# Цепная линия и гиперболические функции

Тысячелетия человечество использовало канаты, цепи, провода и другие приспособления, используемые на практике для закрепления отдельных частей сооружений, ограждений и прочих нужд. Под воздействием гравитационного поля Земли такие элементы конструкций провисают и изгибаются (см. рисунок 1 и 2).

Кривая, форма которой соответствует однородной гибкой нерастяжимой тяжелой нити, закрепленной с обоих концов и находящейся под действием силы тяжести, называется *цепной линией*. Очевидно, цепная линия является плоской кривой, то есть такой кривой, все точки которой лежат в одной плоскости.

Долгое время считалось, что цепная линия представляет собой параболу, подобно тому, как траектория движения камня в поле земного тяготения есть парабола. Однако уже в начале 17 века великий итальянский мыслитель Галилео Галилей высказал предположения, что цепная линия не является параболой. Строгое решение задачи с выводом уравнения цепной линии впервые было найдено в трудах великих немецких мыслителей Готфрида Лейбница и Иоганна Бернулли, а также великого нидерландского естествоиспытателя Христиана Гюйгенса в 1691 году.

Рассмотрим элементарный участок нити длиной $\Delta l$ (Рисунок 3). Масса этого участка равна $\Delta m = \rho S \Delta l$ и на него действуют распределенная по длине сила тяжести интенсивности $\rho g S$, направленная вниз и равная $\Delta m g = g \rho S \Delta l$.

Здесь $\rho$ − объемная плотность материала нити, $g$ − ускорение свободного падения, $S$ − площадь поперечного сечения нити.

Также на концах данного участка действуют силы натяжения $T(l)$ и $T(l+\Delta l)$.

*Рисунок 1. Цепи, используемые при штабелирование парахода “Бремен”. Фото из Федерального архива Германии. Bundesarchiv Bild 102-06406, Bremen, Stapellauf des Dampfers "Bremen"*

*Рисунок 2. Цепи ограждения Царь-пушки в московском кремле. http://www.fotokonkurs.ru/photo/58515*

Условие равновесия рассматриваемого участка запишется в виде:

$$\vec{T}(l)+\vec{T}(l+\Delta l)+\Delta m\vec{g}=0.$$

В проекции на оси координат получим

$$-T(l)\cos\alpha+T(l+\Delta l)\cos(\alpha+\Delta\alpha)=0;$$
$$-T(l)\sin\alpha+T(l+\Delta l)\sin(\alpha+\Delta\alpha)\ -\rho gS\Delta l=0.$$

Из первого уравнения получаем, что горизонтальная компонента силы натяжения $T(l)$ всегда постоянна: $T(l)cos\alpha(l)=T_0=const$. Второе уравнение перепишем в виде:

$$d(T(l)sin\alpha(l))=d(\rho gSl).$$

С учётом сказанного, можем записать

$$T_0d(tg\alpha(l))=\rho gS\,dl.$$

Памятуя о геометрическом смысле производной, запишем $tg\alpha=y'$ и тогда получим

$$\frac{dy'}{dl}=\frac{\rho gS}{T_0}.$$

Переходя к переменной $x$, используя правило дифференцирования сложной функции и выражение для дифференциала дуги кривой, получим

$$\frac{dy'}{dl}=\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dl}=\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dx\sqrt{1+(y')^2}}=$$
$$=\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{\rho gS}{T_0}.$$

Отсюда, учитывая, что производная от первой производной есть вторая производная, получаем

$$y''=\frac{\rho gS}{T_0}\sqrt{1+(y')^2}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется *дифференциальным уравнением цепной линии*. Это уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка.

Чтобы понизить порядок уравнения сделаем замену $z(x) = y'$. Тогда $y'' = z'$. Подставим в уравнение (1). Получим

$$\frac{dz}{dx} = z' = \frac{\rho g S}{T_0}\sqrt{1+z^2}.$$

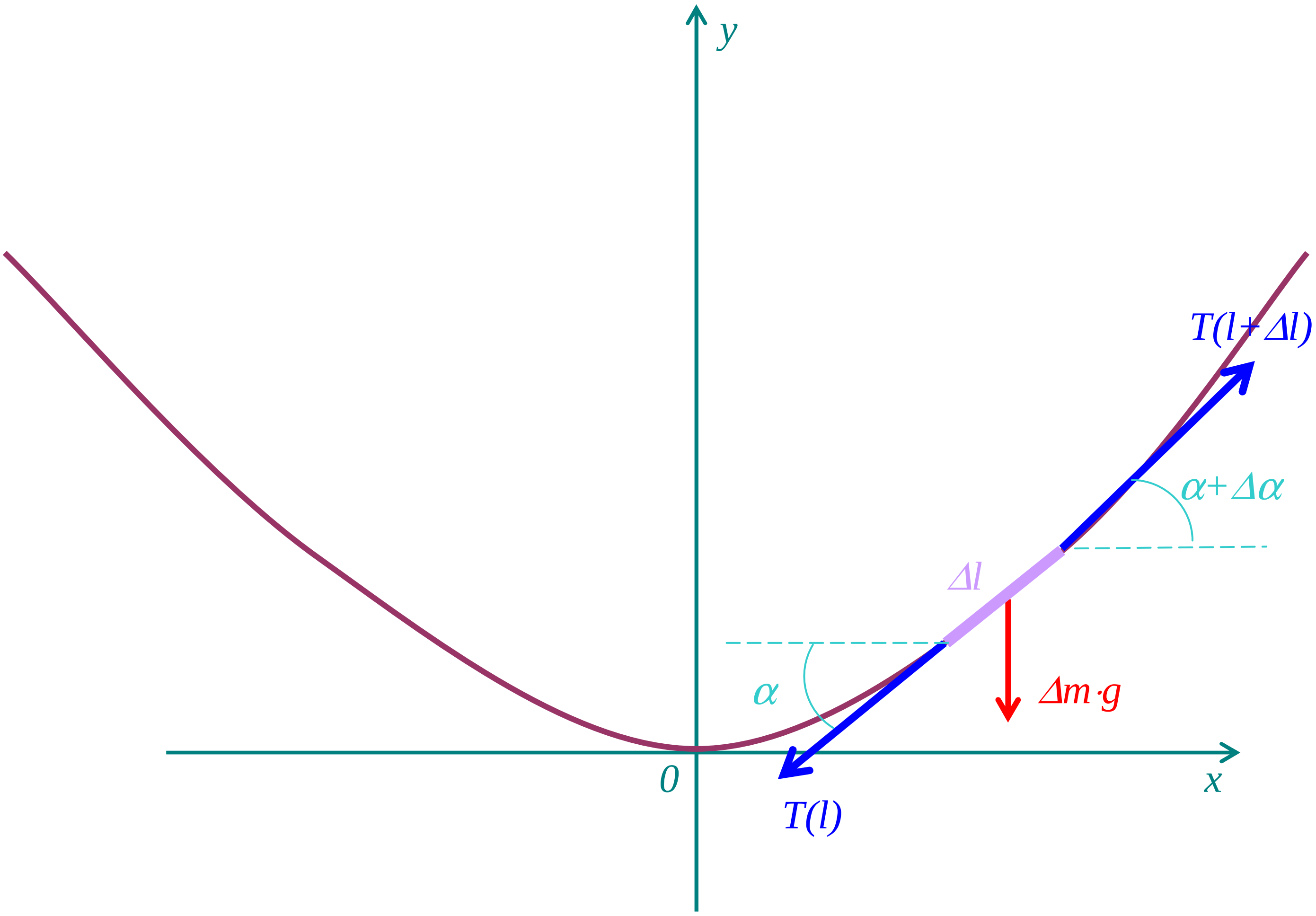


*Рисунок 3. Ценная линия и расчётная схема.*

Получили уравнение с разделяющимися переменными, которое после элементарных преобразований принимает вид

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\rho g S}{T_0}dx.$$

Интегрируем последнее уравнение

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\rho g S}{T_0} \int dx,$$

$$\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right| = \frac{\rho g S}{T_0} \cdot x + C_1.$$

Принимая за начало координат нижнюю точку цепной линии, заметим, что касательная в нижней точке горизонтальная, другими словами, нижняя точка является точкой экстремума для функции $y(x)$. Следовательно, $y'(0)=z(0)=0$. Подставим в последнее выражение $x=0$, $y=0$, $z=0$. В результате получим $C_1 = 0$. Тогда уравнение цепной линии перепишется в виде

$$\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right| = \frac{\rho g S}{T_0} \cdot x.$$

Потенцируя полученное уравнение, перепишем его в показательной форме

$$z+\sqrt{1+z^2} = \exp\left(\frac{\rho g S}{T_0} \cdot x\right) = e^{\kappa x}. \qquad (2)$$

Здесь для сокращения записи мы ввели обозначение $\frac{\rho g S}{T_0} = \kappa$.

Умножим обе части уравнение (2) на выражение сопряжённое к левой части $z-\sqrt{1+z^2}$. Получим

$$\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\cdot\left(z-\sqrt{1+z^2}\right) = e^{\kappa x}\cdot\left(z-\sqrt{1+z^2}\right). \qquad (3)$$

Нетрудно заметить, что

$$\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\cdot\left(z-\sqrt{1+z^2}\right) = z^2 - \left(\sqrt{1+z^2}\right)^2 =$$
$$= z^2 - 1 + z^2 = -1.$$

Вследствие последнего замечания, уравнение (3) можно переписать в виде

$$e^{\kappa x}\cdot\left(z-\sqrt{1+z^2}\right)=-1,$$

или в виде

$$z-\sqrt{1+z^2}=-e^{-\kappa x}.$$

Прибавим последнее выражением к выражению (2), и поделим полученное равенство на 2. В результате получим

$$z=\frac{e^{\kappa x}-e^{-\kappa x}}{2}. \tag{4}$$

**Определение 1.** *Гиперболическим синусом* от $x$ называется функция, определённая следующим выражением

$$sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.$$

**Определение 2.** *Гиперболическим косинусом* от $x$ называется функция, определённая следующим выражением

$$ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

**Предложение 1.** Производная от гиперболического косинуса равна гиперболическому синусу, производная от гиперболического синуса равна гиперболическому косинусу, то есть

$$sh'(x)=ch(x);$$
$$ch'(x)=sh(x).$$

**Доказательство.**

$$sh'(x)=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)'}{2}=\frac{\left(e^{x}\right)'-\left(e^{-x}\right)'}{2}=$$

$$=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=ch(x);$$

$$ch'(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)'}{2}=\frac{\left(e^x\right)'+\left(e^{-x}\right)'}{2}=$$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=sh(x).$$

Доказательство завершено. ■

**Следствие 1.** Первообразная от гиперболического косинуса равна гиперболическому синусу, а первообразная от гиперболического синуса равна гиперболическому косинусу.

**Следствие 2.**

$$\int sh(x)dx=ch(x)+C;$$

$$\int ch(x)dx=sh(x)+C.$$

С учётом сформулированных определений, а также памятуя о сделанной ранее замене $z(x)$, перепишем выражение (4) в следующем виде

$$y'=z=\frac{e^{\kappa x}-e^{-\kappa x}}{2}=sh(\kappa x).$$

На основании предложения 1 и следствий к нему, после интегрирования получим

$$y(x)=\int sh(\kappa x)dx=\frac{1}{\kappa}ch(\kappa x)+C.$$

В принятой системе координат, когда нижняя точка цепной линии является началом системы координат, справедливо следующее начальное условие $y(0)=0$. Подставим это условие в найденное уравнение цепной линии и получим

$$y(0) = \frac{1}{\kappa} ch(0) + C = 0,$$

$$\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{e^0 + e^0}{2} + C = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1+1}{2} + C = \frac{1}{\kappa} + C = 0.$$

Отсюда $C = -\frac{1}{\kappa}$ и уравнение цепной линии запишется в виде

$$y(x) = \frac{1}{\kappa}\left(ch(\kappa x) - 1\right).$$

Таким образом, форма цепной линии определяется гиперболическим косинусом с параметром $\kappa$. Кроме гиперболического синуса и гиперболического косинуса существуют также гиперболический тангенс и котангенс, которые определяются по тому же принципу, что и тригонометрический тангенс и котангенс, а именно:

**Определение 3.** *Гиперболическим тангенсом* от $x$ называется функция, определённая следующим выражением

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

**Определение 4.** *Гиперболическим котангенсом* от $x$ называется функция, определённая следующим выражением

$$cth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)}.$$

Из сделанных определений следуют равенства

$$th(x)\cdot cth(x)=1;$$

$$th(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}};$$

$$cth(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}.$$

Исследуем ряд других замечательных свойств гиперболических функций.

**Задание 1.**

Докажите тождество

$$ch^{2}(x)-sh^{2}(x)=1.$$

**Доказательство.**

Из определений гиперболического косинуса и гиперболического тангенса следует:

$$ch^{2}(x)-sh^{2}(x)=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^{2}=$$

$$=\frac{\left(e^{x}\right)^{2}+2e^{x}e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}}{4}-\frac{\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}}{4}=$$

$$=\frac{\left(e^{x}\right)^{2}+2e^{x}e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}-\left(e^{x}\right)^{2}+2e^{x}e^{-x}-\left(e^{-x}\right)^{2}}{4}=$$

$$=\frac{4e^{x}e^{-x}}{4}=e^{x}e^{-x}=e^{x-x}=e^{0}=1.$$

Что и требовалось доказать. ■

## Задание 2.

Докажите тождество

$$1-th^2(x)=\frac{1}{ch^2(x)},$$

$$cth^2(x)-1=\frac{1}{sh^2(x)}.$$

**Доказательство.**

Используем соотношение, доказанное в предыдущем задании, из которого следует

$$ch^2(x)=1+sh^2(x);$$

$$sh^2(x)=ch^2(x)-1.$$

Тогда

$$1-th^2(x)=1-\frac{sh^2(x)}{ch^2(x)}=\frac{ch^2(x)-sh^2(x)}{ch^2(x)}=\frac{1}{ch^2(x)},$$

$$cth^2(x)-1=\frac{ch^2(x)}{sh^2(x)}-1=\frac{ch^2(x)-sh^2(x)}{sh^2(x)}=\frac{1}{sh^2(x)}.$$

Что и требовалось доказать. ■

## Задание 3.

Найти производные гиперболического тангенса и гиперболического котангенса.

**Решение.**

По правилу дифференцирования частного, получим для производной гиперболического тангенса

$$th'(x)=\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)'=\frac{sh'(x)\cdot ch(x)-sh(x)\cdot ch'(x)}{ch^2(x)}=$$

$$=\frac{ch(x)\cdot ch(x)-sh(x)\cdot sh(x)}{ch^2(x)}=\frac{ch^2(x)-sh^2(x)}{ch^2(x)}=$$

$$=\frac{1}{ch^2(x)}.$$

Аналогично получим производную для гиперболического котангенса

$$cth'(x)=\left(\frac{ch(x)}{sh(x)}\right)'=\frac{ch'(x)\cdot sh(x)-ch(x)\cdot sh'(x)}{sh^2(x)}=$$

$$=\frac{sh(x)\cdot sh(x)-ch(x)\cdot ch(x)}{sh^2(x)}=\frac{sh^2(x)-ch^2(x)}{sh^2(x)}=$$

$$=-\frac{ch^2(x)-sh^2(x)}{sh^2(x)}=-\frac{1}{sh^2(x)}.$$

Таким образом, мы доказали следующие соотношения

$$th'(x)=\frac{1}{ch^2(x)};$$

$$cth'(x)=\frac{-1}{sh^2(x)}.$$

Обратим внимание на некоторое сходство полученных тождеств с соответствующими тригонометрическими тождествами.