9.1.
(Задача 9. Вариант 1)

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = \cos 9\varphi .$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 1 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = \cos 9\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = r^9 \cos 9\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = r^9 \cos 9\varphi$

9.2.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 2\sin 8\varphi .$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 2 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 2\sin 8\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 2r^8 \sin 8\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 2r^8 \sin 8\varphi$

9.3.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 3\cos 7\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 3 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 3\cos 7\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 3r^7 \cos 7\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 3r^7 \cos 7\varphi$

9.4.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 4\sin 6\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 4 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 4\sin 6\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 4r^6 \sin 6\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 4r^6 \sin 6\varphi$

9.5.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 5\cos 5\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 5 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 5\cos 5\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 5r^5 \cos 5\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 5r^5 \cos 5\varphi$

9.6.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 6\sin 4\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 6 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 6\sin 4\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 6r^4 \sin 4\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 6r^4 \sin 4\varphi$

9.7.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 7\cos 3\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 7 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 7\cos 3\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 7r^3 \cos 3\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 7r^3 \cos 3\varphi$

9.8.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 8\sin 2\varphi .$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 8 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 8\sin 2\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 8r^2 \sin 2\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 8r^2 \sin 2\varphi$

9.9.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 9\cos 2\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 9 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 9\cos 2\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 9r^2 \cos 2\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 9r^2 \cos 2\varphi$

9.10.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 10\sin 3\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 10 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 10\sin 3\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 10r^3 \sin 3\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 10r^3 \sin 3\varphi$

9.11.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 11\cos 4\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 11 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 11\cos 4\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 11 r^4 \cos 4\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 11 r^4 \cos 4\varphi$

9.12.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 12\sin 5\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 12 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 12\sin 5\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 12 r^5 \sin 5\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 12 r^5 \sin 5\varphi$

9.13.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 13\cos 6\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 13 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 13\cos 6\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 13r^6 \cos 6\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 13r^6 \cos 6\varphi$

9.14.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 14\sin 7\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 14 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 14\sin 7\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 14 r^7 \sin 7\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 14 r^7 \sin 7\varphi$

9.15.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 15\cos 8\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 15 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 15\cos 8\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 15 r^8 \cos 8\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 15 r^8 \cos 8\varphi$

9.16.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 16\sin 9\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 16 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 16\sin 9\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 16 r^9 \sin 9\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 16 r^9 \sin 9\varphi$

9.17.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 17\cos 9\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 17 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 17\cos 9\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 17 r^9 \cos 9\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 17 r^9 \cos 9\varphi$

9.18.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 18\sin 8\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 18 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 18\sin 8\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 18r^8 \sin 8\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 18r^8 \sin 8\varphi$

9.19.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ **в круге** $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ **(**$r,\ \ \varphi$ **- полярные координаты), на границе которого искомая функция** $u(r,\varphi)$ **имеет следующие значения:**

$$u(1,\varphi) = 19\cos 7\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 19 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 19\cos 7\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 19 r^7 \cos 7\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 19 r^7 \cos 7\varphi$

9.20.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ **в круге** $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ **(**$r,\ \ \varphi$ **- полярные координаты), на границе которого искомая функция** $u(r,\varphi)$ **имеет следующие значения:**

$$u(1,\varphi) = 20\sin 6\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 20 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 20\sin 6\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 20r^6 \sin 6\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 20r^6 \sin 6\varphi$

9.21.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 21\cos 5\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 21 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 21\cos 5\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 21r^5 \cos 5\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 21r^5 \cos 5\varphi$

9.22.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 22\sin 4\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 22 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 22\sin 4\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 22r^4 \sin 4\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 22r^4 \sin 4\varphi$

9.23.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 23\cos 3\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 23 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 23\cos 3\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 23r^3 \cos 3\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 23r^3 \cos 3\varphi$

9.24.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 24\sin 2\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 24 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 24\sin 2\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 24r^2 \sin 2\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 24r^2 \sin 2\varphi$

9.25.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 25\cos 2\varphi .$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 25 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 25\cos 2\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 25r^2 \cos 2\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 25r^2 \cos 2\varphi$

9.26.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 26\sin 3\varphi .$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 26 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 26\sin 3\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 26 r^3 \sin 3\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 26 r^3 \sin 3\varphi$

9.27.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 27\cos 4\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 27 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 27\cos 4\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 27r^4 \cos 4\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 27r^4 \cos 4\varphi$

9.28.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 28\sin 5\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 28 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 28\sin 5\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 28 r^5 \sin 5\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 28 r^5 \sin 5\varphi$

9.29.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 29\cos 6\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 29 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 29\cos 6\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 29 r^6 \cos 6\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 29 r^6 \cos 6\varphi$

9.30.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ ($r,\ \ \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 30\sin 7\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 30 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 30\sin 7\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 30r^7 \sin 7\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 30r^7 \sin 7\varphi$

9.31.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = 31\cos 8\varphi + 32\sin 9\varphi.$$

Решение.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1,\varphi)$.

При $r = 1$, $u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$.

То есть, разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n. Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители r^n при соответствующих членах разложения функции $u(1,\varphi) = g(\varphi)$.

В варианте 31 граничное условие имеет вид $u(1,\varphi) = 31\cos 8\varphi + 32\sin 9\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r,\varphi) = 31r^8 \cos 8\varphi + 32r^9 \sin 9\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = 31r^8 \cos 8\varphi + 32r^9 \sin 9\varphi$