Задача 1. Решить смешанную задачу.
Вариант 11.

$u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 11\sin 2\pi x$; $u(0,t) = u(3,t) = 0$.

Решение.

Это уравнение теплопроводности. Решаем задачу по методу Фурье. Решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Здесь $X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям;

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t},$$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ - собственные числа задачи Штурма-Лиувилля; C_n - коэффициенты, определяемые по начальным условиям.

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

В частности, при $t = 0$ получим

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{l} = 11\sin 2\pi x.$$

В нашем случае $l = 3$, $a = \sqrt{7}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{3} = 11\sin 2\pi x$$

В последнем равенстве, слева стоит разложение функции $11\sin 2\pi x$ в ряд Фурье. Коэффициенты ряда Фурье $C_n = 11$ если $n = 6$ и $C_n = 0$ если $n \neq 6$. Таким образом,

$$u(x,t) = 11e^{-28\pi^2 t}\sin 2\pi x.$$

kvadromir.com