http://www.kvadromir.com/matmetod_v_ekonomike.html — ***Математические методы в экономике***

Задание 1.

Фирма минимизирует средние издержки, которые получаются в результате равными 30 руб./ед. Чему равны при этом предельные издержки?

Решение. Пусть $C(x)-$ функция издержек; тогда для значения объема производства x, при котором средние издержки минимизированы, имеем:

$$A'(x)=\left(\frac{C(x)}{x}\right)'=\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\left(C'(x)-\frac{C(x)}{x}\right)=0,$$

откуда $C'(x)=A(x)=30$ рублей за единицу – предельные издержки.

http://www.kvadromir.com/matmetod_v_ekonomike.html — ***Математические методы в экономике***

Задание 2.

Считается, что увеличение реализации y от затрат на рекламу x (млн. руб.) определяется соотношением: $y=0{,}1\sqrt{x}$. Доход от реализации единицы продукции равен 20 тыс. руб. Найти уровень рекламных затрат, при котором фирма получит максимальную прибыль.

Решение. Если считать увеличение прибыли также в миллионах рублей, то разница между прибылью и затратами на рекламу составляет

$$0{,}02y-x=0{,}002\sqrt{x}-x=f(x).$$

Производная этой функции $f'(x)=\dfrac{0{,}001}{\sqrt{x}}-1$ равна нулю при $\underline{x=10^{-6}}$; как нетрудно убедиться , это точка максимума функции прибыли $f(x)$.

Задание 3.

Зависимость дохода монополии от количества выпускаемой продукции x определяется как $D(x)=100x-1000\sqrt{x}$ ($400\le x\le 900$). Функция издержек на этом промежутке имеет вид : $C(x)=50x+\dfrac{4}{5}x\sqrt{x}$. Найти оптимальное для монополии-производителя значение выпуска продукции.

Решение. Требуется найти то значение $x\in[400;900]$, для которого разница $P(x)=D(x)-C(x)=50x-1000\sqrt{x}-\dfrac{4}{5}x\sqrt{x}$ максимальна. Имеем:

$$P'(x)=50-\frac{500}{\sqrt{x}}-\frac{6}{5}\sqrt{x}=0;$$

Обозначая $\sqrt{x}=t$ и решая уравнение $50-\dfrac{500}{t}-\dfrac{6}{5}t=0$, откуда точка максимума $P(x)$: $x=t^2\approx 345$.

Задание 4.

Кривые Лоренца распределения дохода в некоторых странах могут быть заданы уравнениями :

а) $y = 0{,}85x^2 + 0{,}15^x$ *; б)* $y = 2^x - 1$.

Определить меру неравномерности для указанных распределений.

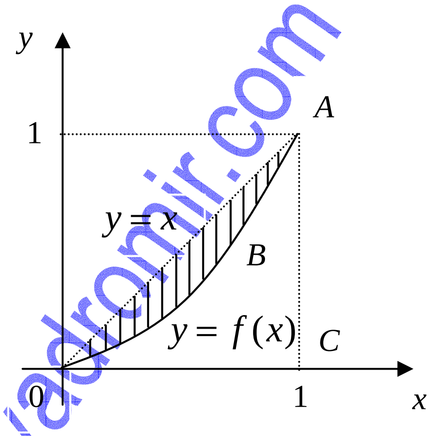

Рис. 1

Решение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, характеризующую неравномерность распределения доходов среди населения, где y – доля совокупного дохода, получаемого долей x беднейшего населения. График этой функции называется ***кривой Лоренца*** (рис. 1).

Очевидно, что $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0; 1]$. и неравномерность распределения доходов тем больше, чем больше площадь фигуры *OAB*. Поэтому в качестве меры указанной неравномерности используют так называемый ***коэффициент Джини*** *k*, равный отношению площади фигуры *OAB* к площади треугольника *OAC*.Тогда по формуле вычисления площади плоской фигуры получим:

а)

$$S_{OAB} = \int_0^1 \left(x - 0{,}85x^2 - 0{,}15^x\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 0{,}85\frac{x^3}{3} - \frac{0{,}15^x}{\ln 0{,}15}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 0{,}85 \cdot \frac{1}{3} + \frac{0{,}85}{\ln 0{,}15} = 0{,}052;$$

Тогда $k = \dfrac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = \dfrac{0{,}052}{0{,}5} = 0{,}104.$

б)

$$S_{OAB} = \int_0^1 \left(x - 2^x + 1\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{2^x}{\ln 2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{\ln 2} = 0{,}057;$$

Тогда $k = \dfrac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = \dfrac{0{,}057}{0{,}5} = 0{,}114.$

Задание 5.

Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$. *Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.*

Решение. Пусть $p = f(x)$ - кривая спроса D на некоторый товар и $p = g(x)$ - кривая предложения S, где p –цена на товар, x – величина спроса (предложения). Обозначим через $(x_0,\ p_0)$ точку рыночного равновесия (рис. 2).

Доход от реализации количества товара x_0 по равновесной цене p_0 равен произведению $x_0 p_0$.

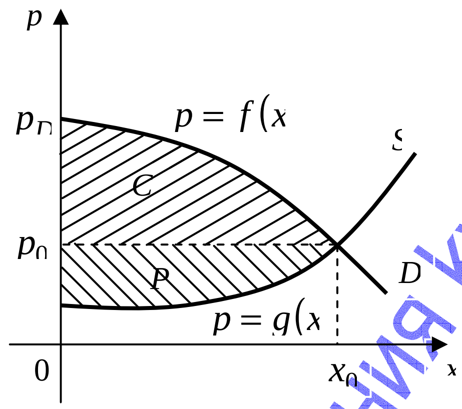

Рис. 2

Если предполагать непрерывное снижение цены от максимальной $p_D = f(0)$ до равновесной p_0 по мере удовлетворения спроса, то доход составит $\int_0^{x_0} f(x)dx$.

Величина денежных средств $C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0$ сберегается потребителями, если предполагать продажу товара по равновесной цене p_0, поэтому C называется ***выигрышем потребителей***.

Аналогично, величина $P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx$ называется ***выигрышем поставщиков***. Величины C и P численно равны площадям соответствующих криволинейных треугольников (рис. 2).

Если уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$, то в данном случае функция выигрыша потребителей

$$C(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0 = \int_0^{x_0} (134 - x^2)\,dx - 70x_0 = \underline{64x_0 - \frac{x_0^3}{3}}.$$