Задача.

Найти функцию, для которой сумма производной и первообразной равна нулю. Если известно, что при $x=0$ и функция и первообразная принимают одно и тоже значение, равное 1.

Решение.

Обозначим искомую функцию через $f(x)$, а её первообразную через $F(x)$. Тогда по условию задачи:

$$\begin{cases} f'(x)+F(x)=0; \\ f(0)=1, \quad F(0)=1. \end{cases} \tag{3}$$

По определению, первообразной функции

$$F'(x)=f(x).$$

Тогда $f'(x)=(F'(x))'=F''(x)$ и система (3) запишется в виде

$$\begin{cases} F''(x)+F(x)=0; \\ F'(0)=1, \quad F(0)=1. \end{cases} \tag{4}$$

Поставленная задача (4) носит название задачи Коши для заданного уравнения. Задача названа в честь великого французского математика Огюстена Луи Коши, разработавшего основы математического анализа.

Заметим, что функция $F(x)=C\cdot\sin(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом постоянном значении C.

$$F''(x)+F(x)=0. \tag{5}$$

Чтобы убедится в этом достаточно дважды взять производную от данной функции и подставить её в последнее уравнение. Действительно, производная равна

$$F'(x)=C\cdot\cos(x),$$

$$F''(x)=(C\cdot\cos(x))'=-C\cdot\sin(x),$$

$$F''(x)+F(x)=-C\cdot\sin(x)+C\cdot\sin(x)=0.$$

Аналогично, не сложно проверить, что функция $F(x)=C\cdot\cos(x)$ также является решением уравнения (5). Также решением данного уравнения является сумма этих функций

$$F(x)=C_1\cdot\cos(x)+C_2\cdot\sin(x).$$

Найдём производную полученной функции.

$$F'(x)=\left(C_1\cdot\cos(x)+C_2\cdot\sin(x)\right)'=-C_1\cdot\sin(x)+C_2\cdot\cos(x).$$

По условию задачи

$$f(x)=F'(x)=-C_1\cdot\sin(x)+C_2\cdot\cos(x),$$

и

$$f(0)=-C_1\cdot\sin(0)+C_2\cdot\cos(0)=C_2=1.$$

Также

$$F(0)=C_1\cdot\cos(0)+C_2\cdot\sin(0)=C_1=1.$$

Таким образом, $C_1=C_2=1$ и

$$F(x)=\cos(x)+\sin(x).$$

Тогда искомая функция равна

$$f(x)=F'(x)=\left(\cos(x)+\sin(x)\right)'=\cos(x)-\sin(x).$$