле из школьного учебника физики.

Для малых высот, когда $h \ll R$ и h можно пренебречь в сравнении с R, получим

$$T = \sqrt{\frac{h}{2g}} + \sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\sqrt{\frac{R}{h}}\right).$$

На рисунке 1 представлены графики зависимости времени падения тела на Землю от высоты, полученные при помощи программы MathCad по формулам (1) и (4). Высоты взяты до ста километров. По оси абсцисс откладывается начальная высота падения в метрах, а по оси ординат время падения на поверхность планеты в секундах. График, определяемый формулой (1) изображён красной линией, а график, определяемый формулой (4) изображён синей линией. Как видно из этих графиков, на высотах до 100 км классическая формула 1 даёт достаточно точное значение времени падения. Погрешность не превосходит 1,3%.

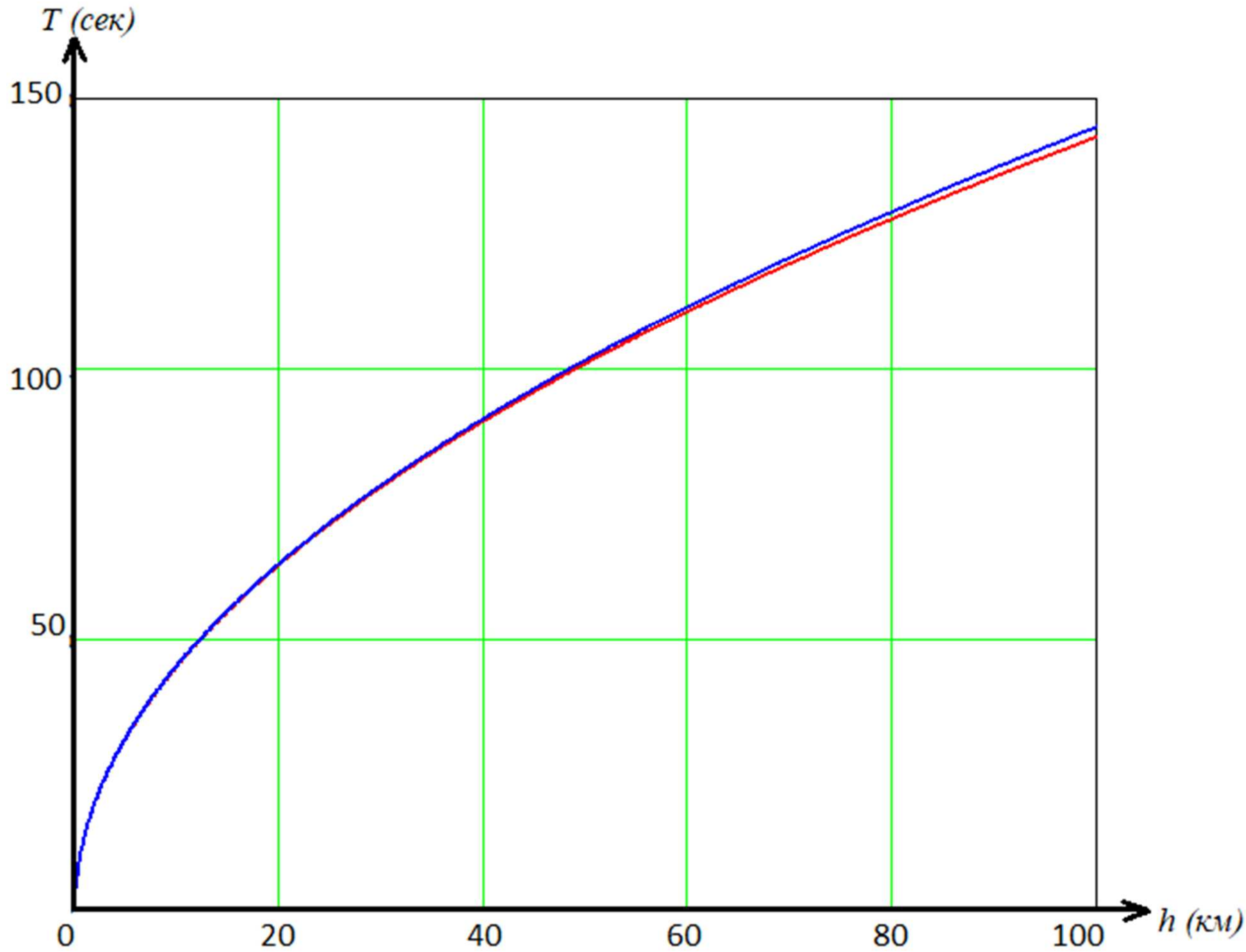

Рисунок 1. Графики зависимости времени падания от высоты

(для высот до 100 километров).

На рисунке 2 представлены графики зависимости времени падения тела на Землю от высоты, которая не превосходит 10 тысяч километров. Как видно из этих графиков, на этих высотах время падения, полученное по формуле (4), уже значительно отличается от времени падения, полученного по приближённой формуле (1).

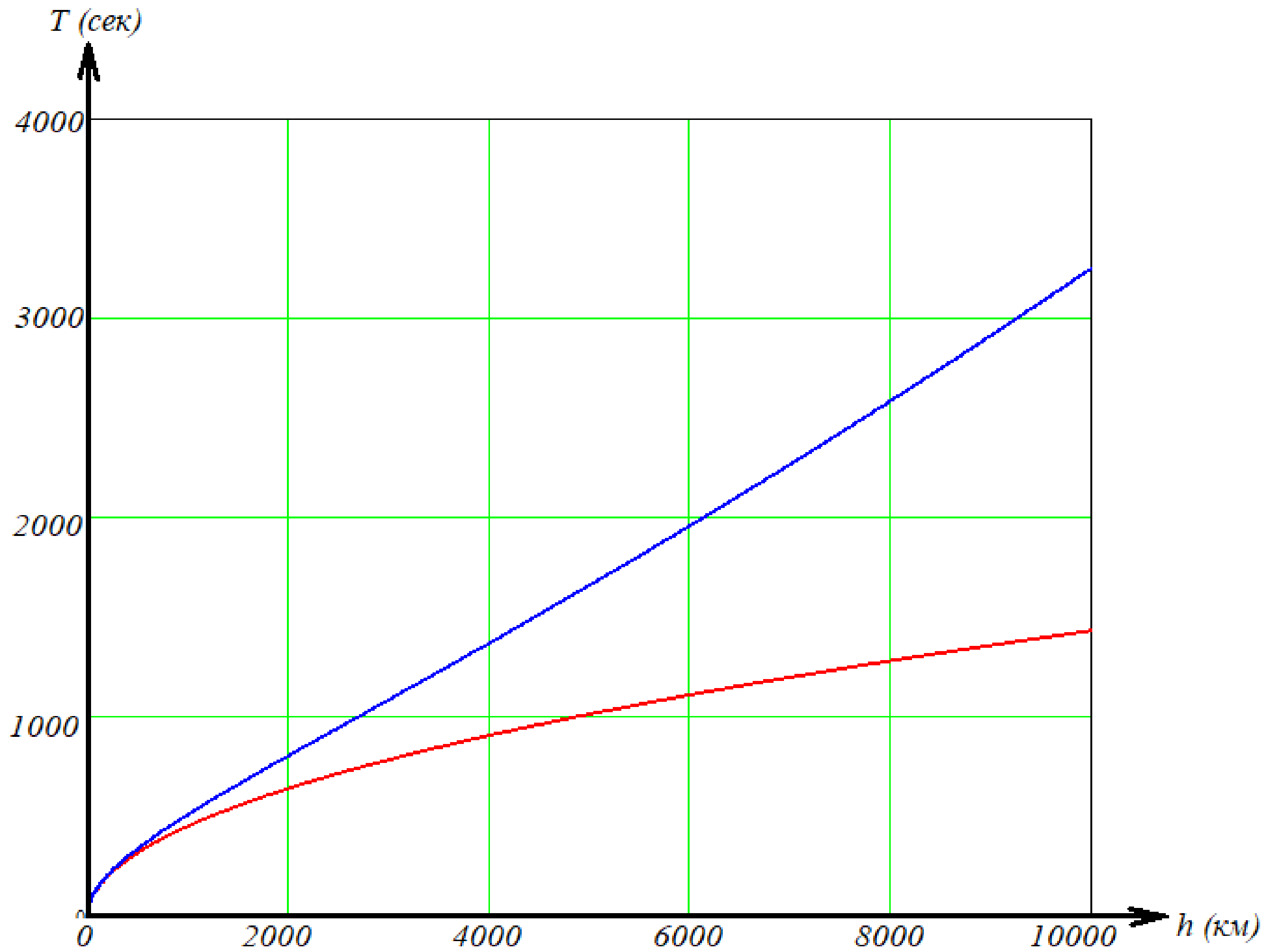

Рисунок 2. Графики зависимости времени падания от высоты

(для высот до 10 тысяч километров).

Скорость падения камня на Землю определяется формулой (3), из которой при $r = R$ получим

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

Учитывая выражение для второй космической скорости $V = \sqrt{2gR}$, скорость падения на Землю равна

$$v = V \cdot \sqrt{\frac{h}{R + h}}.$$

Из последнего выражения делаем вывод, что скорость падения камня с любой высоты на Землю с никогда не превышает второй космической скорости. На рисунке 3 изображён график зависимости скорости падения тела на Землю от начальной высоты.

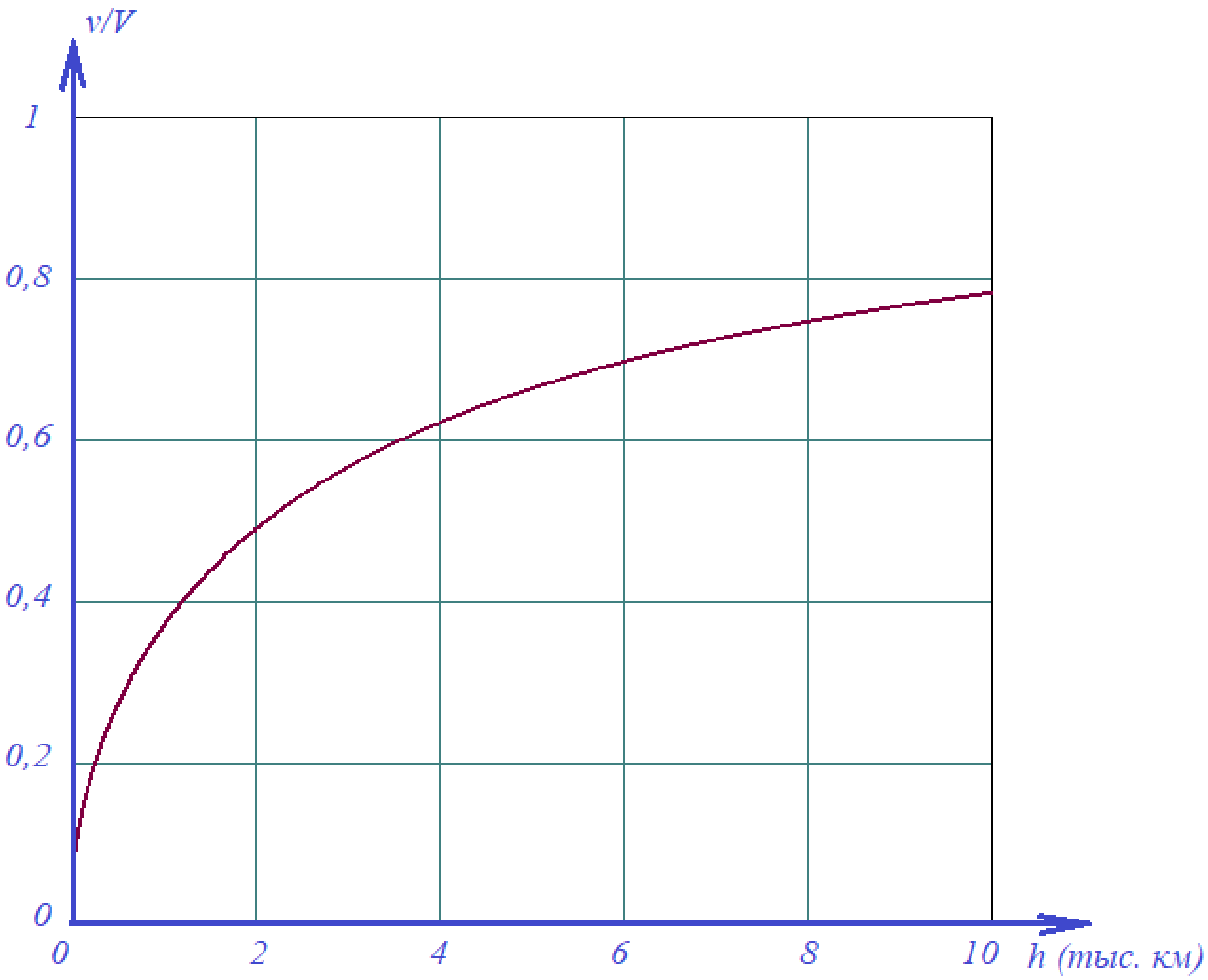

Рисунок 3. График зависимости скорости падения тела на Землю от начальной высоты.

Заметим, что формула из учебника физики может давать значения, значительно превышающие вторую космическую скорость, что неверно.

Калининград, 12.09.2022