ГОТО-
ВИМ-
СЯ
К
ЭКЗА-
МЕ-
НАМ

книга 2

ВСЕ РЕШЕНИЯ К «СБОРНИКУ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ» В.С.Волькенштейн

Универсальное издание

- поступающим в вузы
- студентам и преподавателям
- школьникам и учителям
- гарантия овладения навыками решения задач

Глава III
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 9. Электростатика

Если в условии задачи не указано, в какой среде находятся заряды, то будем считать, что они находятся в воздухе, относительная диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon = 1$. Для некоторых других диэлектриков значение относительной диэлектрической проницаемости приведено в таблице 14 приложения. Если в задаче приведена графическая зависимость нескольких величин от какой-либо одной и при этом все кривые изображены на одном графике, то по оси y задаются условные единицы. В задачах 9.32, 9.122, 9.123 дан авторский вариант решения.

9.1. Найти силу F притяжения между ядром атома водорода и электроном. Радиус атома водорода $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м; заряд ядра равен по модулю и противоположен по знаку заряду электрона.

Решение:

По закону Кулона сила электростатического взаимодействия между двумя заряженными телами, размеры которых малы по сравнению с расстоянием r между ними, опреде-

---

Условия задач приводятся в учебных целях и в необходимом объеме — как иллюстрационный материал. Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги. (Ст. 19 п.2 Закона РФ об авторском праве и смежных правах от 9 июня 1993г.)

ляется формулой $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, где q_1 и q_2 — электрические заряды тел, ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная. В условиях данной задачи $q_1 = |q_2| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Подставив числовые значения, получим $F = 92{,}3 \cdot 10^{-9}$ Н.

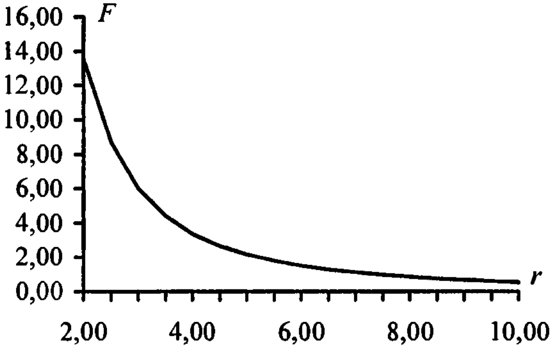
9.2. Два точечных заряда, находясь в воздухе ($\varepsilon = 1$) на расстоянии $r_1 = 20$ см друг от друга, взаимодействуют с некоторой силой. На каком расстоянии r_2 нужно поместить эти заряды в масле, чтобы получить ту же силу взаимодействия?

Решение:

Согласно закону Кулона два точечных заряда в воздухе взаимодействуют с силой $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_1 r_1^2}$ — (1), а в масле с такой же силой $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_2 r_2^2}$ — (2). Приравняв правые части уравнений (1) и (2), найдем $r_2 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} r_1$. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon_1 = 1$, диэлектрическая проницаемость масла (таблица 14) $\varepsilon_2 = 5$. Подставив числовые значения, получим $r_2 = 8{,}94$ см.

9.3. Построить график зависимости силы F взаимодействия между двумя точечными зарядами от расстояния r между ними в интервале $2 \le r \le 10$ см через каждые 2см. Заряды $q_1 = 20$ нКл и $q_2 = 30$ нКл.

Решение:



По закону Кулона $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$. Подставив числовые значения, получим $F = \dfrac{5{,}4 \cdot 10^{-6}}{r^2}$. Характер зависимости F от r отражен на графике.

r, см	2	4	6	8	10
F, $10^{-7}\cdot$Кл	13,500	3,375	1,500	0,844	0,540

9.4. Во сколько раз сила гравитационного притяжения между двумя протонами меньше силы их электростатического отталкивания? Заряд протона равен по модулю и противоположен по знаку заряду электрона.

Решение:

Сила гравитационного притяжения $F_г = G\dfrac{m^2}{r^2}$. Сила электростатического отталкивания $F_э = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$. Тогда

$$\frac{F_э}{F_г} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon G m^2} = 1{,}24 \cdot 10^{36}.$$

9.5. Найти силу F электростатического отталкивания между ядром атома натрия и бомбардирующим его протоном, считая, что протон подошел к ядру атома натрия на расстояние $r = 6\cdot10^{-14}$ м. Заряд ядра натрия в 11 раз больше заряда протона. Влиянием электронной оболочкн атома натрия пренебречь.

Решение:

По закону Кулона $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; $F = 0{,}7$ Н.

9.6. Два металлических одинаково заряженных шарика массой $m = 0{,}2$ кг каждый находятся на некотором расстоянии друг от друга. Найти заряд q шариков, если известно, что на этом расстоянии энергия $W_{эл}$ их электростатического взаимодействия в миллион раз больше энергии $W_{гр}$ их гравитационного взаимодействия.

Решение:

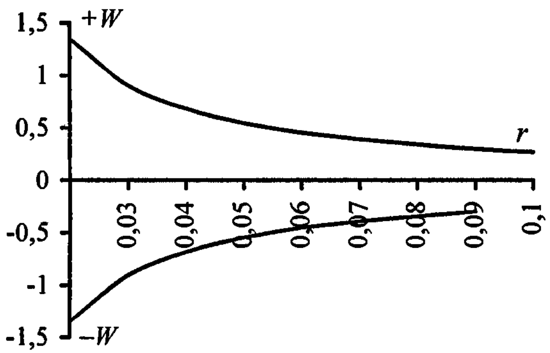
Энергия электростатического взаимодействия шариков $W_{эл} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$, энергия их гравитационного взаимодействия $W_{гр} = \dfrac{Gm_1m_2}{r}$. По условию $W_{эл} = nW_{гр}$, т. е. $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{nGm_1m_2}{r}$, где $n = 10^6$; отсюда $q = \sqrt{n\varepsilon\varepsilon_0 4\pi Gm_1m_2} = 17$ нКл.

9.7. Во сколько раз энергия $W_{эл}$ электростатического взаимодействия двух частиц с зарядом q и массой m каждая больше энергии $W_{гр}$ их гравитационного взаимодействия? Задачу решить для: а) электронов; б) протонов.

Решение:

Энергия электростатического взаимодействия двух частиц $W_{гр} = k\dfrac{q^2}{r}$; энергия их гравитационного взаимодействия $W_{гр} = \gamma\dfrac{m^2}{r}$, где r — расстояние между частицами. Тогда для электронов $W_{эл} / W_{гр} = 4 \cdot 10^{42}$. Для протонов $W_{эл} / W_{гр} = 1{,}24 \cdot 10^{36}$.

9.8. Построить график зависимости энергии $W_{эл}$ электростатического взаимодействия двух точечных зарядов от расстояния между ними в интервале $2 \le r \le 10$ см через каждые 2 см. Заряды $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = 3$ нКл. График построить для: а) одноименных зарядов; б) разноименных зарядов.



Решение:

Энергия электростатического взаимодействия двух точечных зарядов $W = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot r}$. Подставив числовые значения, получим $W_1 = \dfrac{27 \cdot 10^{-3}}{r}$ — для одноименных зарядов.

$W_2 = -\dfrac{27 \cdot 10^{-3}}{r}$ — для разноименных зарядов. Характер зависимости W от r дан на графике.

r, м	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
W_1, Дж	1,35	0,68	0,45	0,34	0,27
W_2, Дж	–1,35	–0,68	–0,45	–0,34	–0,27

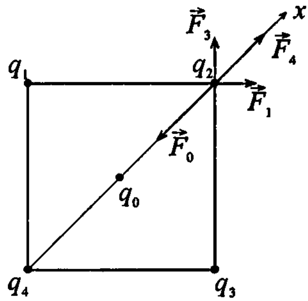
9.9. Найти напряженность E электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами $q_1 = 8$ нКл и $q_2 = -6$ нКл. Расстояние между зарядами $r = 10$ см; $\varepsilon = 1$.

Решение:

Согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ или в проекции на ось x $E = E_1 + E_2$. Напряженность электрического поля точечного заряда $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где r — расстояние от заряда до точки, в которой определяется напряженность. $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2 / 4} = \dfrac{q_1}{\pi\varepsilon_0 r^2}$; $E_2 = \dfrac{|q_2|}{\pi\varepsilon_0 r^2}$. Суммарная напряженность $E = \dfrac{q_1 + |q_2|}{\pi\varepsilon_0 r^2} = 50{,}4$ кВ/м.

9.10. В центр квадрата, в каждой вершине которого находится заряд $q = 2{,}33$ нКл, помещен отрицательный заряд q_0. Найти этот заряд, если на каждый заряд q действует результирующая сила $F = 0$.

Решение:



Рассмотрим силы, действующие на любой из зарядов в вершинах, например, на заряд q_2. Со стороны зарядов q_1, q_3, q_4 на него действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ соответственно, причем $F_1 = F_3 = = \frac{kq^2}{a^2}$, где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; $F_4 = k\frac{q^2}{2a^2}$. Сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_0, равна $F_0 = \frac{2kq|q_0|}{a^2}$. Условие равновесия заряда q_2: $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_0 = 0$ — (1). В проекции на ось x (1) имеет вид: $F_1 \cos 45° + F_3 \cos 45° + F_4 - F_0 = 0$, или $k\frac{q^2}{a^2}\sqrt{2} + k\frac{2q|q_0|}{a^2} = 0$. Отсюда находим $|q_0| = \frac{q}{4}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) = = 0{,}95q$; $q_0 = -2{,}23$ нКл.

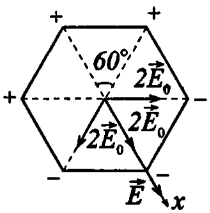
9.11. В вершинах правильного шестиугольника расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найти напряженность E электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях в расположении этих зарядов. Каждый заряд $q = 1{,}5$ нКл; сторона шестиугольника $a = 3$ см.

Решение:

Напряженность поля электрического заряда $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

Найдем напряженность поля E_0 одного заряда. $E_0 = |q| / 4\pi\varepsilon_0 a^2$ (очевидно, что расстояние от зарядов до центра шестиугольника равно стороне треугольника a),

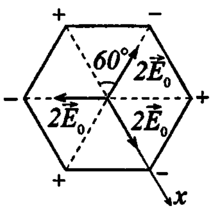
$E_0 = 15$ кВ/м. Согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность $\vec{E}$ находится по правилу векторного сложения $\vec{E} = \sum_{n=1}^{6} \vec{E}_n$, причем $E_1 = E_2 = \ldots = E_6 = E_0$. Рассмотрим три варианта расположения зарядов:



а) В проекции на ось x:

$E = 2E_0 \cos 60° + 2E_0 + 2E_0 \cos 60°$;

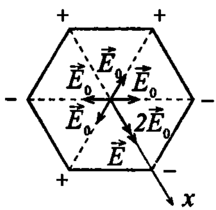
$E = 4E_0$; $E = 60$ кВ/м.



б) В проекции на ось x:

$E = -2E_0 \cos 60° - 2E_0 + 2E_0 \cos 60°$;

$E = 0$.



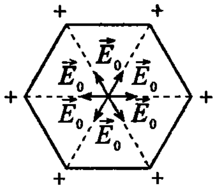
в) В проекции на ось x:

$E = 2E_0$; $E = 30$ кВ/м.

9.12. Решить предыдущую задачу при условии, что все шесть зарядов, расположенных в вершинах шестиугольника, положительны.

Решение:

На рисунке мы видим три пары противоположно направленных и равных по модулю векторов. Каждая такая пара в сумме дает напряженность равную нулю. Таким образом, результирующая напряженность $\bar{E}$ в центре шестиугольника равна нулю.

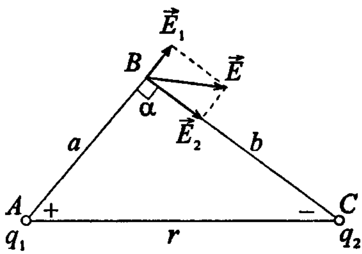


9.13. Два точечных заряда $q_1 = 7{,}5$ нКл и $q_2 = -14{,}7$ нКл расположены на расстоянии $r = 5$ см. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстояниях $a = 3$ см от положительного заряда и $b = 4$ см от отрицательного заряда.

Решение:

Стороны треугольника BCA a, b и r удовлетворяют условию $r^2 = a^2 + b^2$, следовательно, треугольник прямоугольный, угол $\alpha = 90°$. Согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность в точке C: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ — напряженность, создаваемая положительным зарядом q_1, $\bar{E}_2$ — напряженность, создаваемая отрицательным зарядом q_2. По правилу сложения двух взаимноперпендикулярных векторов в скалярном виде $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$. Поскольку $E_1 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$, а $E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b^2}$, то $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \times$

$$\times\sqrt{\frac{q_1^2}{a^4} + \frac{q_2^2}{b^4}} = 112\text{ кВ/м}.$$



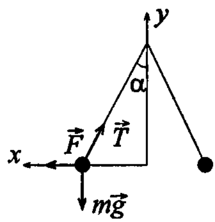
9.14. Два шарика одинаковых радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q_0 = 0{,}4$ мкКл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол $2\alpha = 60°$. Найти массу m каждого шарика, если расстояние от центра шарика до точки подвеса $l = 20$ см.

Решение:

На каждый шарик действуют три силы (см. рисунок к задаче 9.15): сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила электростатического отталкивания $\vec{F}$. Запишем условие равновесия шариков в векторной форме $\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0$ или в проекциях на ось x: $F - T\sin\alpha = 0$ — (1), на ось y: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (2). Из (1) найдем $T = \frac{F}{\sin\alpha}$, из (2) найдем $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$. Следовательно, $\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}$, откуда $mg \cdot tg\alpha = F$ — (3). Из рисунка видно, что $r/2 = l\sin\alpha$ — (4). Поскольку $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, то, с учетом (3) и (4), имеем $mg \cdot tg\alpha = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2 \sin^2\alpha}$, где $q = \frac{q_0}{2}$ — заряд на каждом шарике. Отсюда $m = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4l^2 \sin^2\alpha \cdot tg\alpha} = 15{,}6$ г.

9.15. Два шарика одинаковых радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд q нужно сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной $T = 98$ мН? Расстояние от центра шарика до точки подвеса $l = 10$ см; масса каждого шарика $m = 5$ г.

Решение:



После сообщения шарикам заряда q каждый из них отклонился от вертикали на угол α и остановился в положении равновесия. Поскольку условия равновесия для обоих шариков одинаковы, рассмотрим один из них. По закону сохранения заряда заряд q распределится на два шарика равномерно. Тогда каждый шарик получит заряд $q_0 = \dfrac{q}{2}$. На шарик действуют три силы: сила Кулона $\vec{F}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Условие равновесия шарика $\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0$ или в проекциях на ось x: $F - T\sin\alpha = 0$ — (1), на ось y: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (2). Расстояние между шариками равно $2l\sin\alpha$. Кулоновская сила определяется формулой $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\dfrac{q_0^2}{4l^2\sin^2\alpha}$ — (3). Выразим величину $\sin\alpha$. Из (2) $\cos\alpha = \dfrac{mg}{T}$ или $1 - \sin^2\alpha = \left(\dfrac{mg}{T}\right)^2$, отсюда $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{mg}{T}\right)^2}$ — (4). Из (1) найдем $F = T\sin\alpha$ — (5). Приравняв правые части уравнений (5) и (3) и разделив полученное выражение на $\sin\alpha$, получим $T = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\dfrac{q_0^2}{4l^2\sin^3\alpha}$. Подставив в это выражение уравнение (4), выразим $q_0 = 4l\sqrt{\pi T\varepsilon_0\varepsilon\left(1 - \left(\dfrac{mg}{T}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 5{,}32\cdot 10^{-7}$ Кл. Тогда заряд, сообщенный обоим шарикам, $q = 2q_0 \approx 1{,}1\cdot 10^{-6}$ Кл.

9.16. Найти плотность материала ρ шариков задачи 9.14, если известно, что при погружении этих шариков в керосин угол расхождения нитей стал равным $2\alpha_к = 54°$.

Решение:

Для шарика, находящегося в воздухе (см. рисунок к задаче 9.15), имеем (см. задачу 9.14) $mg = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \cdot 4l^2 sin^2 \alpha \cdot tg\alpha}$ — (1), где диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$. При погружении шариков в керосин на каждый шарик стала действовать выталкивающая сила Архимеда $F_А$. Для шарика, находящегося в керосине, имеем $mg - F_А = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_к \cdot 4l^2 sin^2 \alpha_к tg\alpha_к}$ — (2). Т. к. $mg - F_А = \rho Vg - \rho_к Vg = (\rho - \rho_к)Vg$ — (3), где ρ — плотность материала шарика, $\rho_к = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность керосина, $\varepsilon_к = 2$ — диэлектрическая проницаемость керосина, V — объем шарика, то из (1) — (3) имеем $\dfrac{mg - F_А}{mg} = \dfrac{\rho - \rho_к}{\rho} = \dfrac{\varepsilon\, sin^2 \alpha tg\alpha}{\varepsilon_к\, sin^2 \alpha_к tg\alpha_к}$, откуда плотность материала $\rho = \rho_к \dfrac{\varepsilon_к\, sin^2 \alpha_к tg\alpha_к}{\varepsilon_к\, sin^2 \alpha_к tg\alpha_к - \varepsilon\, sin^2 \alpha tg\alpha}$. Подставляя числовые данные, получим $\rho = 2{,}55 \cdot 10^3$ кг/м^3.

9.17. Два заряженных шарика одинаковых радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины и опущены в жидкий диэлектрик, плотность которого равна ρ и диэлектрическая проницаемость равна ε. Какова должна быть плотность ρ_0

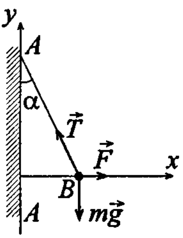
материала шариков, чтобы углы расхождения нитей в воздухе и в диэлектрике были одинаковыми?

Решение:

Воспользуемся итоговой формулой, полученной в предыдущей задаче, учитывая, что $\alpha_к$ и α равны. Применительно к данной задаче получим плотность диэлектрика $\rho_0 = \rho\frac{\varepsilon\sin^2\alpha\cdot tg\alpha}{\varepsilon\sin^2\alpha\cdot tg\alpha - \sin^2\alpha tg\alpha}$ или $\rho_0 = \frac{\rho\varepsilon}{\varepsilon - 1}$.

9.18. На рисунке AA — заряженная бесконечная плоскость с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 40$ мкКл/м^2 и B — одноименно заряженный шарик с массой $m = 1$ г и зарядом $q = 1$ нКл. Какой угол α с плоскостью AA образует нить, на которой висит шарик?

Решение:



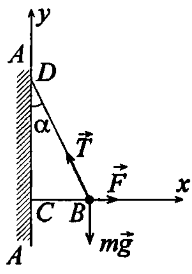
Заряженный шарик находится в электрическом поле плоскости AA. Напряженность поля $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$. На шарик действуют три силы: электростатическая сила $\vec{F}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Условие равновесия шарика $\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0$ или в проекциях на ось x: $F - T\sin\alpha = 0$ — (1), на ось y: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (2). Электростатическая сила $F = Eq = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$ — (3). Из (2) найдем $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$. Подставляя это выражение в (1), получим

$F = mg tg\alpha$ — (4). Приравнивая правые части (3) и (4), найдем $\dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = mg tg\alpha$, откуда $tg\alpha = \dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon mg}$; $tg\alpha = 0{,}23$; $\alpha = 13°$.

9.19. На рисунке AA — заряженная бесконечная плоскость и B — одноименно заряженный шарик с массой $m = 0{,}4$ мг и зарядом $q = 667$ пКл. Сила натяжения нити, на которой висит шарик, $T = 0{,}49$ мН. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости AA.

Решение:

Плоскость и шарик заряжены одноименно, поэтому на шарик действует электростатическая сила отталкивания $\vec{F}$. Кроме того, на шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Нить отклоняется от вертикали до тех пор, пока все силы, действующие на шарик, не уравновесят друг друга. Запишем условие равновесия $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{T} = 0$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CDB имеем $F = \sqrt{T^2 - (mg)^2}$. Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$, с другой стороны, $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$ или $E = \dfrac{F}{q}$. Тогда $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{F}{q}$ или $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{\sqrt{T^2 - (mg)^2}}{q}$. Отсюда поверхностная плотность заряда плоскости AA. $\sigma = \dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{T^2 - (mg)^2}}{q} =$



$= 7{,}8 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

9.20. Найти силу F, действующую на заряд $q = 2$ СГС$_q$, если заряд помещен: а) на расстоянии $r = 2$ см от заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau = 0{,}2$ мкКл/м; б) в поле заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 20$ мкКл/м^2; в) на расстоянии $r = 2$ см от поверхности заряженного шара с радиусом $R = 2$ см и поверхностной плотностью заряда $\sigma = 20$ мкКл/м^2. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 6$.

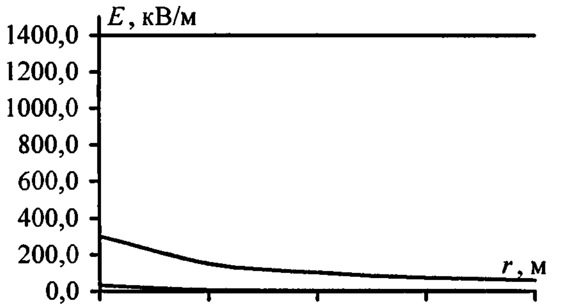
Решение:

Переведем единицы измерения заряда в СИ: $q = 2\text{СГС}_q \approx$ $\approx 2 \cdot 3{,}336 \cdot 10^{-10}$ Кл. а) Напряженность электрического поля заряженной нити $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$, следовательно, на заряд q действует электростатическая сила $F = Eq = \dfrac{\tau q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$; $F = 20{,}1$ мкН. б) Аналогично для заряженной плоскости $F = \dfrac{\sigma q}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 126$ мкН. в) Напряженность электрического поля заряженного шара $E = \dfrac{q_ш}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, где заряд шара $q = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$. Тогда $E = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, а сила, действующая на заряд, $F = \dfrac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 (r+R)^2} = 63$ мкН.

9.21. Построить на одном графике кривые зависимости напряженности E электрического поля от расстояния r в интервале $1 \le r \le 5$ см через каждый 1 см, если поле образовано: а) точечным зарядом $q = 33{,}3$ нКл; б) бесконечно длинной заряженной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 1{,}67$ мкКл/м; в) бесконечно протяженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 25$ мкКл/м^2.

Решение:

а) Напряженность электрического поля точечного заряда $E = q / 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2$. Подставляя числовые данные, получим $E = \dfrac{300}{r^2}$ В/м. б) Для нити $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{30 \cdot 10^3}{r}$ В/м. в) Для плоскости $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 1{,}4 \cdot 10^6$ В/м. Зависимость E от r приведена на графике.



r, м	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
E, кВ/м — точ. заряда	30,0	7,5	3,3	1,9	1,2
E, кВ/м — нити	300	150	100	75	60
E, кВ/м — плоскости	1400	1400	1400	1400	1400

9.22. Найти напряженность E электрического поля на расстоянии $r = 0{,}2$ нм от одновалентного иона. Заряд иона считать точечным.

Решение:

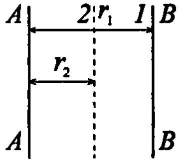
Одновалентный ион создает электрическое поле с напряженностью $E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$. Заряд одновалентного иона равен по абсолютной величине заряду электрона. Подставив числовые данные, получим $E = 36$ ГВ/м.

9.23. С какой силой F_l электрическое поле заряженной бесконечной плоскости действует на единицу длины заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле? Линейная плотность заряда на нити $\tau = 3$ мкКл/м и поверхностная плотность заряда на плоскости $\sigma = 20$ мкКл/м^2.

Решение:

Напряженность поля бесконечной заряженной нити $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$. С другой стороны, $E = \frac{F}{q}$, где $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{F}{\tau \cdot l}$. Отсюда сила, действующая на единицу длины нити, $F_l = \frac{F}{l} = \frac{\sigma\tau}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 3{,}4$ Н/м.

9.24. С какой силой F_l на единицу длины отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно длинные нити с одинаковой линейной плотностью заряда $\tau = 3$ мкКл/м, находящиеся на расстоянии $r_1 = 2$ см друг от друга? Какую работу A_l на единицу длины надо совершить, чтобы сдвинуть эти нити до расстояния $r_2 = 1$ см?



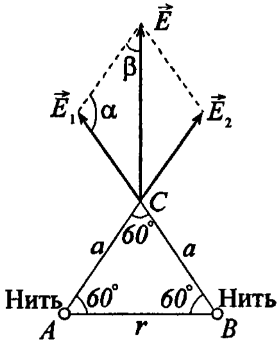
Решение:

Напряженность поля бесконечной заряженной нити $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}$ — (1). С другой стороны, $\bar{E} = \dfrac{\bar{F}}{q}$ — (2), где $\bar{F}$ — сила электростатического отталкивания; $q = \tau l$. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} = \dfrac{F}{\tau l}$. Тогда сила, приходящаяся на единицу длины нити, $F_l = \dfrac{F}{l} = \dfrac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} = 8{,}1$ Н/м. Для уменьшения расстояния между нитями нужно совершить работу A против сил поля $A = -A'$, где A' — работа сил электростатического поля нити AA при перемещении нити BB из точки 1 в точку 2 (нить AA при этом остается неподвижна). Т. к. электростатическая сила изменяется с расстоянием, то $A = -A' = -\int\limits_{r_1}^{r_2} F(r)dr$. Работа, приходящаяся на единицу длины, $A_l = -\int\limits_{r_1}^{r_2} F_l(r)dr$; $A_l = -\int\limits_{r_1}^{r_2} \dfrac{\tau^2 dr}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = -\dfrac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \times$ $\times \ln\dfrac{r_2}{r_1} = 0{,}112$ Дж/м.

9.25. Две длинные одноименно заряженные нити расположены на расстоянии $r = 10$ см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях $\tau_1 = \tau_2 = 10$ мкКл/м. Найти модуль и направление напряженности $\vec{E}$ результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $a = 10$ см от каждой нити.

Решение:

Пусть $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, следовательно напряженность поля каждой нити в точке C: $E_1 = E_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$. Тогда согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность поля $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$. Т. к. по условию $r=a$, то треугольник ABC — равносторонний, $\angle ACB=60°$. Прямая, на которой лежит вектор $\bar{E}$, перпендикулярна плоскости, проходящей через обе нити. По теореме синусов $\frac{E}{sin\alpha}=\frac{E_1}{sin\beta}$, где



$\alpha=120°$, $\beta=30°$, т. е. $E=\sqrt{3}E_1$;

$E=\frac{\sqrt{3}\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a}=3{,}12$ МВ/м.

9.26. С какой силой F_S на единицу площади отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяженные плоскости? Поверхностная плотность заряда на плоскостях $\sigma=0{,}3$ мКл/м^2.

Решение:

Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$. С другой стороны, $E=\frac{F}{q}$, где $q=\tau S$. Приравняем $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}=\frac{F}{\tau\cdot S}$, отсюда сила, действующая на единицу площади плоскости, $F_S=\frac{F}{S}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}=5{,}1$ Н/м.

9.27. Медный шар радиусом $R=0{,}5$ см помещен в масло. Плотность масла $\rho_м=0{,}8\cdot10^3$ кг/м^3. Найти заряд q шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле. Электрическое поле направлено вертикально вверх и его напряженность $E = 3{,}6$ МВ/м.

Решение:

На шар действуют три силы: электростатическая сила $\vec{F}$ (вверх), сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз) и сила Архимеда $\vec{F}_\text{А}$ (вверх). Запишем уравнение равновесия: $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_\text{А} = 0$ или в скалярном виде $mg = F + F_\text{А}$ — (1). Здесь $mg = \dfrac{4\pi R^3 g\rho}{3}$, $F = Eq$, $F_\text{А} = \dfrac{4\pi R^3 g\rho_\text{м}}{3}$ — (2), где ρ и $\rho_\text{м}$ — соответственно плотности меди и масла. Из (1) и (2) имеем $q = \dfrac{4\pi R^3 g(\rho - \rho_\text{м})}{3E} = 11$ нКл.

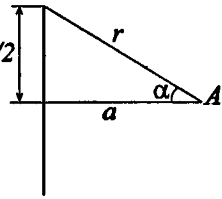
9.28. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля $E = 60$ кВ/м. Заряд капли $q = 2{,}4 \cdot 10^{-9}$ СГС$_q$. Найти радиус R капли.

Решение:

На капельку ртути в конденсаторе действует электростатическая сила $\vec{F}$ (вверх) и сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз), которые уравновешивают друг друга, т. е. $\vec{F} + m\vec{g} = 0$ или $F = mg$. Масса капли $m = \rho V = \dfrac{3}{4}\pi r^3 \rho$. Сила $\vec{F} = \vec{E}q$. Тогда $Eq = \rho \dfrac{4}{3}\pi r^3 g$, откуда $r = \sqrt[3]{\dfrac{3Eq}{4\rho\pi g}} = 0{,}44$ мкм.

9.29. Показать, что электрическое поле, образованное заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

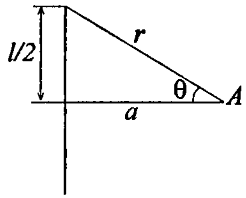
Решение:



Напряженность поля нити конечной длины $E = \frac{\tau \sin\alpha}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (1). Из рисунка найдем $\sin\alpha = \frac{l/2}{\sqrt{a^2 + (l/2)^2}}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $E = \frac{\tau \cdot l}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a\sqrt{a^2 + (l/2)^2}}$ — (3). а) Если $a \ll l$, то $\sqrt{a^2 + (l/2)^2} \approx \frac{l}{2}$. В этом случае формула (3) дает $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — напряженность поля бесконечно длинной нити. б) Если $a \gg l$, то $\sqrt{a^2 + (l/2)^2} \approx a$. Т. к. $\tau \cdot l = q$, то формула (3) дает $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2}$ — напряженность поля точечного заряда.

9.30. Длина заряженной нити $l = 25$ см. При каком предельном расстоянии a от нити по нормали к середине нити электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно длинной заряженной нити? Ошибка при таком допущении не должна превышать $\delta = 0{,}05$. Указание: допускаемая ошибка $\delta = \frac{(E_2 - E_1)}{E_2}$, где E_2 — напряженность электрического поля бесконечно длинной нити, E_1 — напряженность поля нити конечной длины.

Решение:



Бесконечно длинная заряженная нить создает электрическое поле с напряженностью $E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (1). Напряженность поля нити конечной длины $E_2 = \frac{\tau \sin\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (2). Допускаемая ошибка $\delta = \frac{E_1 - E_2}{E_1}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\delta = 1 - \sin\theta$, откуда $\sin\theta = 1 - \delta$. Из рисунка видно, что $\frac{l}{2} = r\sin\theta = r(1-\delta)$, где $r = \frac{a}{\cos\theta} = \frac{a}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} =$ $= \frac{a}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. Тогда $\frac{l}{2} = \frac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$, откуда предельное расстояние $a = \frac{l\sqrt{1-(1-\delta)^2}}{2(1-\delta)} = 4{,}11$ см.

9.31. В точке A, расположенной на расстоянии $a = 5$ см от бесконечно длинной заряженной нити, напряженность электрического поля $E = 150$ кВ/м. При какой предельной длине l нити найденное значение напряженности будет верным с точностью до 2%, если точка A расположена на нормали к середине нити? Какова напряженность E электрического поля в точке A, если длина нити $l = 20$ см? Линейную плотность заряда на нити конечной длины считать равной линейной плотности заряда на бесконечно длинной нити. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

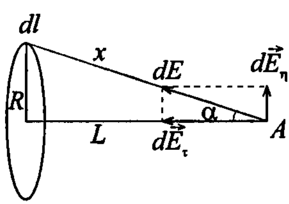
Решение:

Воспользуемся формулой, полученной в предыдущей задаче: $\frac{l}{2} = \frac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. По условию $\delta = 0{,}02$, тогда предельное значение $l = \frac{2a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}} = 0{,}49$ м. Напряженность поля в точке A при $l = 0{,}2$ м найдем по формуле $E' = \frac{\tau \sin\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (1). Линейную плотность заряда τ найдем из уравнения $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$, откуда $\tau = E2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a = 0{,}42$ мкКл/м. Значение $\sin\theta$ (см. рисунок к предыдущей задаче) найдем, вычислив $tg\theta = \frac{l}{2a}$, откуда $tg\theta = 2$, следовательно, $\theta \approx 63°$; $\sin\theta = 0{,}89$. Подставляя числовые данные в (1), найдем $E' = 134$ кВ/м.

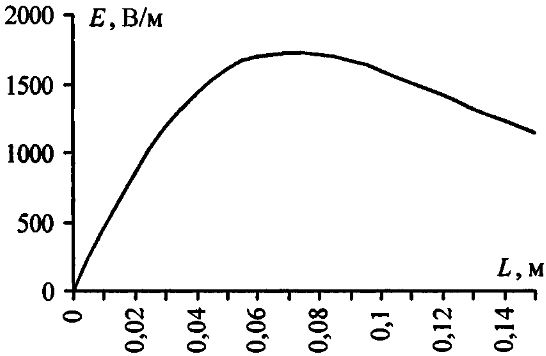
9.32. Кольцо из проволоки радиусом $R = 10$ см имеет отрицательный заряд $q = -5$ нКл. Найти напряженности E электрического поля на оси кольца в точках, расположенных от центра кольца на расстояниях L, равных 0, 5, 8, 10 и 15см. Построить график $E = f(L)$. На каком расстоянии L от центра кольца напряженность E электрического поля будет иметь максимальное значение?

Решение:

Возьмем элемент кольца dl. Этот элемент имеет заряд dq. Напряженность электрического поля, созданная этим элементом в точке A, будет $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$. Вектор $d\vec{E}$ направлен по линии x, соединяющей точку A с элементом кольца dl. Для нахождения напряженности поля всего кольца надо векторно сложить $d\vec{E}$ от всех элементов. Вектор dE можно разложить на две составляющие dE_n и dE_τ. Составляющие dE_n



каждых двух диаметрально расположенных элементов взаимно уничтожаются, поэтому $E=\int dE_\tau$. Но $dE_\tau = dE\cos\alpha = dE\dfrac{L}{x}=\dfrac{Ldq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$, что дает $E=\dfrac{L}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}\times$ $\times\int dq=\dfrac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}$. Учитывая, что $x=\sqrt{R^2+L^2}$, имеем $E=\dfrac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2+L^2\right)^{3/2}}$ — (1) — напряженность электрического поля на оси кольца. Если $L>>R$, то $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L^2}$, т. е. на больших расстояниях заряженное кольцо можно рассматривать как точечный заряд.



Выразим величины x и L через угол α. Имеем $R=x\sin\alpha$, $L=x\cos\alpha$; теперь формула (1) примет вид $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha\sin^2\alpha$. Для нахождения максимального значения напряженности E возьмем производную $\dfrac{dE}{d\alpha}$ и приравняем ее к нулю: $\dfrac{dE}{d\alpha}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\left(\cos^2\alpha 2\sin\alpha-\sin^3\alpha\right)=$ $=0$ или $tg^2\alpha=2$. Тогда напряженность электрического поля имеет максимальное значение в точке A, расположенной на расстоянии $L = \frac{R}{tg\alpha} = \frac{R}{\sqrt{2}} = 7{,}1$ см от центра кольца. Подставляя в (1) числовые данные, составим таблицу и построим график.

L, м	0	0,05	0,08	0,1	0,15
E, В/м	0	1600	1710	1600	1150

9.33. Напряженность электрического поля на оси заряженного кольца имеет максимальное значение на расстоянии L от центра кольца. Во сколько раз напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии $0{,}5L$ от центра кольца, будет меньше максимального значения напряженности?

Решение:

Воспользуемся результатами задачи 9.32. Напряженность электрического поля на оси кольца $E = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Максимальное значение напряженность поля имеет при $L_{max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Отсюда $E_{max} = \frac{Rq}{\sqrt{2} \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2 + R^2/2\right)^{\frac{3}{2}}}$. В точке, расположенной на расстоянии $0{,}5L_{max}$ от центра кольца, напряженность $E_{max} = \frac{Rq}{2\sqrt{2} \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2 + R^2/2\right)^{\frac{3}{2}}}$, отсюда $\frac{E_{max}}{E} = 1{,}3$.

9.34. Показать, что электрическое поле, образованное заряженным диском, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечной заряженной плоскости; б) точечного заряда.

Решение:

Напряженность электрического поля заряженного диска $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+(R/a)^2}}\right)$. а) Если величина $a \ll R$, то $1-\frac{1}{\sqrt{1+(R/a)^2}}\approx 1$. В этом случае $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, т. е. для точек, находящихся на близком расстоянии от диска, диск можно уподобить бесконечно протяженной плоскости. б) Если $a \gg R$, и $\sqrt{1+\left(\frac{R}{a}\right)^2}=1-\frac{R^2}{2a^2}$. В этом случае $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\times$ $\times\frac{R^2}{2a^2}$. Т. к. $\sigma=\frac{q}{\pi R^2}$, то $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2}$, т. е. для точек, находящихся на большом расстоянии от диска, диск можно уподобить точечному заряду.

9.35. Диаметр заряженного диска $D=25$ см. При каком предельном расстоянии a от диска по нормали к его центру электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно протяженной плоскости? Ошибка при таком допущении не должна превышать $\delta=0{,}05$. Указание: допускаемая ошибка $\delta=(E_2-E_1)/E_2$, где E_1 — напряженность поля бесконечно протяженной плоскости, E_2 — напряженность поля диска.

Решение:

Напряженность поля диска $E_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$ — (1).

Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ — (2). Допускаемая ошибка $\delta=\frac{E_2-E_1}{E_2}$ — (3).

Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\delta=\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}$ или

$\delta = \dfrac{1}{\sqrt{1+(R/a)^2}}$. Откуда $\left(\dfrac{R}{a}\right)^2 = \dfrac{1}{\delta^2} - 1$; $\dfrac{R}{a} = \dfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$.

$a = \dfrac{\delta R}{\sqrt{1-\delta^2}}$. Подставляя числовые данные, получим предельное расстояние $a = 1{,}2$ см.

9.36. Требуется найти напряженность E электрического поля в точке A, расположенной на расстоянии $a = 5$ см от заряженного диска по нормали к его центру. При каком предельном радиусе R диска поле в точке A не будет отличаться более чем на 2% от поля бесконечно протяженной плоскости? Какова напряженность E поля в точке A, если радиус диска $R = 10a$? Во сколько раз найденная напряженность в этой точке меньше напряженности поля бесконечно протяженной плоскости?

Решение:

Напряженность поля, образованного заряженной бесконечно протяженной плоскостью, $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Напряженность поля заряженного диска радиусом R в точке A: $E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$. По условию $\dfrac{E_1 - E_2}{E_1} = 0{,}02$. Подставив выражения E_1 и E_2, получим $\dfrac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} = 0{,}02$.

После несложных вычислений найдем $R = 2{,}5$ м. При $R = 10a$ напряженность поля в точке A $E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{100a^2+a^2}}\right) = 0{,}9\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Тогда $\dfrac{E_1}{E_2} = 1{,}1$*.

---

* По мнению авторов, в условии задачи не хватает данных для нахождения величины напряженности E поля в точке A при радиусе диска $R = 10a$.

9.37. Два параллельных разноименно заряженных диска с одинаковой поверхностной плотностью заряда на них расположены на расстоянии $d = 1$ см друг от друга. Какой предельный радиус R могут иметь диски, чтобы между центрами дисков поле отличалось от поля плоского конденсатора не более чем на 5%? Какую ошибку δ мы допускаем, принимая для этих точек напряженность поля равной напряженности поля плоского конденсатора при $\frac{R}{d} = 10$?

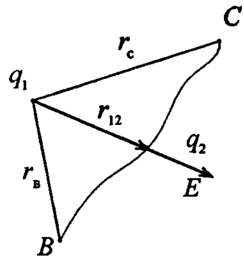
Решение:

Напряженность поля между центрами двух разноименно заряженных дисков $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$ — (1), где d — расстояние между дисками. Напряженность плоского конденсатора $E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ — (2). По условию отношение $\frac{E_2 - E_1}{E_2} = 0{,}05$ — (3). Подставляя уравнения (1) и (2) в (3), получим $\frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} = 0{,}05$. Отсюда $R = 0{,}2$ м. Теперь определим ошибку δ при $\frac{R}{d} = 10$. Т. к. $\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}$, то при $R = 10d$ — $\delta = 0{,}1$ или $\delta = 10\%$.

9.38. Шарик массой $m = 40$ мг, имеющий положительный заряд $q = 1$ нКл, движется со скоростью $v = 10$ см/с. На какое расстояние r может приблизиться шарик к положительному точечному заряду $q_0 = 1{,}33$ нКл?

Решение:

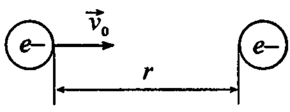
Если в поле неподвижного заряда q_1 происходит медленное перемещение заряда q_2 из точки B в точку C, то работа сил поля $A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right)$.



Если $r_B \to \infty$, то $r_C = r_{12}$ и $A = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}$ (т. е. появился знак «минус»). Работа консервативных сил электрического поля равна убыли потенциальной энергии системы заряженных тел, т. е. $A = -(U_{12} - U_\infty)$. Поэтому полагая энергию взаимодействия бесконечно удаленных зарядов равной нулю, получим для потенциальной энергии взаимодействия системы двух зарядов $U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}}$. Во время движения шарика его кинетическая энергия $W_{к1} = \frac{mv^2}{2}$, при приближении к заряду q_2 на предельное расстояние r_{12} кинетическая энергия $W_{к2} = 0$. Работа $A_{12} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}$; $A = W_{к1} - W_{к2} = -\frac{mv^2}{2}$. Таким образом, $\frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $r_{12} = \frac{2q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 mv^2}$; $r_{12} = r = 6$ см.

9.39. До какого расстояния r могут сблизиться два электрона, если они движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $v_0 = 10^6$ м/с?

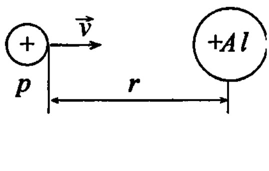
Решение:



Т. к. v_0 — относительная скорость движения электронов, то один электрон можно считать неподвижным, а другой — движущимся относительно первого со скоростью v_0. По формуле потенциала поля точечного заряда потенциал поля, создаваемого электроном, который мы считаем неподвижным, на расстоянии r от него $\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Кинетическая энергия движущегося электрона $W_к = mv_0^2/2$ тратится на работу против кулоновской силы отталкивания $A = e\varphi = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Тогда по закону изменения энергии $W_к = A$ или $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, откуда $r = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} = 5 \cdot 10^{-10}$ м.

9.40. Протон (ядро атома водорода) движется со скоростью $v = 7{,}7 \cdot 10^6$ м/с. На какое наименьшее расстояние r может приблизиться протон к ядру атома алюминия? Заряд ядра атома алюминия $q = Ze$, где Z — порядковый номер атома в таблице Менделеева и e — заряд протона, равный по модулю заряду электрона. Массу протона считать равной массе атома водорода. Протон и ядро атома алюминия считать точечными зарядами. Влиянием электронной оболочки атома алюминия пренебречь.

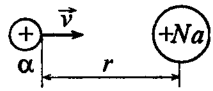
Решение:



Ядро атома алюминия считаем неподвижным. Т. к. по условию ядро алюминия — точечный заряд, то потенциал поля ядра алюминия $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Тогда по закону изменения энергии (см. задачу 9.39) $\frac{mv^2}{2} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, откуда $r = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m v^2} = 6{,}1 \cdot 10^{-14}$ м.

9.41. При бомбардировке неподвижного ядра натрия α-частицей сила отталкивания между ними достигла значения $F = 140$ Н. На какое наименьшее расстояние r приблизилась α-частица к ядру атома натрия? Какую скорость v имела α-частица? Влиянием электронной оболочки атома натрия пренебречь.

Решение:



Потенциал поля ядра натрия (см. задачу 9.40) $\varphi = \dfrac{Z_1 e}{4\pi\varepsilon_0 r}$. По закону Кулона сила отталкивания между ядром натрия и α-частицей $F = \dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где $Z_2 = 2$, т. к. α-частица представляет собой ядро атома гелия. Отсюда минимальное расстояние сближения ядра и α-частицы $r = \dfrac{e}{2}\sqrt{\dfrac{Z_1 Z_2}{\pi\varepsilon_0 F}} = 6{,}01\cdot 10^{-15}$ м. По закону изменения энергии (см. задачу 9.39) $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{Z_1 e^2}{4\pi e_0 r}$, откуда скорость α-частицы $v = \sqrt{\dfrac{e^2 Z_1}{2\pi\varepsilon_0 r m}} = 1{,}59\cdot 10^7$ м/с.

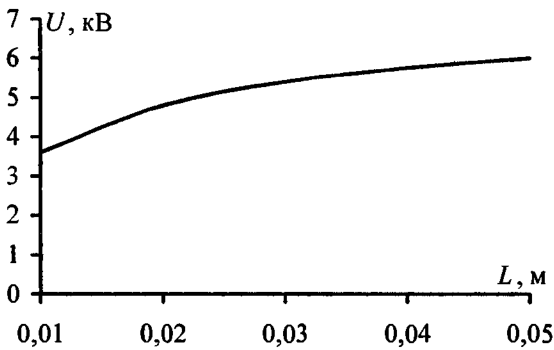
9.42. Два шарика с зарядами $q_1 = 6{,}66$ нКл и $q_2 = 13{,}33$ нКл находятся на расстоянии $r_1 = 40$ см. Какую работу A надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $r_2 = 25$ см?

Решение:

Энергия электростатического взаимодействия шариков $W = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Для сближения шариков нужно совершить работу $A = \Delta W = W_2 - W_1$. Поскольку $W_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}$, а $W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2}$, то $A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 1{,}2$ мкДж.

9.43. Шар радиусом $R = 1$ см, имеющий заряд $q = 40$ нКл, помещен в масло. Построить график зависимости $U = f(L)$ для точек поля, расположенных от поверхности шара на расстояниях L, равных 1, 2, 3, 4 и 5см.

Решение:



Будем считать, что заряд q равномерно распределен по поверхности шара. Разность потенциалов $U = \varphi_0 - \varphi_1$, где φ_0 — потенциал шара на его поверхности, φ_1 — потенциал поля в точке, находящейся на расстоянии L от поверхности шара; $\varphi_0 = \int_R^\infty E_r dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$. Аналогично $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R+L)}$, отсюда $U = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L}\right)$.

Характер зависимости $U(L)$ дан на графике.

L, м	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
U, кВ	3,6	4,8	5,4	5,76	6

9.44. Найти потенциал φ точки поля, находящейся на расстоянии $r = 10$ см от центра заряженного шара радиусом $R = 1$ см. Задачу решить, если: а) задана поверхностная плотность заряда на шаре $\sigma = 0{,}1$ мкКл/м^2; б) задан потенциал шара $\varphi = 300$ В.

Решение:

Имеем $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$ (см. задачу 9.43). а) Поскольку $q = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$, то $\varphi = \dfrac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r}$; $\varphi = 11{,}3$ В. б) Потенциал шара $\varphi_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$, откуда $q = 4\pi\varphi_0\varepsilon\varepsilon_0 R$. Тогда $\varphi = \dfrac{4\pi\varphi_0\varepsilon\varepsilon_0 R}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{\varphi_0 R}{r}$; $\varphi = 30$ В.

9.45. Какая работа A совершается при перенесении точечного заряда $q = 20$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 1$ см от поверхности шара радиусом $R = 1$ см с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10$ мкКл/м^2?

Решение:

Работа по перемещению точечного заряда q из бесконечности в некоторую точку M есть потенциал точки M, следовательно, $A = \varphi_M = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R + r)}$. Поскольку $q_0 = \sigma 4\pi R^2$, то $A = \dfrac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(R + r)}$; $A = 113$ мкДж.

9.46. Шарик с массой $m = 1$ г и зарядом $q = 10$ нКл перемешается из точки 1, потенциал которой $\varphi_1 = 600$ В, в точку 2, потенциал которой $\varphi_2 = 0$. Найти его скорость v_1 в точке 1, если в точке 2 она стала равной $v_2 = 20$ см/с.

Решение:

Работа по перемещению шарика из точки 1 в точку 2 равна $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. С другой стороны, работа A равна приращению его кинетической энергии: $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$. Следовательно, $q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$. Отсюда $v_1 = \sqrt{v_2^2 - \frac{2q(\varphi_1 - \varphi_2)}{m}}$; $v_1 = 16{,}7$ см/с.

9.47. Найти скорость v электрона, прошедшего разность потенциалов U, равную: 1, 5, 10, 100, 1000 В.

Решение:

Работа по перемещению электрона из точки 1 в точку 2 равна $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{U}{q}$, с другой стороны, работа A равна приращению его кинетической энергии $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$. Если $v_1 = 0$, то $A = \frac{mv_2^2}{2}$. Тогда $U = \frac{mv_2^2}{2e}$, где e — заряд электрона, m — его масса (см. таблицу 3), откуда $v_2 = \sqrt{\frac{2Ue}{m}}$. Составим таблицу искомых значений.

U, В	1	5	10	100	1000
v, 10^6 м/с	0,59	1,33	1,88	5,93	18,75

9.48. При радиоактивном распаде из ядра атома полония вылетает α-частица со скоростью $v = 1{,}6 \cdot 10^7$ м/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ α-частицы и разность потенциалов U поля, в котором можно разогнать покоящуюся α-частицу до такой же скорости.

Решение:

Кинетическая энергия α-частицы $W_к = \frac{m_\alpha v^2}{2}$. Учитывая, что $m_\alpha = 4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг, получим $W_к = 8{,}5 \times \times 10^{-13}$ Дж. Искомая разность потенциалов $U = \frac{W_к}{q}$ (см. задачу 9.47). Поскольку заряд α-частицы $q = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$, то, подставляя числовые значения, получим $U = 2{,}66$ МВ.

9.49. На расстоянии $r_1 = 4$ см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд $q = 0{,}66$ нКл. Под действием поля заряд приближается к нити до расстояния $r_2 = 2$ см; при этом совершается работа $A = 50$ эрг. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Решение:

Работа по перемещению заряда $dA = q dU$, где $dU = = -E dr = \frac{\tau dr}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Отсюда $A = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{q\tau dr}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} ln\frac{r_1}{r_2}$, откуда $\tau = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 A}{q\, ln(r_1 / r_2)}$ — (1). Подставляя числовые данные, получим $\tau = 0{,}6$ мкКл/м.

9.50. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии $r_1 = 1$ см от нити, до точки $r_2 = 4$ см, α-частица изменила свою скорость от $v_1 = 2 \cdot 10^5$ м/с до $v_2 = 3 \cdot 10^6$ м/с. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Решение:

Имеем $\tau = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 A}{q\,ln(r_1 / r_2)}$ — (1) (см. задачу 9.49). Здесь работа сил поля A равна приращению кинетической энергии α-частицы, т. е. $A = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} = 29{,}57 \cdot 10^{-15}$ Дж. Подставляя числовые данные в (1), найдем $\tau = 3{,}7$ мкКл/м.

9.51. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 0{,}2$ мКл/м. Какую скорость v получит электрон под действием поля, приблизившись к нити с расстояния $r_1 = 1$ см до расстояния $r_2 = 0{,}5$ см?

Решение:

Если скорость электрона в точке 1 была равна нулю, то работа сил поля по перемещению электрона в точку 2: $A = \dfrac{mv^2}{2}$ — (1). Из задачи 9.49 имеем $\tau = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 A}{q\,ln(r_1 / r_2)}$ — (2).

Подставляя (1) в (2), получим $\tau = \dfrac{\pi\varepsilon\varepsilon_0 mv^2}{q\,ln(r_1 / r_2)}$, откуда $v = \sqrt{\dfrac{\tau q\,ln(r_1 / r_2)}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 m}}$; $v = 2{,}96 \cdot 10^7$ м/с.

9.52. Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд $q = 0{,}66$ нКл. Заряд перемещается по линии напряженности поля на расстояние $\Delta r = 2$ см; при этом совершается работа $A = 50$ эрг. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости.

Решение:

Переведем единицы измерения работы A в систему СИ: $A = 50\,\text{эрг} = 50 \cdot 10^{-7}$ Дж. Напряженность поля бесконечно заряженной плоскости $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ — (1). Кроме того, напряженность и потенциал однородного поля связаны соотношением $E = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta r}$ — (2). Приравняв (1) и (2), получим $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta r}$ — (3). Работа сил поля $A = \dfrac{q\sigma\Delta r}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = \dfrac{2A\varepsilon\varepsilon_0}{q\Delta r} = 6{,}7$ мкКл/м^2.

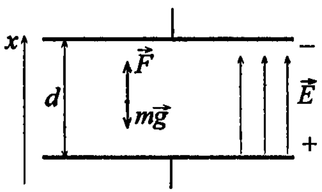
9.53. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора $U = 90$ В. Площадь каждой пластины $S = 60$ см^2, ее заряд $q = 1$ нКл. На каком расстоянии d друг от друга находятся пластины?

Решение:

Напряженность поля плоского конденсатора $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ — (1). С другой стороны, $E = \dfrac{U}{d}$ — (2). Приравняв (1) и (2), с учетом $\sigma = \dfrac{q}{S}$, получим $\dfrac{q}{S\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{U}{d}$, откуда $d = \dfrac{US\varepsilon\varepsilon_0}{q} = 4{,}78$ мм.

9.54. Плоский конденсатор можно применить в качестве чувствительных микровесов. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого $d = 3{,}84$ мм, находится заряженная частица с зарядом $q = 1{,}44 \cdot 10^{-9}$ СГС$_q$. Для того чтобы частица находилась в равновесии, между пластинами конденсатора, нужно было приложить разность потенциалов $U = 40$ В. Найти массу m частицы.

Решение:



Со стороны электрического поля на капельку действует сила $\vec{F} = \vec{E}q$, которая уравновешивается силой тяжести $m\vec{g}$. Т. к. $\vec{E}q + m\vec{g} = 0$ или $Eq = mg$. Напряженность поля плоского конденсатора $E = \frac{U}{d}$. Тогда $\frac{Uq}{d} = mg$, откуда $m = \frac{Uq}{dg} =$ $= 5{,}1 \cdot 10^{-16}$ кг.

9.55. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого $d = 1$ см, находится заряженная капелька массой $m = 5 \cdot 10^{-11}$ г. В отсутствие электрического поля капелька вследствие сопротивления воздуха падает с некоторой постоянной скоростью. Если к пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 600$ В, то капелька падает вдвое медленнее. Найти заряд q капельки.

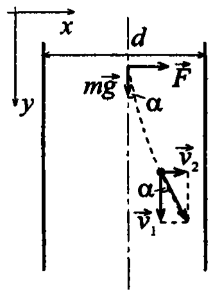
Решение:

В отсутствие электрического поля сила тяжести, действующая на капельку, уравновешивается силой сопротивления воздуха $mg = 6\pi\eta r v_1$ — (1), а при наличии поля $mg - Eq = 6\pi\eta r v_2$ — (2). Из (1) и (2) получим $mg - Eq =$

$= \frac{v_2}{v_1} mg$, откуда $q = \frac{mg}{E}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = \frac{mgd}{U}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = 4{,}1 \times$ $\times 10^{-18}$ Кл.

9.56. Между двумя вертикальными пластинами на одинаковом расстоянии от них падает пылинка. Вследствие сопротивления воздуха пылинка падает с постоянной скоростью $v_1 = 2$ см/с. Через какое время t после подачи на пластины разности потенциалов $U = 3$ кВ пылинка достигнет одной из пластин? Какое расстояние l по вертикали пылинка пролетит до попадания на пластину? Расстояние между пластинами $d = 2$ см, масса пылинки $m = 2 \cdot 10^{-9}$ г, ее заряд $q = 6{,}5 \cdot 10^{-17}$ Кл.

Решение:

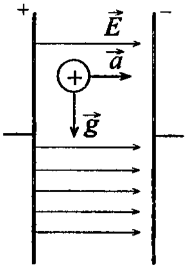


В отсутствие электрического поля $mg = 6\pi\eta r v_1$ — (1). При наличии поля на пылинку действует горизонтальная сила $\vec{F} = q\vec{E}$, которая сообщает пылинке ускорение, но из-за сопротивления воздуха в горизонтальном направлении также установится движение с некоторой постоянной скоростью v_2, причем $qE = 6\pi\eta r v_2$ — (2). Из рисунка видно, что $tg\alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{qE}{mg}$. Кроме того, отношение $\frac{v_2}{v_1} = 0{,}5\frac{d}{l}$, откуда $l = 0{,}5 v_1 \frac{d}{v_2} = 0{,}5 mg \frac{d}{qE} = 2$ см. Тогда $v_2 = \frac{v_1 d}{2l} = 1$ см/с.

Искомое время найдем по формуле $t = \frac{l}{v_1}$. Подставляя числовые данные, получим $t = 1$ с.

9.57. Решить предыдущую задачу в отсутствие силы сопротивления воздуха (вакуумный конденсатор).

Решение:



В отсутствие электрического поля и силы сопротивления воздуха пылинка движется вертикально вниз со скоростью $v_1 = gt$, где $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения. После включения электрического поля за счет подачи на пластины конденсатора разности потенциалов U на пылинку будет действовать кулоновская сила F, направленная горизонтально, $F = qE$. Т. к. напряженность поля плоского конденсатора $E = \dfrac{U}{d}$, то сила $F = \dfrac{qU}{d}$ — (1). По второму закону Ньютона $F = ma$ — (2). Приравняем правые части уравнений (1) и (2): $\dfrac{qU}{d} = ma$, отсюда горизонтальное ускорение частицы $a = \dfrac{qU}{dm}$ — (3), а ее скорость $v_2 = at = \dfrac{qUt}{dm}$. Перемещение частицы в горизонтальном направлении $\dfrac{d}{2} = \dfrac{at^2}{2}$ или $d = at^2$ — (4). Решая совместно уравнения (3) и (4), найдем время движения частицы $t = \sqrt{\dfrac{d}{a}} = \sqrt{\dfrac{d^2 m}{qU}} = 64$ мс. Расстояние, пройденное частицей по вертикали, $l = \dfrac{gt^2}{2} = 2$ см.

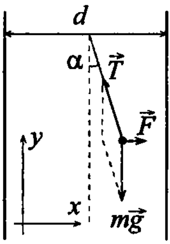
9.58. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого $d = 1$ см, находится заряженная капелька масла. В отсутствие электрического поля капелька падает с постоянной скоростью $v_1 = 0{,}11$ мм/с. Если на пластины подать разность потенциалов $U = 150$ В, то капелька падает со скоростью $v_2 = 0{,}43$ мм/с. Найти радиус r капельки и ее заряд q. Динамическая вязкость воздуха $\eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ Па·с; плотность масла больше плотности газа, в котором падает капелька, на $\Delta\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:

В отсутствие электрического поля на каплю действует сила тяжести, сила Архимеда и сила внутреннего трения Стокса. Т. к. скорость капли постоянна, то $mg - F_А = 6\pi\eta r v_1$ — (1). При наличии поля к указанным силам добавится кулоновская сила, тогда $mg - F_А + qE = 6\pi\eta r v_2$ — (2). В первом приближении каплю можно считать шаром, поэтому ее объем $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, а следовательно, масса $m = \rho_м V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_м$. По закону Архимеда $F_А = \rho_в V g = \frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_в$. Тогда уравнения (1) и (2) можно переписать следующим образом: $\frac{4}{3}\pi r^3 g\Delta\rho = 6\pi\eta r v_1$ — (3); $\frac{4}{3}\pi r^3 g\Delta\rho + \frac{qU}{d} = 6\pi\eta \times$ $\times r v_2$ — (4). Из уравнения (3) найдем радиус капли $r = \sqrt{\frac{9\eta v_1}{2g\Delta\rho}} = 1{,}12 \cdot 10^{-7}$ м. Разделив (4) на (3), имеем $1 + \frac{3qU}{4\pi r^3 g\Delta\rho} = \frac{v_2}{v_1}$, отсюда заряд капли $q = \frac{4\pi r^3 g\Delta\rho}{3U} \times$ $\times\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right) = 7{,}26 \cdot 10^{-18}$ Кл.

9.59. Между двумя вертикальными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, на нити висит заряженный бузиновый шарик массой $m = 0{,}1$ г. После подачи на пластины разности потенциалов $U = 1$ кВ нить с шариком отклонилась на угол $\alpha = 10°$. Найти заряд q шарика.

Решение:



На шарик действует сила электрического поля $\vec{F} = q\vec{E}_1$ — (1), сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Условие равновесия: $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{T} = 0$. В проекциях на оси x и y соответственно $F - T\sin\alpha = 0$ — (2) и $T\cos\alpha - mg = 0$ — (3). Из (3) $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, тогда из (2) $F = mg \cdot tg\alpha$ или, с учетом (1), $qE = mg \cdot tg\alpha$ — (4). Напряженность поля плоского конденсатора $E = \dfrac{U}{d}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получим $\dfrac{qU}{d} = mg \cdot tg\alpha$, откуда $q = \dfrac{dmg \cdot tg\alpha}{U} = 1{,}73$ нКл.

9.60. Мыльный пузырь с зарядом $q = 222$ пКл находится в равновесии в поле плоского горизонтально расположенного конденсатора. Найти разность потенциалов U между пластинами конденсатора, если масса пузыря $m = 0{,}01$ г и расстояние между пластинами $d = 5$ см.

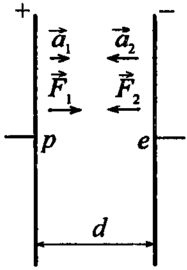
Решение:

Со стороны электрического поля на капельку действует сила $\vec{F} = \vec{E}q$, которая уравновешивается силой тяжести $m\vec{g}$. Т. к. $\vec{E}q + m\vec{g} = 0$ или $Eq = mg$. Напряженность поля плоского конденсатора $E = \dfrac{U}{d}$. Тогда $\dfrac{Uq}{d} = mg$, откуда $U = \dfrac{mgd}{q} = 22$ кВ.

9.61. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 4$ см. Электрон начинает двигаться от отрицательной пластины в тот момент, когда от положительной пластины начинает двигаться протон. На каком расстоянии l от положительной пластины встретятся электрон и протон?

Решение:

В поле плоского конденсатора на протон и электрон соответственно действуют кулоновские силы $\vec{F}_1 = e\vec{E}$ и $\vec{F}_2 = -e\vec{E}$ (силой тяжести ввиду ее малости можно пренебречь). Здесь e — элементарный заряд. Отсюда следует, что $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ или $F_1 = F_2$. В результате действия постоянной силы протон и электрон получают ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. По второму

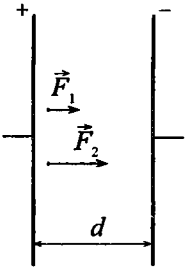


закону Ньютона $\vec{F}_1 = m_p\vec{a}_1$; $\vec{F}_2 = m_e\vec{a}_2$. Поскольку $F_1 = F_2$, то $m_p a_1 = m_e a_2$. Если протон и электрон встретились через время t на расстоянии l от положительной пластины, то $a_1 = \frac{2l}{t^2}$ и $a_2 = \frac{2(d-l)}{t^2}$. Тогда $\frac{m_p 2l}{t^2} = \frac{m_e 2(d-l)}{t^2}$; $m_p l = m_e(d-l)$, откуда $l = \frac{d}{m_p / m_e + 1} = 22$ мкм.

9.62. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 1$ см. От одной из пластин одновременно начинают двигаться протон и α-частица. Какое расстояние l пройдет α-частица за то время, в течение которого протон пройдет весь путь от одной пластины до другой?

Решение:

В поле плоского конденсатора на протон действует кулоновская сила $\vec{F}_1 = e\vec{E}$, на α-частицу действует кулоновская сила $\vec{F}_2 = 2e\vec{E}$, т. к. заряд α-частицы равен двум элементарным зарядам. Здесь e — элементарный за-



ряд. Отсюда следует, что $F_2 = 2F_1$ — (1). В результате действия постоянной силы протон и α-частица получают ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. По второму закону Ньютона $\vec{F}_1 = m_p\vec{a}_1$; $\vec{F}_2 = m_\alpha\vec{a}_2$. С учетом (1) можно записать $m_\alpha a_2 = 2m_p a_1$. Если за время t протон прошел расстояние d, а α-частица прошла расстояние l, то $a_1 = \frac{2d}{t^2}$ и $a_2 = \frac{2l}{t^2}$. Тогда $\frac{2m_\alpha d}{t^2} = \frac{4m_p l}{t^2}$, откуда $l = \frac{2m_p d}{m_\alpha} = 5$ мм.

9.63. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобретает скорость $v = 10^6$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 5{,}3$ мм. Найти разность потенциалов U между пластинами, напряженность E электрического поля внутри конденсатора и поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

Решение:

Пройдя путь от одной пластины конденсатора до другой, электрон приобрел кинетическую энергию равную $\frac{mv^2}{2}$. Эту энергию он приобрел за счет работы сил электрического поля, которая выражается формулой $A = e \times (\varphi_2 - \varphi_1) = eU$. Тогда можно записать, что $mv^2/2 = eU$, откуда $U = \frac{mv^2}{2e} = 2{,}8$ В. Напряженность поля конденсатора $E = U/d = 530$ В/м. Кроме того, напряженность выражается соотношением $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = E\varepsilon\varepsilon_0 = 4{,}7$ нКл/м^2.

9.64. Электрическое поле образовано двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 2$ см друг от друга. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 120$ В. Какую скорость v получит электрон под действием поля, пройдя по линии напряженности расстояние $\Delta r = 3$ мм?

Решение:

Для того чтобы сообщить электрону кинетическую энергию $W_к = \frac{mv^2}{2}$, силы электрического поля должны совершить работу $A = e\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между точками, расстояние между которыми равно Δr. Напряженность поля $E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta r}$, откуда $\Delta\varphi = E\Delta r$. Тогда работа сил поля $A = eE\Delta r$ или, учитывая, что $E = \frac{U}{d}$, $A = \frac{eU\Delta r}{d}$. Поскольку $A = W_к$, то $\frac{eU\Delta r}{d} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU\Delta r}{md}} = 2{,}53 \cdot 10^6$ м/с.

9.65. Электрон в однородном электрическом поле получает ускорение $a = 10^{12}$ м/с^2. Найти напряженность E электрического поля, скорость v, которую получит электрон за время $t = 1$ мкс своего движения, работу A сил электрического поля за это время и разность потенциалов U, пройденную при этом электроном. Начальная скорость электрона $v_0 = 0$.

Решение:

В электрическом поле на электрон действует кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$ (силу тяжести не учитываем, поскольку для электрона $mg << eE$). Согласно второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ или $e\vec{E} = m\vec{a}$, откуда $E = \frac{ma}{e} = 5{,}7$ В/м. За время t

электрон приобретает скорость $v = at = 10^6$ м/с, т. е. силы электрического поля совершают работу A, равную приращению кинетической энергии электрона. $A = \frac{mv^2}{2} = 4{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж. С другой стороны, работа сил поля $A = eU$, откуда $U = \frac{A}{e} = 2{,}8$ В.

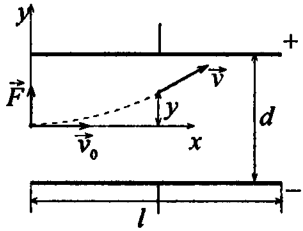
9.66. Электрон летит от одной пластины плоского конденсатора до другой. Разность потенциалов между пластинами $U = 3$ кВ; расстояние между пластинами $d = 5$ мм. Найти силу F, действующую на электрон, ускорение a электрона, скорость v, с которой электрон приходит ко второй пластине, и поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

Решение:

В электрическом поле на электрон действует кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$. Напряженность поля $E = \frac{U}{d}$, тогда $F = \frac{eU}{d} = 9{,}6 \cdot 10^{-14}$ Н. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, откуда $a = \frac{F}{m} = 1{,}05 \cdot 10^{17}$ м/с^2. При перемещении электрона от одной пластины к другой силы поля совершают работу $A = eU$, в результате которой электрон приобретает кинетическую энергию $W_к = \frac{mv^2}{2}$. Поскольку $A = W_к$, то $eU = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$; $v = 3{,}24 \cdot 10^7$ м/с. Поверхностная плотность заряда $\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E = 5{,}3$ мКл/м^2.

9.67. Электрон с некоторой начальной скоростью v_0 влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 300$ В; расстояние между пластинами $d = 2$ см; длина конденсатора $l = 10$ см. Какова должна быть предельная начальная скорость v_0 электрона, чтобы электрон не вылетел из конденсатора? Решить эту же задачу для α-частицы.

Решение:

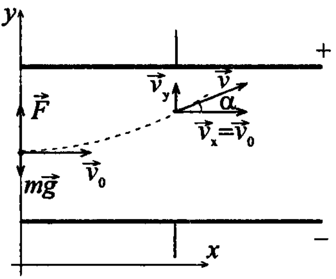


В плоском конденсаторе электрон будет двигаться по параболе подобно горизонтально брошенному телу в поле силы тяжести, на электрон в конденсаторе действует постоянная сила $\vec{F} = e\vec{E}$, под действием которой он получит ускорение $\bar{a} = \frac{e\vec{E}}{m}$. Пролетая длину l конденсатора за время $t = \frac{l}{v}$, электрон отклонится на расстояние $y = \frac{at^2}{2} = \frac{eEl^2}{2mv^2}$. Чтобы электрон не вылетел из конденсатора, должно выполняться условие $y \geq \frac{d}{2}$. Отсюда $v_0 \leq l\sqrt{\frac{eE}{md}}$. Подставляя числовые данные, получим для электрона $v_0 = 3{,}64 \cdot 10^7$ м/с и для α-частицы $v_0 = 6 \cdot 10^5$ м/с.

9.68. Электрон с некоторой скоростью влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100$ В/м; расстояние между пластинами $d = 4$ см.

Через какое время t после того, как электрон влетел в конденсатор, он попадет на одну из пластин? На каком расстоянии s от начала конденсатора электрон попадет на пластину, если он ускорен разностью потенциалов $U = 60$ В?

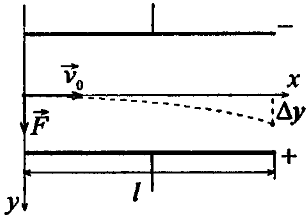
Решение:



Вдоль горизонтальной оси движение электрона будет равномерным со скоростью $v_x = v_0$, т. к. вдоль оси x на него не действуют силы. При равномерном движении координата x изменяется со временем $x = v_0 t$. Вдоль оси y на электрон действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила электростатического поля $\vec{F} = e\vec{E}$. Сила тяжести $mg = \left(9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 9{,}8\right)$Н на тринадцать порядков меньше электростатической силы $F = \left(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{2}\right)$Н и ею можно пренебречь. Под действием электростатической силы движение электрона вдоль оси y будет равноускоренным, а координата y изменяется со временем по закону $y = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{m2} = \frac{eEt^2}{m2}$. Отсюда при $y = \frac{d}{2}$ имеем $t = \sqrt{\frac{dm}{eE}} \approx 48$ нс. Пройдя разность потенциалов U, электрон за счет работы A сил электростатического поля приобретает кинетическую энергию, т. е. $A = eU = \frac{mv_0^2}{2}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Тогда через время $t = 48$ нс он упадет на пластину на расстоянии $S = v_0 t = t \times \times \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Подставив числовые данные, получим $S = 22$ см.

9.69. Электрон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам со скоростью $v_0 = 9 \times 10^6$ м/с. Разность потенциалов между пластинами $U = 100$ В; расстояние между пластинами $d = 1$ см. Найти полное a, нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения электрона через время $t = 10$ нс после начала его движения в конденсаторе.

Решение:

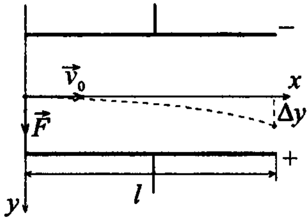


Движение электрона в электрическом поле конденсатора аналогично движению тела, брошенного горизонтально в поле силы тяжести. На электрон действует кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ или $e\vec{E} = m\vec{a}$.

Отсюда полное ускорение электрона $a = \frac{eE}{m}$ или, с учетом $E = \frac{U}{d}$, $a = \frac{eU}{md} = 17{,}6 \cdot 10^{14}$ м/с^2. Через время t после начала движения его нормальное ускорение $a_n = \frac{av_0}{\sqrt{v_0^2 + a^2t^2}}$, тангенциальное ускорение $a_\tau = \frac{a^2t}{\sqrt{v_0^2 + a^2t^2}}$ (см. задачу 1.30). Подставляя числовые значения, получим $a_n = 8 \times 10^{14}$ м/с^2; $a_\tau = 15{,}7 \cdot 10^{14}$ м/с^2.

9.70. Протон и α-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α-частицы?

Решение:



Найдем отклонение Δy полем конденсатора для любой положительно заряженной частицы. По второму закону Ньютона кулоновская сила $\vec{F} = m\vec{a}$ или $q\vec{E} = m\vec{a}$. Пусть за время t частица пролетает по оси x расстояние l. Движение частицы по оси x — равномерное, со скоростью v_0, т. к. проекция силы $\vec{F}$ на ось x равна нулю, следовательно, $t = \dfrac{l}{v_0}$. Движение частицы вдоль оси y — равноускоренное под действием силы $\vec{F}$, направленной вдоль этой оси. Ускорение $a = \dfrac{qE}{m}$. Тогда

$$\Delta y = \frac{at^2}{2} \text{ или } \Delta y_2 = \frac{2eEl^2}{2m_2 v_0^2}. \text{ Тогда } \frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} = \frac{m_\alpha}{2m_p} = 2.$$

9.71. Протон и α-частица, ускоренные одной и той же разностью потенциалов, вылетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α-частицы?

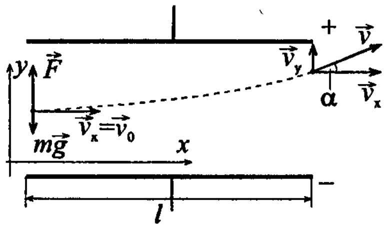
Решение:

Если ускорения протона и α-частицы будут одинаковы, то и отклонение Δy у них будет одно и то же (см. задачу 9.70).

9.72. Электрон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $E = 10$ кВ/м; длина конденсатора $l = 5$ см. Найти модуль и направление скорости v электрона при вылете его из конденсатора.

Решение:

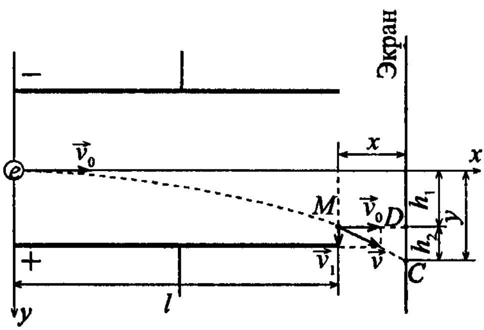
Полная скорость электрона в момент вылета из конденсатора $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, где $\vec{v}_x = \vec{v}_0$, $\vec{v}_y = \vec{a}t$. В скалярной форме $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Поскольку $a = \dfrac{eE}{m}$, $t = \dfrac{l}{v_0}$



(см. задачу 9.67), то $v = \sqrt{v_0^2 + \left(\dfrac{eEl}{mv_0}\right)^2} = 1{,}33 \cdot 10^7$ м/с. Направление скорости v электрона определяется углом α. Из рисунка видно, что $\cos\alpha = v_0 / v$; $\alpha \approx 41°$.

9.73. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 300$ В, при прохождении через незаряженный плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам дает светящееся пятно на флуоресцирующем экране, расположенном на расстоянии $x = 12$ см от конца конденсатора. При зарядке конденсатора пятно на экране смещается на расстояние $y = 3$ см. Расстояние между пластинами $d = 1{,}4$ см; длина конденсатора $l = 6$ см. Найти разность потенциалов U, приложенную к пластинам конденсатора.

Решение:



Движение электрона внутри конденсатора складывается из двух движений: 1) по инерции вдоль оси x с постоянной скоростью v_0, приобретенной под действием разности потенциалов U_0, которую электрон прошел до конденсатора; 2) равноускоренного движения в вертикальном направлении к положительно заряженной пластине под действием постоянной силы поля конденсатора. По выходе из конденсатора электрон будет двигаться равномерно со скоростью v, которую он имел в точке M в момент вылета из конденсатора. Из рисунка видно, что $y = h_1 + h_2$, где h_1 — расстояние, на которое сместится электрон в вертикальном положении во время движения в конденсаторе; h_2 — расстояние между точкой D на экране, в которую электрон попал бы, двигаясь по выходе из конденсатора по направлению начальной скорости v_0, и точкой C, в которую электрон попадет в действительности. Выразим отдельно h_1 и h_2. По формуле длины пути равноускоренного движения найдем $h_1 = at^2/2$, где a — ускорение, полученное электроном под действием поля конденсатора; t — время полета электрона внутри конденсатора. По второму закону Ньютона $a = F/m_e$, где $F = eE = \dfrac{eU}{d}$ — сила, с которой поле действует на электрон. Из формулы пути равномерного движения $t = \dfrac{l}{v_0}$. Выражение скорости v_0 найдем из условия равенства работы, совершенной полем при перемещении электрона, и приобретенной им кинетической энергии: $\dfrac{m_e v_0^2}{2} = eU_0$. Отсюда $v_0^2 = \dfrac{2eU_0}{m_e}$ — (2).

Подставляя в формулу (1) значения a, F, t и v_0^2, получим $h_1 = \dfrac{Ul^2}{4dU_0}$. Длину отрезка h_2 найдем из подобия треугольников MDC и векторного: $h_2 = \frac{v_1 x}{v}$, где v_1 — скорость электрона в вертикальном положении в точке M. Скорость v_1 найдем по формуле $v_1 = at$, которая с учетом выражений для a, F и t примет вид $v_1 = \frac{eUl}{dm_e v_0}$. Подставив выражение v_1 в формулу (3), получим $h_2 = \frac{eUlx}{dm_e v_0^2}$, или, заменив v_0^2 по формуле (3), найдем $h_2 = \frac{Ulx}{2dU_0}$. Тогда

$$y = h_1 + h_2 = \frac{Ul^2}{4DU_0} + \frac{Ulx}{2dU_0} = \frac{Ul}{2dU_0}\left(\frac{l}{2} + x\right),$$ откуда

$$U = \frac{2ydU_0}{l + (l/2 + x)}; \; U = 28\ \text{В}.$$

9.74. Электрон движется в плоском горизонтально расположенном конденсаторе параллельно его пластинам со скоростью $v = 3{,}6 \cdot 10^7$ м/с. Напряженность поля внутри конденсатора $E = 3{,}7$ кВ/м; длина пластин конденсатора $l = 20$ см. На какое расстояние y сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе?

Решение:

Имеем $y = \frac{eEl^2}{2m_e v^2}$ (см. задачу 9.70). $y = 0{,}01$ м.

9.75. Протон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 1{,}2 \cdot 10^5$ м/с. Напряженность поля внутри конденсатора $E = 3$ кВ/м; длина пластин конденсатора $l = 10$ см. Во сколько раз скорость протона v при вылете из конденсатора будет больше его начальной скорости v_0?

Решение:

Скорость протона в момент вылета равна $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0$, $v_y = at = \frac{q_p El}{m_p v_0}$ (см. задачу 9.70). Отсюда скорость $v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{q_p El}{m_p v_0}\right)^2} = 2{,}69 \cdot 10^5$ м/с. Тогда отношение скоростей $\frac{v}{v_0} = 2{,}24$.

9.76. Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d_1 = 5$ мм друг от друга, приложена разность потенциалов $U = 150$ В. К одной из пластин прилегает плоскопараллельная пластинка фарфора толщиной $d_2 = 3$ мм. Найти напряженности E_1 и E_2 электрического поля в воздухе и фарфоре.

Решение:

Разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = \int\limits_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ — (1). Поскольку в плоском конденсаторе в пределах каждого диэлектрика поле однородно, равенство (1) может быть записано в виде $U = E_1 l_1 + E_2 l_2$, где $l_1 = d_1 - d_2$ — толщина слоя воздуха, $l_2 = d_2$ — толщина слоя фарфора. Граница раздела диэлектриков параллельна обкладкам и, следовательно, нормальна силовым линиям поля. В отсутствие свободных зарядов на поверхности диэлектрика $D_1 = D_2$ и $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon_1 = 1$, диэлектрическая проницаемость фарфора $\varepsilon_2 = 6$. Решая систему уравнений $\begin{cases} U = E_1(d_1 - d_2) + E_2 d_2, \\ \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \end{cases}$ получим $E_1 = \dfrac{U}{(d_1 - d_2) + \varepsilon_1 d_2 / \varepsilon_1}$;

$E_1 = \dfrac{\varepsilon_2 U}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1} = 60$ кВ/м и $E_2 = \dfrac{U}{\varepsilon_2 (d_1 - d_2) / \varepsilon_1 + d_2}$;

$E_2 = \dfrac{\varepsilon_1 U}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1} = 10$ кВ/м.

9.77. Найти емкость C земного шара. Считать радиус земного шара $R = 6400$ км. На сколько изменится потенциал земного шара, если ему сообщить заряд $q = 1$ Кл?

Решение:

Имеем $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Подставляя числовые данные, получим $C = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6400 \cdot 10^3 = 711$ мкФ. Если земному шару сообщить заряд $q = 1$ Кл, его потенциал увеличится на величину $\Delta\varphi = \dfrac{q}{C} = 1406$ В.

9.78. Шарик радиусом $R = 2$ см заряжается отрицательно до потенциала $\varphi = 2$ кВ. Найти массу m всех электронов, составляющих заряд, сообщенный шарику.

Решение:

Емкость шарика $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. После зарядки до потенциала $q = \varphi C = \varphi 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Количество электронов, составляющих этот заряд, $N = \dfrac{q}{e}$ или $N = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi}{e}$. Масса всех электронов $m = N m_e = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi m_e}{e}$; $m = 2{,}5 \cdot 10^{-20}$ кг.

9.79. Восемь заряженных водяных капель радиусом $r = 1$ см и зарядом $q = 0{,}1$ нКл каждая сливаются в одну общую водяную каплю. Найти потенциал φ большой капли.

Решение:

Потенциал на поверхности большой шарообразной капли $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ — (1), где Q — заряд капли, R — ее раднус.

Потенциал на поверхности малой капли $\varphi_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где q — заряд капли, r — ее радиус. Если n одинаковых капель сливаются в одну, ее заряд равен $Q = nq$. С учетом этого, разделив (1) на (2), получим $\dfrac{\varphi}{\varphi_0} = n\dfrac{r}{R}$ — (3). Объем большой капли равен сумме объемов маленьких капель: $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = n\dfrac{4}{3}\pi r^3$, откуда $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\varphi_0 = \dfrac{n}{\sqrt[3]{n}}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; $\varphi = 3{,}6$ кВ.

9.80. Два шарика одинаковых радиуса $R = 1$ см и массы $m = 40$ мг подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Когда шарики зарядили, нити разошлись на некоторый угол и сила натяжения нитей стала равной $T = 490$ мкН. Найти потенциал φ заряженных шариков, если известно, что расстояние от центра каждого шарика до точки подвеса $l = 10$ см.

Решение:

Задача аналогична 9.15. Шарикам сообщили заряд $q = 8l\sqrt{\pi T\varepsilon\varepsilon_0\left(1 - \left(\dfrac{mg}{T}\right)^{\frac{3}{2}}\right)} = 21{,}7\cdot 10^{-9}$ Кл. Потенциал шариков $\varphi = \dfrac{q}{C} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$; $\varphi = 19{,}5$ кВ.

9.81. Шарик, заряженный до потенциала $\varphi = 792$ В, имеет поверхностную плотность заряда $\sigma = 333$ нКл/м^2. Найти радиус r шарика.

Решение:

Потенциал шарика и его заряд связаны соотношением $q = C\varphi$, где заряд $q = \sigma \cdot 4\pi r^2$, емкость шарика $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$. Иначе, $\sigma r = \varepsilon\varepsilon_0\varphi$, откуда $r = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0\varphi}{\sigma} = 0{,}021$ м.

9.82. Найти соотношение между радиусом шара R и максимальным потенциалом φ, до которого он может быть заряжен в воздухе, если при нормальном давлении разряд в воздухе наступает при напряженности электрического поля $E_0 = 3$ МВ/м. Каким будет максимальный потенциал φ шара диаметром $D = 1$ м?

Решение:

Напряженность поля у поверхности заряженного шара равна $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$. Заряд q и потенциал φ шара связаны соотношением $q = C\varphi$, где емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Отсюда $E = \dfrac{\varphi}{R}$. Поскольку максимального значения потенциал достигает при $E = E_0$, то $\varphi_{max} = E_0 R$ или $\varphi_{max} = 3 \cdot 10^6 R$. При диаметре шара $D = 1$ м имеем $\varphi_{max} = 1{,}5$ МВ.

9.83. Два шарика одинаковых радиуса $R = 1$ см и массы $m = 0{,}15$ кг заряжены до одинакового потенциала $\varphi = 3$ кВ и находятся на некотором расстоянии r_1 друг от друга. При этом их энергия гравитационного взаимодействия $W_{гр} = 10^{-11}$ Дж. Шарики сближаются до расстояния r_2. Работа, необходимая для сближения шариков, $A = 2 \cdot 10^{-6}$ Дж. Найти энергию $W_{эл}$ электростатического взаимодействия шариков после их сближения.

Решение:

До сближения шарики обладали энергией гравитационного взаимодействия $W_{гр} = Gm^2 / r_1$ — (1) и энергией электрического взаимодействия $W_{эл} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}$ — (2). Заряд шарика $q = C\varphi = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi$ — (3). Поскольку раднусы и потенциал шариков одинаковы, то $q_1 = q_2 = q$ и уравнение (2), с учетом (3), можно переписать $W_{эл} = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2\varphi^2}{r_1}$. Из (1) найдем $r_1 = \dfrac{Gm^2}{W_{гр}}$. Тогда $W_2 = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2\varphi^2 W_{гр}}{Gm^2}$ — (4). Для сближения шариков необходимо совершить работу A против сил поля, которая равна приращению энергии электростатического взаимодействия. $A = W'_{эл} - W_{эл}$, где $W'_{эл}$ — искомая энергия электростатического взаимодействия шариков после их сближения. Отсюда $W'_{эл} = A + W_{эл}$ или, с учетом (4), $W'_{эл} = A + \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2\varphi^2 W_{гр}}{Gm^2}$.

Подставляя числовые данные, получим $W'_{эл} = 2{,}67$ мкДж.

9.84. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 1\ \text{м}^2$, расстояние между ними $d = 1{,}5$ мм. Найти емкость C этого конденсатора.

Решение:

Емкость плоского конденсатора определяется соотношением $C = \varepsilon\varepsilon_0 S / d$. Для воздуха $\varepsilon = 1$. Подставив числовые значения, получим $C = 5{,}9$ нФ.

9.85. Конденсатор предыдущей задачи заряжен до разности потенциалов $U = 300$ В. Найти поверхностную плотность заряда σ на его пластинах.

Решение:

Напряженность поля плоского конденсатора $E = \dfrac{U}{d}$. С другой стороны, $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Тогда $\dfrac{U}{d} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = \dfrac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} = 1{,}77$ мкКл/м^2.

9.86. Требуется изготовить конденсатор емкостью $C = 250$ пФ. Для этого на парафинированиую бумагу толщиной $d = 0{,}05$ мм наклеивают с обеих сторон кружки станиоля. Каким должен быть диаметр D кружков станиоля?

Решение:

Емкость конденсатора выражается формулой $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, где $S = \pi\dfrac{D^2}{4}$. Т. е. $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 \pi D^2}{4d}$. Отсюда $D = \sqrt{\dfrac{4Cd}{\varepsilon\varepsilon_0\pi}}$. Диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon = 2$. Подставив числовые данные, получим $D = 3$ см.

9.87. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01\ \text{м}^2$, расстояние между ними $d = 5$ мм. К пластинам приложена разность потенциалов $U_1 = 300$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения пространство между пластинами, заполняется эбонитом. Какова будет разность потенциалов U_2 между пластинами после заполнения? Найти емкости конденсатора C_1 и C_2 и поверхностные плотности заряда σ_1 и σ_2 на пластинах до и после заполнения.

Решение:

Т. к. заполнение конденсатора эбонитом производилось после отключения от источника напряжения, то по закону сохранения электрического заряда заряд на пластинах $q = const$. Следовательно, и поверхностная плотность заряда на пластинах $\sigma = \frac{q}{S} = const$. Т. к. $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{U}{d}$, то до и после заполнения имеем $\sigma \cdot d = U_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1$ — (1) и $\sigma \cdot d = U_2 \times \varepsilon_0 \varepsilon_2$ — (2). Приравняв правые части уравнений (1) и (2), имеем $U_1 \varepsilon_1 = U_2 \varepsilon_2$, откуда $U_2 = \frac{U_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 115\,\text{В}$. До и после заполнения конденсатора имеем $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d} = 17{,}7\,\text{пФ}$; $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d} = 46\,\text{пФ}$; $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{C_1 U_1}{S} = 531\,\text{нКл/м}^2$.

9.88. Решить предыдущую задачу для случая, когда заполнение пространства между пластинами изолятором производится при включенном источнике напряжения.

Решение:

В данной задаче рассматриваются два крайних состояния конденсатора: когда он не заполнен диэлектриком и когда заполнен. Сам процесс заполнения не учитывается. Если заполнение конденсатора эбонитом производить при включенном источнике напряжения, то $U = const$. Следовательно, и напряженность поля свободных зарядов на обкладках конденсатора $E = \frac{U}{d} = const$. С другой стороны, напряженность поля свободных зарядов $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$, тогда до и после заполнения имеем $\frac{U}{d} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}$ и $\frac{U}{d} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}$, откуда

$\sigma_1 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 U}{d} = 531\ \text{нКл/м}^2$ и $\sigma_2 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 U}{d} = 1{,}38\ \text{мкКл/м}^2$. До и после заполнения эбонитом имеем (см. задачу 9.87) $C_1 = 17{,}7\ \text{пФ}$, $C_2 = 46\ \text{пФ}$, т. к. емкость конденсатора от напряжения не зависит.

9.89. Площадь пластин плоского конденсатора $S = 0{,}01\ \text{м}^2$, расстояние между ними $d = 1\ \text{см}$. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 300\ \text{В}$. В пространстве между пластинами находятся плоскопараллельная пластинка стекла толщиной $d_1 = 0{,}5\ \text{см}$ и плоскопараллельная пластинка парафина толщиной $d_2 = 0{,}5\ \text{см}$. Найти напряженности E_1 и E_2 электрического поля и падения потенциала U_1 и U_2 в каждом слое. Каковы будут при этом емкость C конденсатора и поверхностная плотность заряда σ на пластинах?

Решение:

Разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = \int\limits_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ — (1). Поскольку в плоском конденсаторе в пределах каждого диэлектрика поле однородно, равенство (1) может быть записано в виде $U = E_1 l_1 + E_2 l_2$ – (2), где $l_1 = d_1$ — толщина слоя стекла, $l_2 = d_2$ — толщина слоя парафина. Граница раздела диэлектриков параллельна обкладкам и, следовательно, нормальна силовым линиям поля. В отсутствие свободных зарядов на поверхности диэлектрика $D_1 = D_2$ и $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$ — (3). Падение потенциала в каждом слое $U_1 = E_1 d_1$ и $U_2 = E_2 d_2$ — (4). Уравнение (2) можно записать в виде $E_1 d_1 + E_2 d_2 = U$ — (5). Из (5) и (3) имеем $E_1 = \dfrac{U \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 d_2} = 15\ \text{кВ/м}$, $E_2 = \dfrac{\varepsilon_1 E_1}{\varepsilon_2} = 45\ \text{кВ/м}$. Тогда из (4) $U_1 = 75\ \text{В}$, $U_2 = 225\ \text{В}$. Емкость C

найдем по формуле $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$, где $C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d_1}$, $C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d_2}$ — (4). Отсюда емкость $C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{d_1\varepsilon_2+\varepsilon_1 d_2}=$ $=26{,}6$ пФ. Заряд на одной из пластин $q=\sigma\cdot S=C_1U_1=$ $=C_2U_2=CU$; отсюда $\sigma=\frac{CU}{S}=0{,}8$ мкКл/м^2.

9.90. Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d=1$ см друг от друга, приложена разность потенциалов $U=100$ В. К одной из пластин прилегает плоскопараллельная пластинка кристаллического бромистого таллия ($\varepsilon=173$) толщиной $d_0=9{,}5$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения пластинку кристалла вынимают. Какова будет после этого разность потенциалов U между пластинами конденсатора?

Решение:

Если конденсатор отключен от источника напряжения, то $q=const$. Когда пластинка кристалла находится внутри конденсатора, напряженность в воздушном слое $E=\frac{U_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_0+\varepsilon_2(d-d_0)}$ — (1) (см. задачу 9.89). После того как пластинку вынули, разность потенциалов между пластинами стала $U_2=Ed$ — (2). Подставляя (2) в (1), найдем $U_2=\frac{dU_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_0+\varepsilon_2(d-d_0)}=1{,}8$ кВ.

9.91. Коаксиальный электрический кабель состоит из центральной жилы и концентрической цилиндрической оболочки, между которыми находится диэлектрик ($\varepsilon=3{,}2$). Найти емкость C_l единицы длины такого кабеля, если радиус жилы $r_1=1{,}3$ см, радиус оболочки $r_2=3{,}0$ см.

Решение:

Емкость коаксиального кабеля конечной длины L можно найти по формуле $C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{ln(R/r)}$. Отсюда для единицы длины кабеля имеем $C_l = \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{ln(R/r)}$; $C_l = 214$ пФ/м.

9.92. Радиус центральной жилы коаксиального кабеля $r = 1{,}5$ см, радиус оболочки $R = 3{,}5$ см. Между центральной жилой и оболочкой приложена разность потенциалов $U = 2{,}3$ кВ. Найти напряженность E электрического поля на расстоянии $x = 2$ см от оси кабеля.

Решение:

Поле внутри кабеля неоднородно, и напряженность убывает с увеличением расстояния от оси системы. Поскольку вся система обладает осевой симметрией, напряженность поля может быть найдена с помощью обобщенной теоремы Гаусса: $\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \sum Q$. Если выбрать вспомогательную поверхность в виде коаксиального цилиндра, получим $D = \frac{\tau}{2\pi r}$ — (1), где τ — линейная плотность заряда на центральной жиле. При этом вектор $\vec{D}$ нормален к границе раздела и выражение (1) справедливо в любой точке конденсатора. Учитывая, что $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, получим выражение для напряженности поля в указанной точке, т. е. при $r = x$: $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x}$. Найдем линейную плотность заряда. Емкость кабеля $C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{ln(R/r)} = \frac{q}{U} = \frac{\tau L}{U}$, откуда $\tau = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 U}{ln(R/r)}$. Тогда напряженность поля $E = \frac{U}{x\, ln(R/r)} = 136$ кВ/м.

9.93. Вакуумный цилиндрический конденсатор имеет радиус внутреннего цилиндра $r = 1{,}5$ см и радиус внешнего цилиндра $R = 3{,}5$ см. Между цилиндрами приложена разность потенциалов $U = 2{,}3$ кВ. Какую скорость v получит электрон под действием поля этого конденсатора, двигаясь с расстояния $l_1 = 2{,}5$ см до расстояния $l_2 = 2$ см от оси цилиндра?

Решение:

За счет работы сил электрического поля электрон приобретает кинетическую энергию, т. е. $A = \frac{mv^2}{2}$. Имеем $dA = qdU = -qEdx$. Т. к. $E = \frac{U}{x\,ln(R/r)}$, то работа

$$A = -\int_{l_1}^{l_2} \frac{qUdx}{x\,ln(R/r)} = \frac{qU\,ln(l_1/l_2)}{ln(R/r)} = \frac{mv^2}{2},$$ следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{2qU\,ln(l_1/l_2)}{m\,ln(R/r)}} = 1{,}46 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

9.94. Цилиндрический конденсатор состоит из внутреннего цилиндра радиусом $r = 3$ мм, двух слоев диэлектрика и внешнего цилиндра радиусом $R = 1$ см. Первый слой диэлектрика толщиной $d_1 = 3$ мм примыкает к внутреннему цилиндру. Найти отношение падений потенциала $\frac{U_1}{U_2}$ в этих слоях.

Решение:

Напряженность электрического поля внутри цилиндрического конденсатора $E = \frac{U}{x\,ln(R/r)}$ (см. задачу 9.92).

Падение потенциала в первом слое $U_1 = -\int_{r+d_1}^{r} Edx =$

$$= -\int_{r+d_1}^{r} \frac{U_0}{x\,ln(R/r)}dx = \frac{U_0\,ln[(r+d_1)/r]}{ln(R/r)}$$. Аналогично падение потенциала во втором слое $U_2 = \frac{U_0\,ln[R/(r+d_1)]}{ln(R/r)}$. Отсюда

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{ln[(r+d_1)/r]}{ln[R/(r+d_1)]} = 1{,}35.$$

9.95. При изучении фотоэлектрических явлений используется сферический конденсатор, состоящий из металлического шарика диаметром $d = 1{,}5$ см (катода) и внутренней поверхности посеребренной изнутри сферической колбы диаметром $D = 11$ см (анода). Воздух из колбы откачивается. Найти емкость C такого конденсатора.

Решение:

Потенциал внутреннего шарика равен $\varphi_1 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 d}$. Потенциал внешней сферы равен $\varphi_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 D}$. Отсюда разность потенциалов $\Delta\varphi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right)$. Емкость конденсатора $C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 dD}{D-d}$. Подставляя числовые данные, получим $C = 0{,}96$ пФ.

9.96. Каким будет потенциал φ шара радиусом $r = 3$ см, если: а) сообщить ему заряд $q = 1$ нКл, б) окружить его концентрическим шаром радиусом $R = 4$ см, соединенным с землей?

Решение:

а) Потенциал шара $\varphi = \frac{q}{C} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$; $\varphi = 300$ В. б) На заземленной сфере в результате взаимодействия электрического поля заряженного шара индуцируется заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду шара, т. е. $q = -4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\varphi$, потенциал шара станет равным $\varphi' = \varphi + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R}$ или $\varphi' = \varphi + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{-4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\varphi}{R} = \varphi\left(1 - \frac{r}{R}\right)$; $\varphi = 7{,}5$ В.

9.97. Найти емкость C сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических сфер с радиусами $r = 10$ см и $R = 10{,}5$ см. Пространство между сферами заполнено маслом. Какой радиус R_0 должен иметь шар, помещенный в масло, чтобы иметь такую же емкость?

Решение:

Емкость сферического конденсатора $C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 rR}{R - r}$. Диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon = 5$. Подставляя числовые данные, получим $C = 1{,}17 \cdot 10^{-9}$ Ф. Емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_0$, отсюда $R_0 = \frac{C}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} = 2{,}1$ м.

9.98. Радиус внутреннего шара воздушного сферического конденсатора $r = 1$ см, радиус внешнего шара $R = 4$ см. Между шарами приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Найти напряженность E электрического поля на расстоянии $x = 3$ см от центра шаров.

Решение:

Напряженность в заданной точке создается только внутренним шаром и равна $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$. Заряд q найдем из соотношения $C = \frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 rR}{R-r} = \frac{q}{U}$, откуда $q = \frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 RU}{R-r}$.

Тогда $E = \frac{rRU}{(R-r)x^2} = 44{,}5$ кВ/м.

9.99. Радиус внутреннего шара вакуумного сферического конденсатора $r = 1$ см, радиус внешнего шара $R = 4$ см. Между шарами приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Какую скорость v получит электрон, приблизившись к центру шаров с расстояния $x_1 = 3$ см до расстояния $x_2 = 2$ см?

Решение:

За счет работы A сил электрического поля электрон приобрел кинетическую энергию, т. е. $A = \frac{mv^2}{2}$. Имеем $A = edU = -eEdx$. Т. к. $E = \frac{rRU}{(R-r)x^2}$ (см. задачу 9.98), то

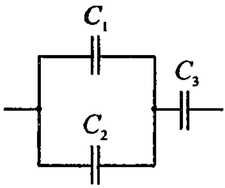
$$A = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{erRU}{(R-r)x^2} dx = -\frac{erRU}{R-r}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2}; \qquad A = \frac{erRU}{R-r}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$= \frac{eUrR(x_1 - x_2)}{(R-r)x_1 x_2}.$$ Тогда $$\frac{mv^2}{2} = \frac{eErR(x_1 - x_2)}{(R-r)x_1 x_2},$$ откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eUrR(x_1 - x_2)}{m(R-r)x_1 x_2}} = 1{,}54 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

9.100. Найти емкость C системы конденсаторов, изображенной на рисунке. Емкость каждого конденсатора $C_i = 0{,}5$ мкФ.

Решение:



Емкость параллельного участка $C_{12} = C_1 + C_2$. Емкость всей системы конденсаторов найдем из соотношения $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$ или $\frac{1}{C} = \frac{C_3 + C_1 + C_2}{(C_1 + C_2)C_3}$. Отсюда $C = \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$. Поскольку $C_1 = C_2 = C_3 = C_i$, то $C = \frac{2}{3}C_i = 0{,}33$ мкФ.

9.101. При помощи электрометра сравнивали между собой емкости двух конденсаторов. Для этого заряжали их до разностей потенциалов $U_1 = 300$ В и $U_2 = 100$ В и соединяли оба конденсатора параллельно. Измеренная при этом электрометром разность потенциалов между обкладками конденсатора оказалась равной $U = 250$ В. Найти отношение емкостей $\frac{C_1}{C_2}$.

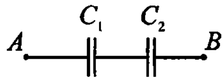
Решение:

Заряд на обкладках первого конденсатора $q_1 = C_1U_1$. Заряд на обкладках второго конденсатора $q_2 = C_2U_2$. После соединения конденсаторов $q_1 + q_2 = CU$, где $C = C_1 + C_2$. Отсюда $(C_1 + C_2)U = C_1U_1 + C_2U_2$. После несложных преобразований получим $\frac{C_1}{C_2} = \frac{U - U_2}{U_1 - U} = 3$.

9.102. Разность потенциалов между точками A и B $U = 6$ В. Емкость первого конденсатора $C_1 = 2$ мкФ и емкость второго конденсатора $C_2 = 4$ мкФ. Найти заряды q_1 и q_2 и разности потенциалов U_1 и U_2 на обкладках каждого конденсатора.

Решение:

При последовательном соединении на всех пластинах конденсатора будет одинаковый по модулю заряд, т. е. $q_1 = q_2$. При этом $q_1 = C_1U_1$, а $q_2 = C_2U_2$. Отсюда $C_1U_1 = C_2U_2$. Падение напряжения на участке AB равно $U = U_1 + U_2$, отсюда $U_1 = U - U_2$. Тогда



$C_1(U - U_2) = C_2U_2$, откуда $U_2 = \dfrac{C_1U}{C_2 + C_1} = 2$ В; $U_1 = U - U_2 = 4$ В; $q_1 = q_2 = C_1U_1 = 8$ мкКл.

9.103. В каких пределах может меняться емкость C системы, состоящей из двух конденсаторов, если емкость одного из конденсаторов постоянна и равна $C_1 = 3{,}33$ нФ, а емкость C_2 другого изменяется от 22,2 до 555,5 пФ?

Решение:

При параллельном соединении конденсаторов емкость системы равна $C = C_1 + C_2$ и изменяется от $C = 3{,}33 \times 10^{-9} + 22{,}2 \cdot 10^{-12} = 3{,}35 \cdot 10^{-9}$ Ф до $C = 3{,}33 \cdot 10^{-9} + 555{,}5 \times 10^{-12} = 3{,}89 \cdot 10^{-9}$ Ф. При последовательном соединении конденсаторов емкость системы $C = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$ и изменяется

от $C = \dfrac{3{,}33 \cdot 10^{-9} \cdot 22{,}2 \cdot 10^{-12}}{3{,}35 \cdot 10^{-9}} = 22 \cdot 10^{-12}$ Ф до

$$C = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-9} \cdot 555{,}5 \cdot 10^{-12}}{3{,}89 \cdot 10^{-9}} = 475{,}5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}.$$

9.104. В каких пределах может изменяться емкость C системы, состоящей из двух конденсаторов переменной емкости, если емкость C_i каждого из них изменяется от 10 до 450 пФ?

Решение:

При последовательном соединении емкость системы конденсаторов равна $C = \frac{C_{i1}C_{i2}}{C_{i1}+C_{i2}}$. Подставляя граничные значения, получим, что емкость C системы меняется в пределах от $20\,пФ$ до $900\,пФ$. При параллельном соединении емкость системы $C = C_{i1} + C_{i2}$. Подставляя граничные значения, найдем, что емкость C системы меняется от 5пФ до 225пФ.

9.105. Конденсатор емкостью $C = 20\,мкФ$ заряжен до разности потенциалов $U = 100\,В$. Найти энергию W этого конденсатора.

Решение:

Энергия заряженного конденсатора $W = \frac{CU^2}{2}$; $W = 0{,}1$ Дж.

9.106. Шар радиусом $R_1 = 1\,м$ заряжен до потенциала $\varphi = 30\,кВ$. Найти энергию W заряженного шара.

Решение:

Энергия заряженного шара $W = \frac{CU^2}{2}$, где емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Тогда $W = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 RU^2}{2} = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 RU^2$;

$W = 0{,}05$ Дж.

9.107. Шар, погруженный в керосин, имеет потенциал $\varphi = 4{,}5\,кВ$ и поверхностную плотность заряда $\sigma = 11{,}3\,мкКл/м^2$. Найти радиус R, заряд q, емкость C и энергию W шара.

Решение:

Будем считать, что весь заряд шара равномерно распределен по поверхности и задана поверхностная плотность свободных зарядов. Потенциал шара φ и его заряд q связаны соотношением $q = C\varphi$ — (1), где $q = \sigma S$ — (2); $C = 4 \times \times \pi\varepsilon_0\varepsilon R$ — (3). Площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$ — (4). Подставляя (2) — (4) в (1), получим $\sigma R = \varepsilon\varepsilon_0\varphi$, откуда $R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\varphi}{\sigma} = 7$ мм. Из (2) $q = 4\pi R^2\sigma = 7$ нКл. Из (1) $C = \frac{q}{\varphi} = 1{,}55$ пФ. Энергия заряженного шара $W = \frac{q^2}{2C} = 15{,}8$ мкДж.

9.108. Шар 1 радиусом $R_1 = 10$ см, заряженный до потенциала $\varphi = 3$ кВ, после отключения от источника напряжения соединяется проволочкой (емкостью которой можно пренебречь) сначала с удаленным незаряженным шаром 2, а затем после отсоединения от шара 2 с удаленным незаряженным шаром 3. Шары 2 и 3 имеют радиусы $R_2 = R_3 = 10$ см. Найти: а) первоначальную энергию W_1 шара 1; б) энергии W_1' и W_2' шаров 1 и 2 после соединения и работу A разряда при соединении; в) энергии W_1' и W_3' шаров 1 и 3 после соединения и работу A разряда при соединении.

Решение:

Пусть $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Первоначальная энергия шара 1 $W_1 = \frac{q_1^2}{2C}$ — (1). Заряд шара q и его емкость C связаны соотношением $C = \frac{q}{\varphi}$ — (2), где φ — потенциал шара. Из (2) $q_1 = C\varphi$, подставляя это выражение в (1), получим $W_1 = \frac{C\varphi_1^2}{2}$. Емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, тогда $W_1 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \times$

$\times R\varphi_1^2$; $W_1 = 50$ мкДж. После соединения шаров 1 и 2 проволокой перетекание заряда происходит до тех пор, пока потенциалы шаров не станут равны, т. е. $\varphi_2' = \varphi_2'$ — (3). По закону сохранения зарядов для изолированной системы имеем: $q_1 = q_1' + q_2'$ — (4), где q_1' и q_2' — заряды шаров 1 и 2 после соединения. Т. к. по условию шары находятся на большом расстоянии друг от друга, потенциал каждого из шаров определяется только зарядом самого шара, влиянием поля второго шара можно пренебречь. $\varphi_1' = \dfrac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R}$; $\varphi_2' = \dfrac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R}$ — (5), отсюда следует, что $q_1' = q_2'$. Поскольку емкость и потенциал шаров 1 и 2 после соединения одинаковы, то $W_1' = W_2'$. Из уравнений (3) — (5) следует, что $\varphi_1' = \dfrac{\varphi_1}{2}$. Тогда $W_1' = W_2' = \quad = \dfrac{C\varphi_1^2}{8} = \dfrac{W_1}{4}$; $W_1' = W_2' = 12{,}5$ мкДж. Работа разряда A равна разности энергий $A = W_1 - (W_1' + W_2') = \dfrac{W_1}{2}$; $A = 25$ мкДж. Если теперь соединить шар 1 и шар 3, то аналогично $W_1'' = W_3' = \dfrac{W_1'}{4} = 3{,}125$ мкДж; $A = \dfrac{W_1'}{2} = 6{,}25$ мкДж.

9.109. Два металлических шарика, первый с зарядом $q_1 = 10$ нКл и радиусом $R_1 = 3$ см и второй с потенциалом $\varphi = 9$ кВ и радиусом $R_2 = 2$ см, соединены проволочкой, емкостью которой можно пренебречь. Найти: а) потенциал φ_1 первого шарика до разряда; б) заряд q_2 второго шарика до разряда; в) энергии W_1 и W_2 каждого шарика до разряда; г) заряд q_1' и потенциал φ_1' первого шарика после разряда; д) заряд q_2' и потенциал φ_2' второго шарика после разряда; е) энергию W соединенных проводником шариков; ж) работу A разряда.

Решение:

Потенциал первого шарика до разряда $\varphi_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} =$ $= 3$ кВ. Заряд второго шарика до разряда $q_2 = C_2\varphi_2 =$ $= 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2\varphi_2$; $q_2 = 20$ нКл. Энергия первого шарика до разряда $W_1 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1\varphi_1^2 = 15$ мкДж. Энергия второго шарика до разряда $W_2 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2\varphi_2^2 = 90$ мкДж (см. задачу 9.108). После соединения шариков $\varphi_1' = \varphi_2'$. По закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$ — (1). Имеем $\varphi_1' = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}$; $\varphi_2' = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$. Т. к. $\varphi_1' = \varphi_2'$, то $\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$ или с учетом (1) получим $\frac{q_1'}{R_1} = \frac{q_1 + q_2 - q_1'}{R_2}$, откуда $q_1' = \frac{q_1 + q_2}{1 + R_2 / R_1} = 18$ нКл. Тогда $q_2' = q_1 + q_2 - q_1' = 12$ нКл. Потенциалы шариков после разряда $\varphi_1' = \varphi_2' = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} =$ $= 5{,}4$ кВ. Энергия W соединенных шариков равна сумме энергий каждого шарика в отдельности после разряда. Т. е. $W = W_1' + W_2'$, где $W_1' = \frac{(q_1')^2}{8C_1} = \frac{(q_1')^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}$; $W_2' = \frac{(q_2')^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$.

Следовательно, $W = \frac{1}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{(q_1')^2}{R_1} + \frac{(q_2')^2}{R_2}\right)$; $W = 81$ мкДж.

Работа разряда A равна разности энергий до и после разряда, т. е. $A = (W_1 + W_2) - W = 24$ мкДж.

9.110. Заряженный шар 1 радиусом $R_1 = 2$ см приводится в соприкосновение с незаряженным шаром 2, радиус которого

$R_2 = 3$ см. После того как шары разъединили, энергия шара 2 оказалась равной $W_2 = 0{,}4$ Дж. Какой заряд q_1 был на шаре 1 до соприкосновения с шаром 2?

Решение:

По закону сохранения заряда $q_1 = q_1' + q_2'$ — (1), где q_1' и q_2' — заряды шаров 1 и 2 после соприкосновения. Кроме того, потенциалы шаров будут равны, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$ или $\dfrac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$, откуда $q_1' R_2 = q_2' R_1$ — (2). По условию $W_2 = \dfrac{(q_2')^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2} = 0{,}4$ Дж, откуда $q_2' = \sqrt{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2 W_2} = 1{,}64 \cdot 10^{-6}$ Кл. Подставляя полученное значение в (2), найдем $q_1' = \dfrac{q_2' R_1}{R_2} = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Кл. Тогда из (1) получим $q_1 = (1{,}6 + 1{,}1) \cdot 10^{-6} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ Кл.

9.111. Пластины плоского конденсатора площадью $S = 0{,}01\,\text{м}^2$ каждая притягиваются друг к другу с силой $F = 30$ мН. Пространство между пластинами заполнено слюдой. Найти заряды q, находящиеся на пластинах, напряженность E поля между пластинами и объемную плотность энергии W_0 поля.

Решение:

Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 6$. Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора $F = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S}{2}$, откуда $E = \sqrt{\dfrac{2F}{\varepsilon_0 \varepsilon S}} = 336$ кВ/м. Силу F можно выразить иначе: $F = \dfrac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$, где $\sigma = \dfrac{q}{S}$. Т. е. $F = \dfrac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$, откуда $q = \sqrt{2F\varepsilon\varepsilon_0 S} = 178$ нКл. Объемная плотность энергии $W_0 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = 3$ Дж/м^2.

9.112. Между пластинами плоского конденсатора вложена тонкая слюдяная пластинка. Какое давление p испытывает эта пластинка при напряженности электрического поля $E = 1$ МВ/м?

Решение:

Пластинка испытывает давление $p = \dfrac{F}{S}$, где F — сила притяжения между пластинами конденсатора, $F = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2}$.

Отсюда $p = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = 26{,}5$ Па.

9.113. Абсолютный электрометр представляет собой плоский конденсатор, нижняя пластина которого неподвижна, а верхняя подвешена к коромыслу весов. При незаряженном конденсаторе расстояние между пластинами $d = 1$ см. Какую разность потенциалов U приложили между пластинами, если для сохранения того же расстояния $d = 1$ см на другую чашку весов пришлось положить груз массой $m = 5{,}1$ г? Площадь пластин конденсатора $S = 50$ см^2.

Решение:

На верхнюю пластину электрометра действуют две силы: сила притяжения между пластинами $\vec{F}$, направленная вниз, и сила натяжения $\vec{T}$ нити коромысла весов, направленная вверх, равная по абсолютной величине весу груза $\vec{P}$, где $\vec{P} = m\vec{g}$. Запишем условие равновесия: $\vec{F} = \vec{T}$ или $F = mg$. Силу притяжения между пластинами можно выразить следующим образом: $F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d^2}$. Тогда $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d^2} = mg$, откуда $U = \sqrt{\frac{2d^2 mg}{\varepsilon\varepsilon_0 S}} = 15$ кВ.

9.114. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора $U = 280$ В. Площадь пластин конденсатора $S = 0{,}01\,\text{м}^2$; поверхностная плотность заряда на пластинах $\sigma = 495$ нКл/м^2. Найти: а) напряженность E поля внутри конденсатора; б) расстояние d между пластинами; в) скорость v, которую получит электрон, пройдя в конденсаторе путь от одной пластины до другой; г) энергию W конденсатора; д) емкость C конденсатора; е) силу притяжения F пластин конденсатора.

Решение:

Напряженность поля конденсатора $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = 56$ кВ/м. С другой стороны, $E = \frac{U}{d}$, отсюда $d = \frac{U}{E} = 5$ мм. За счет работы сил электрического поля электрону будет сообщена кинетическая энергия $W_к = A$, т. е. $\frac{mv^2}{2} = eU$, откуда найдем $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 10^7$ м/с. Энергия плоского конденсатора $W = \frac{\sigma^2 Sd}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 692$ нДж. Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = 1{,}77$ пФ. Сила притяжения пластин конденсатора $F = 138$ мкН.

9.115. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01\,\text{м}^2$, расстояние между ними $d = 5$ мм. Какая разность потенциалов U была приложена к пластинам конденсатора, если известно, что при разряде конденсатора выделилось $Q = 4{,}19$ мДж тепла?

Решение:

Заряженный конденсатор обладает энергией $W = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d}$. При разрядке конденсатора эта энергия выделяется в виде тепла. Следовательно, $Q = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d}$, откуда $U = \sqrt{\dfrac{2dQ}{\varepsilon\varepsilon_0 S}} =$ $= 21{,}7$ кВ.

9.116. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01\ \text{м}^2$, расстояние между ними $d = 5$ мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Какова будет напряженность E поля конденсатора, если, не отключая его от источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния $d_2 = 5$ см? Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин.

Решение:

Поскольку конденсатор постоянно подключен к источнику, то напряжение на нем не изменяется. Напряженность поля конденсатора при раздвинутых пластинах $E = \dfrac{U}{d_2}$; $E = 60$ кВ/м. Емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ — (1). При увеличении расстояния между пластинами емкость уменьшается. Из формулы $W = \dfrac{CU^2}{2}$ — (2), выражающей энергию W конденсатора через его емкость и напряжение, следует, что энергия конденсатора также уменьшится. Из (1) и (2) следует, что энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_2} = 20$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_2} = 8$ мкДж.

9.117. Решить предыдущую задачу при условии, что сначала конденсатор отключается от источника напряжения, а затем раздвигаются пластины конденсатора.

Решение:

Поскольку конденсатор отключили от источника напряжения, то заряд на его пластинах, а также плотность заряда σ останутся неизменными. Напряженность поля конденсатора $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Как видно из формулы, напряженность при $\sigma = const$ не зависит от расстояния между пластинами, следовательно, после раздвижения пластин напряженность не изменится и ее можно найти по формуле $E = \frac{U}{d_1}$, т. е. $E_1 = E_2 = 150$ кВ/м. Энергия заряженного конденсатора выражается через заряд и емкость формулой $W = \frac{q^2}{2C}$. Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$. Заряд конденсатора равен $q = C_1 U$. Тогда энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_1}$; $W_1 = 20$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \frac{C_1^2 U^2}{2C_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2 d_2}{2d_1}$; $W_2 = 50$ мкДж.

9.118. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01\,\text{м}^2$, расстояние между ними $d_1 = 1$ мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 0{,}1$ кВ. Пластины раздвигаются до расстояния $d_2 = 25$ мм. Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключается; б) отключается.

Решение:

а) Энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_2} = 443$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_2} = 17{,}8$ мкДж (см. задачу 9.116). б) Энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \frac{C_1U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_1}$; $W_1 = 443$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \frac{C_1^2U^2}{2C_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2 d_2}{2d_1}$; $W_2 = 11{,}1$ мкДж (см. задачу 9.117).

9.119. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия при этом $W = 20$ мкДж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить против сил электрического поля, чтобы вынуть диэлектрик, $A = 70$ мкДж. Найти диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика.

Решение:

Энергия конденсатора, заполненного диэлектриком, $W_1 = \frac{C_1U_1^2}{2}$. После удаления диэлектрика емкость конденсатора уменьшилась в ε раз и стала равной $C_2 = \frac{C_1}{\varepsilon}$. Т. к. заряд конденсатора остался прежним, то разность потенциалов в силу связи $q=CU$ увеличилась в ε раз: $U_2=\varepsilon U_1$. Энергия конденсатора после удаления диэлектрика $W_2=\dfrac{C_1U_1^2\varepsilon^2}{2\varepsilon}=W_1\varepsilon$. Работа, совершенная против сил кулоновского притяжения, равна $A=W_2-W_1=W_1(\varepsilon-1)$, отсюда $\varepsilon=\dfrac{A}{W_1}+1$; $\varepsilon=4{,}5$.

9.120. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S=12{,}5\ \text{см}^2$, расстояние между ними $d_1=5$ мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U=6$ кВ. Пластины конденсатора раздвигаются до расстояния $d_2=1$ см. Найти изменение емкости конденсатора ΔC, потока напряженности ΔN_E сквозь площадь электродов и объемной плотности энергии ΔW_0 электрического поля, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключается; б) отключается.

Решение:

а) Если источник напряжения отключается, то разность потенциалов между пластинами конденсатора остается постоянной. Емкость конденсатора $C=\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, отсюда изменение емкости $\Delta C=\varepsilon\varepsilon_0 S\left(\dfrac{1}{d_1}-\dfrac{1}{d_2}\right)$; $\Delta C=1{,}1$ Пф. По теореме Гаусса поток напряженности сквозь любую замкнутую поверхность $N_E=\dfrac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum q_i$, в нашем случае $N_E=\dfrac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$, а изменение потока напряженности $\Delta N_E=\dfrac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(q_1-q_2)$. Поскольку $q_1=C_1U=\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_1}$, а

$q_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_2}$, то $\Delta N_E = SU\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$; $\Delta N_E = 750$ В·м.

Объемная плотность энергии $W_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$, где $E = \frac{U}{d}$. Отсюда $\Delta W_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2}{2}\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\right)$; $\Delta W_0 = 48$ МДж/м^3.

б) Если конденсатор перед раздвижением отключается от источника напряжения, то заряд на пластинах конденсатора остается постоянным. Емкость, как и в случае «а», уменьшится на величину $\Delta C = 1{,}1$ пФ. Поток напряженности не изменится, т. к. $q_1 = q_2$, т. е. $\Delta N_E = 0$. При $q = const$ напряженность $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = const$, т. е. объемная плотность энергии тоже не изменится, $\Delta W_0 = 0$.

9.121. Найти объемную плотность энергии W_0 электрического поля в точке, находящейся: а) на расстоянии $x = 2$ см от поверхности заряженного шара радиусом $R = 1$ см, б) вблизи бесконечно протяженной заряженной плоскости, в) на расстоянии $x = 2$ см от бесконечно длинной заряженной нити. Поверхностная плотность заряда на шаре и плоскости $\sigma = 16{,}7$ мкКл/м^2, линейная плотность заряда на нити $\tau = 167$ нКл/м. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 2$.

Решение:

Объемная плотность энергии $W_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$. а) Напряженность поля на расстоянии x от поверхности заряженного шара $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^2}$, где $q = \sigma \cdot 4\pi R^2$. Тогда $W_0 = \frac{\sigma^2 R^4}{2\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^4}$; $W_0 = 97$ МДж/м^3. б) Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, тогда $W_0=\dfrac{\sigma^2}{8\varepsilon\varepsilon_0}$; $W_0=1{,}97$ Дж/м^3. в) Напряженность поля бесконечной заряженной нити $E=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x}$, тогда $W_0=\dfrac{\tau^2}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$; $W_0=50$ МДж/м^3.

9.122. На пластины плоского конденсатора, расстояние между которыми $d=3$ см, подана разность потенциалов $U=1$ кВ. Пространство между пластинами заполняется диэлектриком ($\varepsilon=7$). Найти поверхностную плотность связанных (поляризационных) зарядов $\sigma_{св}$. Насколько изменяется поверхностная плотность заряда на пластинах при заполнении конденсатора диэлектриком? Задачу решить, если заполненне конденсатора диэлектриком производится: а) до отключения конденсатора от источника напряжения; б) после отключения конденсатора от источника напряжения.

Решение:

Введем обозначения: σ_0 — поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора в отсутствие диэлектрика, $\sigma_д$ — поверхностная плотность заряда на пластинах в присутствии диэлектрика, $\sigma_{св}$ — поверхностная плотность связанных (поляризационных) зарядов на диэлектрике. Совместное действие зарядов $\sigma_д$ и $\sigma_{св}$ таково, как будто бы на границе раздела проводника и диэлектрика имеется заряд, распределенный с плотностью $\sigma=\sigma_д-\sigma_{св}$ — (1). Таким образом, σ — поверхностная плотность «эффективных» зарядов, т. е. зарядов, определяющих суммарное результирующее поле в диэлектрике. Очевидно, величины σ_0, $\sigma_д$ и σ связаны с соответствующими напряженностями поля следующими соотношениями: в отсутствие диэлектрика $E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{U_1}{d}$ — (2); в присутствии диэлектрика $E_2 = \frac{\sigma_д}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{U_2}{d}$ — (3). Из (1) имеем $\sigma_{св} = \sigma_д - \sigma$ или, на основании (3), $\sigma_{св} = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 - \varepsilon_0 E_2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U_2}{d}$. а) До отключения конденсатора от источника напряжения $U_1 = U_2 = U$ и $\sigma_{св} = \varepsilon_0 \times (\varepsilon - 1)\frac{U}{d} = 17{,}7\,мкКл/м^2$. Изменение поверхностной плотности заряда при заполнении конденсатора диэлектриком $\sigma_д - \sigma_0 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d} = \sigma_{св} = 17{,}7\,мкКл/м^2$. Таким образом, благодаря источнику напряжения на пластинах конденсатора появятся добавочные заряды, компенсирующие уменьшение заряда, вызванное поляризацией диэлектрика. б) После отключения конденсатора от источника напряжения $q = const$ и $U_2 = \frac{\varepsilon_1 U_1}{\varepsilon_2}$ (см. решение 9.87) и $\sigma_{св} = \varepsilon_0 \times (\varepsilon - 1)\frac{U_2}{d}\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{\varepsilon_1 U_1}{\varepsilon_2 d} = 2{,}53\,мкКл/м^2$. Т. к. $q = const$, то $\sigma_{св} = \sigma_0$, т. е. поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора не изменяется.

9.123. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая восприимчивость которого $\aleph = 0{,}08$. Расстояние между пластинами $d = 5$ мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U = 4$ кВ. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике и поверхностную плотность заряда $\sigma_д$ на пластинах конденсатора.

Решение:

Поляризованность P, численно равная поверхностной плотности связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике, пропорциональна напряженности поля в диэлектрике, т. е. $P = \sigma_{св} = \aleph' E$. В системе СИ диэлектрическая восприимчивость $\aleph'$ имеет размерность фарад на метр. Можно показать, что $\aleph' = 4\pi\varepsilon_0\aleph$, где $\aleph$ — безразмерная величина (табличное значение диэлектрической восприимчивости). Тогда поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрике $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0\aleph E = 4\pi\varepsilon_0\aleph\frac{U}{d} = 7{,}1$ мкКл/м^2. Найдем диэлектрическую проницаемость диэлектрика. Т. к. $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)E$ (см. задачу 9.122), то $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0\aleph E = \varepsilon_0(\varepsilon-1)E$, откуда $\varepsilon - 1 = 4\pi\aleph$, или $\varepsilon = 1 + 4\pi\aleph = 1 + 4\pi\cdot 0{,}8 = 2$. Тогда $E = \frac{U}{d} = \frac{\sigma_д}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Отсюда поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора $\sigma_д = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} = 14$ мкКл/м^2.

9.124. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом. Расстояние между пластинами $d = 4$ мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U = 1{,}2$ кВ. Найти: а) напряженность E поля в стекле; б) поверхностную плотность заряда $\sigma_д$ на пластинах конденсатора; в) поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на стекле; г) диэлектрическую восприимчивость $\aleph$ стекла.

Решение:

а) Напряженность поля в стекле $E = \frac{U}{d} = 300$ кВ/м (см. задачу 9.122). Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 6$.
б) Поверхностная плотность заряда на пластинах равна

$\sigma_д = \dfrac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} = 15{,}9$ мкКл/м^2 (см. задачу 9.123). в) Поверхностная плотность зарядов на стекле равна $\sigma_{св} = \varepsilon_0 \times \times (\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d} = 13{,}3$ мкКл/м^2 (см. задачу 9.122). г) Диэлектрическая восприимчивость стекла и поверхностная плотность связанных зарядов связаны соотношением $\sigma_{св} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \aleph U}{d}$ (см. задачу 9.123). Отсюда $\aleph = \dfrac{\sigma_{св} d}{4\pi\varepsilon_0 U} = 0{,}4$.

9.125. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено маслом. Расстояние между пластинами $d = 1$ см. Какую разность потенциалов U надо подать на пластины конденсатора, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на масле была равна $\sigma_{св} = 6{,}2$ мкКл/м^2?

Решение:

Имеем $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d}$ — (1) (см. задачу 9.122). Диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon = 5$. Из (1) $U = \dfrac{\sigma_{св} d}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} = 1{,}75$ кВ.

9.126. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом. Площадь пластин конденсатора $S = 0{,}01$ м^2. Пластины конденсатора притягиваются друг к другу с силой $F = 4{,}9$ мН. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на стекле.

Решение:

Имеем $F = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}$ — (1). Поверхностная плотность зарядов на стекле равна $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d}$ (см. задачу 9.122).

Из (1) $\frac{U}{d}=\sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$. Тогда $\sigma_{св}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$; $\sigma_{св}=0{,}6$ мкКл/м^2.

9.127. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафином. При присоединении пластин к источнику напряжения давление пластин на парафин стало равным $p=5$ Па. Найти: а) напряженность E электрического поля и электрическое смещение D в парафине; б) поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на парафине; в) поверхностную плотность заряда $\sigma_{св}$ на пластинах конденсатора; г) объемную плотность энергии W_0 электрического поля в парафине; д) диэлектрическую восприимчивость $\aleph$ парафина.

Решение:

а) Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора $F=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2}$, откуда $E=\sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$. Поскольку давление $p=\frac{F}{S}$, то $E=\sqrt{\frac{2p}{\varepsilon\varepsilon_0}}=752$ кВ/м. Электрическое смещение $D=\varepsilon\varepsilon_0 E=13{,}3$ мкКл/м^2. б) Имеем $\sigma_{св}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\times$ $\times\sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$ (см. задачу 9.126). С учетом $p=\frac{F}{S}$ имеем $\sigma_{св}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\sqrt{\frac{2p}{\varepsilon\varepsilon_0}}=6{,}7$ мкКл/м^2. в) Поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора $\sigma_д=\varepsilon\varepsilon_0 E=D$; $\sigma_д=13{,}3$ мкКл/м^2. г) Объемная плотность энергии $W_0=\frac{ED}{2}=5$ Дж/м^2. д) Имеем $\sigma_{св}=4\pi\varepsilon_0\aleph E$ (см. задачу 9.123), отсюда $\aleph=\frac{\sigma_{св}}{4\pi\varepsilon_0 E}=0{,}08$.

9.128. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком. Расстояние между пластинами $d = 2$ мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U_1 = 0{,}6$ кВ. Если, отключив источник напряжения, вынуть диэлектрик из конденсатора, то разность потенциалов на пластинах конденсатора возрастет до $U_2 = 1{,}8$ кВ. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике и диэлектрическую восприимчивость $\aleph$ диэлектрика.

Решение:

После отключения конденсатора от источника напряжения $q = const$ и $U_2 = \varepsilon U_1$ — (1). Из решения задачи 9.122 имеем $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U_1}{d}$. Найдем из (1) $\varepsilon = \dfrac{U_2}{U_1}$. Тогда $\sigma_{св} = \varepsilon_0\left(\dfrac{U_2}{U_1} - 1\right)\dfrac{U_1}{d}$; $\sigma_{св} = 5{,}3$ мкКл/м^2. Поверхностная плотность связанных зарядов и диэлектрическая восприимчивость диэлектрика связаны соотношением $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0\aleph\dfrac{U_1}{d}$. Отсюда $\aleph = \dfrac{d\sigma_{св}}{4\pi\varepsilon_0 U_1}$; $\aleph = 0{,}159$.

9.129. Пространство между пластинами плоского конденсатора объемом $V = 20$ см^3 заполнено диэлектриком ($\varepsilon = 5$). Пластины конденсатора присоединены к источнику напряжения. При этом поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрике $\sigma_{св} = 8{,}35$ мкКл/м^2. Какую работу A надо совершить против сил электрического поля, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора? Задачу решить, если удаление диэлектрика производится: а) до отключения источника напряжения; б) после отключения источника напряжения.

Решение:

Работа A против сил кулоновского поля равна изменению энергии конденсатора $\Delta W = A$. а) До отключения конденсатора от источника напряжения $U_1 = U_2 = U$ и

$\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d}$ — (1) (см. задачу 9.122). Энергия конденсатора с диэлектриком $W_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U}{d}\right)^2$. Энергия конденсатора без диэлектрика $W_2 = \dfrac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U}{d}\right)^2$. Отсюда $\Delta W = \dfrac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U}{d}\right)^2(1-\varepsilon)$. Из (1) найдем $\dfrac{U}{d} = \dfrac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}$, или $-\dfrac{U}{d} = \dfrac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}$, тогда $\Delta W = \dfrac{V\sigma_{св}^2}{2\varepsilon_0(1-\varepsilon)} = -19{,}7$ мкДж, т. е. энергия конденсатора уменьшилась, следовательно, работа сил поля положительна, а работа против них отрицательна. Тогда $A = -19{,}7$ мкДж. б) Если конденсатор отключен от источника, то $q = const$ и $U_2 = \varepsilon U_1$ — (1). Энергия конденсатора с диэлектриком $W_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U_1}{d}\right)^2$. Энергия конденсатора без диэлектрика $W_2 = \dfrac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U_2}{d}\right)^2$. Отсюда $\Delta W = \dfrac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\varepsilon^2\left(\dfrac{U_1}{d}\right)^2 - \varepsilon^2\left(\dfrac{U_2}{d}\right)^2\right)$; $\Delta W = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U_1}{d}\right)^2(\varepsilon - 1)$.

Поскольку $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U_1}{d}$, откуда $\dfrac{U_1}{d} = \dfrac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}$, то $\Delta W = \dfrac{\varepsilon V\sigma_{св}^2}{2\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}$; $\Delta W = 98$ мкДж, т. е. энергия конденсатора увеличилась, следовательно, работа сил поля отрицательна, а работа против них положительна. Тогда $A = 98$ мкДж.

§ 10. Электрический ток

В этом разделе используются данные таблиц 3, 15, 16 и 17 из приложения. В задачах 10.48, 10.126 дан авторский вариант решения.

10.1. Ток I в проводнике меняется со временем t по уравнению $I = 4 + 2t$, где I — в амперах и t — в секундах. Какое количество электричества q проходит через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с? При каком постоянном токе I_0 через поперечное сечение проводника за то же время проходит такое же количество электричества?

Решение:

По определению сила тока $I = \dfrac{dq}{dt}$, отсюда $dq = Idt$;

$$q = \int_{t_1}^{t_2} Idt; \quad q = \int_{t_1}^{t_2} (4 + 2t)dt = 4t\Big|_{t_1}^{t_2} + t^2\Big|_{t_1}^{t_2}; \quad q = 4(t_2 - t_1) + t_2^2 - t_1^2;$$

$q = 48$ Кл. При постоянном токе $I_0 = \dfrac{q}{t}$, где $t = t_2 - t_1 = 4$ с. Подставляя числовые значения, получим $I_0 = 12$ А.

10.2. Ламповый реостат состоит из пяти электрических лампочек сопротивлением $r = 350$ Ом, включенных параллельно. Найти сопротивление R реостата, когда: а) горят все лампочки; б) вывинчиваются одна, две, три, четыре лампочки.

Решение:

а) Если лампочки включены параллельно, то их общее сопротивление R находится по формуле $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} +$ $+ \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{1}{r_4} + \dfrac{1}{r_5}$. Т. к. сопротивления всех лампочек одинаковы и равны r, то $\frac{1}{R}=\frac{5}{r}$, откуда $R=\frac{r}{5}$; $R=70$ Ом.

б) Если выкрутить одну лампочку, то $R=\frac{r}{4}=87{,}5$ Ом; две лампочки — $R=\frac{r}{3}=116{,}7$ Ом; три лампочки — $R=\frac{r}{2}=175$ Ом; четыре лампочки — $R=r=350$ Ом.

10.3. Сколько витков нихромовой проволоки диаметром $d=1$ мм надо навить на фарфоровый цилиндр радиусом $a=2{,}5$ см, чтобы получить печь сопротивлением $R=40$ Ом?

Решение:

Сопротивление проводника можно рассчитать по формуле $R=\rho\frac{l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление (для нихрома $\rho=100$ мкОм·м), l — длина проводника, S — площадь его поперечного сечения. Длина одного витка равна $2\pi a$, тогда длина всей проволоки $l=N\cdot 2\pi a$ — (2), где N — количество витков. Площадь поперечного сечения $S=\pi\frac{d^2}{4}$ — (3). Подставив (3) и (2) в (1), получим $R=\rho\frac{8Na}{d^2}$, откуда $N=\frac{Rd^2}{8\rho a}$; $N=200$.

10.4. Катушка из медной проволоки имеет сопротивление $R=10{,}8$ Ом. Масса медной проволоки $m=3{,}41$ кг. Какой длины l и какого диаметра d проволока намотана на катушке?

Решение:

Сопротивление катушки $R=\rho\frac{l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление меди, l — длина проволоки, S — площадь ее поперечного сечения. Масса проволоки $m=V\rho_м$, где

V — объем проволоки, $\rho_м$ — плотность меди. Поскольку $V = S \cdot l$, то $m = Sl\rho_м$, откуда $l = \dfrac{m}{S\rho_м}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $R = \rho \dfrac{m}{S^2 \rho_м}$, отсюда $S = \sqrt{\dfrac{\rho m}{R\rho_м}}$ — (3). С другой стороны, $S = \pi \dfrac{d^2}{4}$ — (4), т. е. $\pi \dfrac{d^2}{4} = \sqrt{\dfrac{\rho m}{R\rho_м}}$, откуда $d = \sqrt[4]{\dfrac{16\rho m}{\pi^2 R\rho_м}}$; $d = 1$ мм. Подставив (4) в (2), получим $l = \dfrac{4m}{\pi d^2 \rho_м}$; $l = 505$ м.

10.5. Найти сопротивление R железного стержня диаметром $d = 1$ см, если масса стержня $m = 1$ кг.

Решение:

Сопротивление стержня можно определить по формуле $R = \rho \dfrac{l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление железа, l — длина стержня, S — площадь его поперечного сечения. Длина стержня $l = \dfrac{4m}{\pi d^2 \rho_ж}$ (см. задачу 10.4), где $\rho_ж$ — плотность железа. Площадь поперечного сечения $S = \pi \dfrac{d^2}{4}$, тогда $R = \rho \dfrac{16m}{\pi^2 d^4 \rho_ж}$; $R = 1{,}8$ мОм.

10.6. Медная и алюминиевая проволоки имеют одинаковую длину l и одинаковое сопротивление R. Во сколько раз медная проволока тяжелее алюминиевой?

Решение:

Имеем: удельное сопротивление меди $\rho_м = 0{,}017$ мкОм·м, удельное сопротивление алюминия $\rho_а = 0{,}025$ мкОм·м; плотность меди $\rho'_м = 2{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho'_а = 2{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Сопротивление проволоки $R = \rho \frac{l}{S}$, где S — площадь поперечного сечения, $S = \frac{V}{l} = \frac{m}{\rho' l}$. Согласно условию $R = \rho_в \frac{l}{S_а} = \rho_м \frac{l}{S_м}$, откуда $\frac{\rho_а}{S_а} = \frac{\rho_м}{S_м}$ или $\frac{\rho_а \cdot \rho'_а}{m_а} = \frac{\rho_м \cdot \rho'_м}{m_м}$. Отсюда $\frac{m_м}{m_а} = \frac{\rho_м \cdot \rho'_м}{\rho_а \cdot \rho'_а} = 2{,}2$.

10.7. Вольфрамовая нить электрической лампочки при $t_1 = 20°$ С имеет сопротивление $R_1 = 35{,}8$ Ом. Какова будет температура t_2 нити лампочки, если при включении в сеть напряжением $U = 120$ В по нити идет ток $I = 0{,}33$ А? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Решение:

Зависимость сопротивления нити от температуры выражается соотношением $R_1 = R_0(1 + \alpha T_1)$, где R_0 — сопротивление нити при температуре $t_0 = 0°$ С. Отсюда $R_0 = \frac{R_1}{1 + \alpha T_1} = 32{,}8$ Ом. По закону Ома $I = \frac{U}{R_2}$, откуда $R_2 = \frac{U}{I} = 364$ Ом. Поскольку $R_2 = R_0(1 + \alpha T_2)$, то $T_2 = \frac{R_2 - R_0}{R_0 \alpha} = 1927$ К.

10.8. Реостат из железной проволоки, амперметр и генератор включены последовательно. При $t_0 = 0°$ С сопротивление реостата $R_0 = 120$ Ом, сопротивление амперметра $R_{A0} = 20$ Ом. Амперметр показывает ток $I_0 = 22$ мА. Какой ток I будет показывать амперметр, если реостат нагреется на $\Delta T = 50$ К? Температурный коэффициент сопротивления железа $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}\ К^{-1}$.

Решение:

Запишем закон Ома для первоначального состояния цепи: $I_0 = \dfrac{U}{R_0 + R_{A0}}$ — (1). После того как реостат нагрелся, его сопротивление R_0 изменилось и стало равным R. Амперметр стал показывать ток $I = \dfrac{U}{R + R_{A0}}$ — (2). Сопротивление реостата можно найти по формуле $R = \rho\dfrac{l}{S}$ — (3). Удельное сопротивление ρ зависит от температуры следующим образом: $\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta T)$ — (4). В первоначальном состоянии $R_0 = \rho_0\dfrac{l}{S}$, откуда $\dfrac{l}{S} = \dfrac{R_0}{\rho_0}$ — (5). Подставив (4) и (5) в (3), получим $R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$ — (6). Из (1) найдем $U = I_0(R_0 + R_{A0})$ — (7). Подставляя (6) и (7) в (2), найдем $I = \dfrac{I_0(R_0 + R_{A0})}{R_0(1 + \alpha\Delta T) + R_{A0}}$; $I = 17{,}5$ мА.

10.9. Обмотка катушки из медной проволоки при $t_1 = 14°$ С имеет сопротивление $R_1 = 10$ Ом. После пропускания тока сопротивление обмотки стало равным $R_2 = 12{,}2$ Ом. До какой температуры нагрелась обмотка? Температурный коэффициент сопротивления меди $\alpha = 4{,}15 \cdot 10^{-3}\ К^{-1}$.

Решение:

Сопротивление катушки до нагревания $R_1 = \rho_1 \frac{l}{S} = \rho_0(1+\alpha t_1)\frac{l}{S}$ — (1). Сопротивление катушки после нагревания $R_2 = \rho_2 \frac{l}{S} = \rho_0(1+\alpha t_2)\frac{l}{S}$ — (2). Разделив (2) на (1), получим $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1}$, откуда $1+\alpha t_2 = \frac{R_2}{R_1}(1+\alpha t_1)$; $t_2 = \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1}{\alpha}+t_1\right)-\frac{1}{\alpha}$; $t_2 \approx 70°$ C.

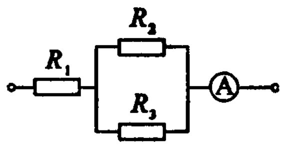
10.10. Найти падение потенциала U на медном проводе длиной $l = 500$ м и диаметром $d = 2$ мм, если ток в нем $I = 2$ А.

Решение:

Ток, текущий по участку однородного проводника, подчиняется закону Ома $I = \frac{U}{R}$, где U — падение потенциала на этом участке, R — сопротивление участка. Сопротивление провода $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление меди, l — длина провода, S — площадь его поперечного сечения. Т. к. $S = \pi \frac{d^2}{4}$, то $R = \rho \frac{4l}{\pi d^2}$. Из закона Ома $U = IR = I\rho \frac{4l}{\pi d^2}$. Подставив числовые значения, найдем $U = 5{,}4$ В.

10.11. Найти падения потенциала U в сопротивлениях $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 2$ Ом и $R_3 = 4$ Ом, если амперметр показывает ток $I_1 = 3$ А. Найти токи I_2 и I_3 в сопротивлениях R_2 и R_3.

Решение:



По закону Ома $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$, откуда $U_1 = I_1 R_1 = 12$ Ом. Полное сопротивление цепи $R = R_1 + R_{23}$, где $\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$; $R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{8}{6}$ Ом. Падение потенциала на всем участке цепи $U = U_1 + U_{23}$. При параллельном сопротивлении все сопротивления находятся под одной разностью потенциала, следовательно, $U_{23} = U_2 = U_3$. Согласно закону Ома $U = I_1 R = I_1(R_1 + R_{23})$, тогда $U_2 = U_3 = U - U_1$; $U_2 = U_3 = I_1(R_1 + R_{23}) - U_1 = 4$ В. Сопротивление R_1 и эквивалентное сопротивление R_{23} соединены последовательно, следовательно, токи, текущие через них, равны $I_1 = I_{23}$, где $I_{23} = I_2 + I_3$, т. е. $I_1 = I_2 + I_3$. По закону Ома $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 2$ А, тогда $I_3 = I_1 - I_2 = 1$ А.

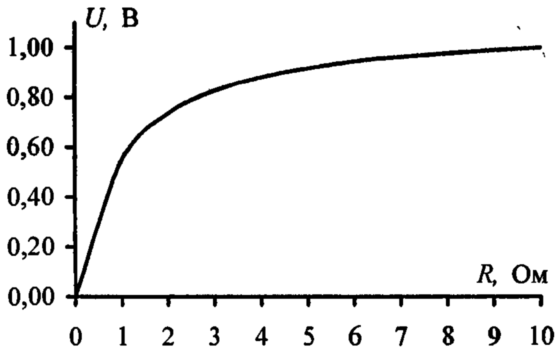
10.12. Элемент, имеющий э.д.с. $\varepsilon = 1{,}1$ В и внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом, замкнут на внешнее сопротивление $R = 9$ Ом. Найти ток I в цепи, падение потенциала U во внешней цепи и падение потенциала U_r внутри элемента. С каким к.п.д. η работает элемент?

Решение:

Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$; $I = 0{,}11$ А. Согласно закону Ома для однородного участка цепи $I = \frac{U}{R}$, откуда $U = IR = 0{,}99$ В. Кроме того, $I = \frac{U_r}{r}$, откуда $U_r = I \cdot r = 0{,}11$ В. К.п.д. источника тока равен отношению мощности P_1, выделяемой внешним участком цепи (полезной мощности), к полной мощности P, развиваемой источником: $\eta = \frac{P_1}{P}$, где $P_1 = I^2 R$; $P = \varepsilon I$. Тогда к.п.д. источника $\eta = \frac{IR}{\varepsilon}$; $\eta = 0{,}9$.

10.13. Построить график зависимости падения потенциала U во внешней цепи от внешнего сопротивления R для цепи предыдущей задачи. Сопротивление R взять в пределах $0 \le R \le 10$ Ом через каждые 2 Ом.

Решение:



Имеем $U = IR$, где согласно закону Ома для замкнутой цепи $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$. Тогда $U = \frac{\varepsilon}{R + r} R = \frac{1{,}1}{1 + R} R$. Для заданного интервала значений R составим таблицу и построим график. На графике видно, что кривая асимптотически приближается к прямой $U = \varepsilon = 1{,}1$ В.

R, Ом	0,00	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00
U, В	0,00	0,73	0,88	0,94	0,98	1,00

10.14. Элемент с э.д.с. $\varepsilon = 2$ В имеет внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом. Найти падение потенциала U_r внутри элемента при токе в цепи $I = 0,25$ А. Каково внешнее сопротивление цепи R при этих условиях?

Решение:

Падение потенциала внутри элемента $U_r = I \cdot r = 0,125$ В (см. задачу 10.12). Согласно закону Ома для замкнутой цепи сила тока $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$, откуда $R = \dfrac{\varepsilon}{I} - r$; $R = 7,5$ Ом.

10.15. Элемент с э.д.с. $\varepsilon = 1,6$ В имеет внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом. Найти к.п.д. η элемента при токе в цепи $I = 2,4$ А.

Решение:

К.п.д. элемента $\eta = \dfrac{IR}{\varepsilon}$ (см. задачу 10.12). По закону Ома для замкнутой цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$, откуда $R = \dfrac{\varepsilon - I \cdot r}{I}$. Тогда $\eta = \dfrac{\varepsilon - Ir}{\varepsilon} = 25\%$.

10.16. Э.д.с. элемента $\varepsilon = 6$ В. При внешнем сопротивлении $R = 1,1$ Ом ток в цепи $I = 3$ А. Найти падение потенциала U_r внутри элемента и его сопротивление r.

Решение:

Согласно второму закону Кирхгоффа $U_r + IR = \varepsilon$, откуда $U_r = \varepsilon - IR$; $U_r = \varepsilon - IR = 2,7$ В. По закону Ома для участка цепи $I = \dfrac{U_r}{r}$, откуда $r = IU_r = 0,9$ Ом.

10.17. Какую долю э.д.с. элемента ε составляет разность потенциалов U на его зажимах, если сопротивление элемента r в

n раз меньше внешнего сопротивления R? Задачу решить для: а) $n = 0{,}1$; б) $n = 1$; в) $n = 10$.

Решение:

Согласно закону Ома сила тока $I = \frac{U}{R} = \frac{\varepsilon}{R+r}$. По условию $R = nr$, тогда $\frac{U}{nr} = \frac{\varepsilon}{r(n+1)}$. Отсюда $\frac{U}{\varepsilon} = \frac{n}{n+1}$.

а) $\frac{U}{\varepsilon} = 9{,}1\%$; б) $\frac{U}{\varepsilon} = 50\%$; в) $\frac{U}{\varepsilon} = 91\%$.

10.18. Элемент, сопротивление и амперметр соединены последовательно. Элемент имеет э.д.с. $\varepsilon = 2$ В и внутрениее сопротивление $r = 0{,}4$ Ом. Амперметр показывает ток $I = 1$ А. С каким к.п.д. η работает элемент?

Решение:

К.п.д. элемента $\eta = \frac{\varepsilon - I_r}{\varepsilon}$ (см. задачу 10.15), $\eta = 80\%$.

10.19. Имеются два одинаковых элемента с э.д.с. $\varepsilon = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}3$ Ом. Как надо соединить эти элементы (последовательно или параллельно), чтобы получить больший ток, если внешнее сопротивление: а) $R = 0{,}2$ Ом; б) $R = 16$ Ом? Найти ток I в каждом из этих случаев.

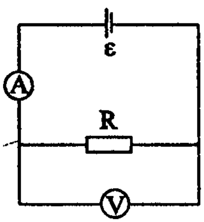
Решение:

Согласно закону Ома для замкнутой цепи сила тока $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$. При последовательном соединении элементов их эквивалентное сопротивление равно $2r$, а суммарная э.д.с. равна 2ε. Тогда $I_1 = \frac{2\varepsilon}{R+2r}$. При параллельном соединении их эквивалентное сопротивление равно $0{,}5r$, а суммарная э.д.с. равна ε. Тогда $I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R+0{,}5r}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $I_1 = 5$ А, $I_2 = 5{,}7$ А; б) $I_1 = 0{,}24$ А, $I_2 = 0{,}124$ А. Т. е. при маленьком внешнем сопротивлении элементы выгоднее соединять параллельно, а при большом — последовательно.

10.20. Считая сопротивление вольтметра R_V бесконечно большим, определяют сопротивление R по показаниям амперметра и вольтметра. Найти относительную погрешность $\dfrac{\Delta R}{R}$ найденного сопротивления, если в действительности сопротивление вольтметра равно R_V. Задачу решить для $R_V = 1000$ Ом и сопротивления: а) $R = 10$ Ом; б) $R = 100$ Ом; в) $R = 1000$ Ом.

Решение:

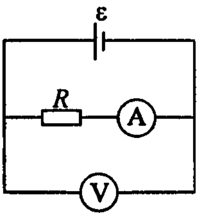
Общее сопротивление резистора и вольтметра, т. к. они соединены параллельно, можно найти по формуле $R_{об} = \dfrac{RR_V}{R+R_V}$.



Тогда $\Delta R = R - R_{об} = R\left(1 - \dfrac{R_V}{R+R_V}\right)$, а следовательно, $\dfrac{\Delta R}{R} = 1 - \dfrac{R_V}{R+R_V}$. а) Если $R = 10$ Ом, то $\dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}01 = 1\%$. б) Если $R = 100$ Ом, то $\dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}1 = 10\%$. в) Если $R = 1000$ Ом, то $\dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}5 = 50\%$.

10.21. Считая сопротивление амперметра R_A бесконечно малым, определяют сопротивление R по показаниям амперметра и вольтметра. Найти относительную погрешность $\dfrac{\Delta R}{R}$ найденного сопротивления, если в действительности сопротивление амперметра равно R_A. Решить задачу для $R_A = 0{,}2$ Ом и сопротивления: а) $R = 1$ Ом; б) $R = 10$ Ом; в) $R = 100$ Ом.

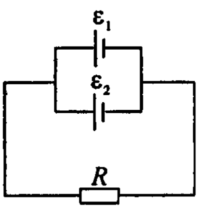
Решение:



Общее сопротивление резистора и амперметра, т. к. они соединены последовательно, можно найти по формуле $R_{об} = R + R_A$. Тогда $\Delta R = |R - R_{об}| = R_A$, а следовательно, $\dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{R_A}{R}$. а) Если $R = 1$ Ом, то $\dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}2 = 20\%$. б) Если $R = 10$ Ом, то $\dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}02 = 2\%$. в) Если $R = 100$ Ом, то $\dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}002 = 0{,}2\%$.

10.22. Два параллельно соединенных элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 1{,}5$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление $R = 1{,}4$ Ом. Найти ток I в каждом из элементов и во всей цепи.

Решение:



При параллельном соединении источников тока с одинаковыми э.д.с. общее внутреннее сопротивление $r = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}6$ Ом, а общая э.д.с. $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В. По закону Ома для полной цепи ток через сопротивление R: $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r} = 1$ А. Согласно первому закону Кирхгоффа $I = I_1 + I_2$ — (1), где I_1 и I_2 — соответственно токи через первый и второй элементы, и т. к. элементы соединены параллельно, то $r_1 I_1 = r_2 I_2$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), находим, что $I_1 = \frac{I r_1}{r_1 + r_2} = 0{,}4$ А и $I_2 = \frac{I r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}6$ А.

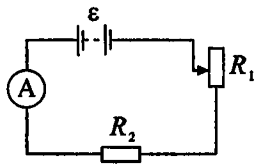
10.23. Два последовательно соединенных элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 1{,}5$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление $R = 0{,}5$ Ом. Найти разность потенциалов U на зажимах каждого элемента.

Решение:

Согласно закону Ома для замкнутой цепи при последовательном соединении элементов сила тока в цепи равна $I = \frac{2\varepsilon}{R + r_1 + r_2} = 1{,}33$ А. Разность потенциалов на зажимах первого элемента $U_1 = \varepsilon - I r_1 = 0{,}66$ В. Разность потенциалов на зажимах второго элемента $U_2 = \varepsilon - I r_2 = 0$.

10.24. Батарея с э.д.с. $\varepsilon = 20$ В, амперметр и реостаты с сопротивлениями R_1 и R_2 соединены последовательно. При выведенном реостате R_1 амперметр показывает ток $I = 8$ А, при введенном реостате R_1 — ток $I = 5$ А. Найти сопротивления R_1 и R_2 реостатов и падения потенциала U_1 и U_2 на них, когда реостат R_1 полностью включен.

Решение:

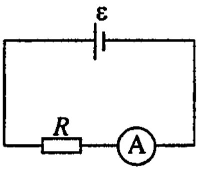


Задачу решаем в предположении равенства нулю внутреннего сопротивления э.д.с. и сопротивления амперметра. По закону Ома для всей цепи при выведенном реостате R_1 ток

$I_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_2}$ — (1), а при введенном реостате R_1 ток $I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), находим $R_2 = \dfrac{\varepsilon}{I_1} = 2{,}5$ Ом; $R_1 = \dfrac{\varepsilon}{I_1} - R_2 = 1{,}5$ Ом. По закону Ома для участка цепи падение потенциалов на реостатах $U_1 = I_2 R_1 = 7{,}5$ В; $U_2 = I_2 R_2 = 12{,}5$ В.

10.25. Элемент, амперметр и некоторое сопротивление соединены последовательно. Если взять сопротивление из медной проволоки длиной $l = 100$ м и поперечным сечением $S = 2$ мм^2, то амперметр показывает ток $I_1 = 1{,}43$ А. Если же взять сопротивление из алюминиевой проволоки длиной $l = 57{,}3$ м и поперечным сечением $S = 1$ мм^2, то амперметр показывает ток $I_2 = 1$ А. Сопротивление амперметра $R_A = 0{,}05$ Ом. Найти э.д.с. ε элемента и его внутреннее сопротивление r.

Решение:



По закону Ома для полной цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{r + R_A + R}$, где сопротивление $R = \rho \dfrac{l}{S}$, ρ — удельное сопротивление материала проволоки. Тогда для медной и алюминиевой проволоки соответственно имеем

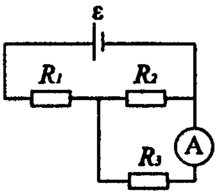
$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + R_A + \rho_1 l_1 / S_1} \text{ — (1) и } I_2 = \frac{\varepsilon}{r + R_A + \rho_2 l_2 / S_2} \text{ — (2).}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим выражение для внутреннего сопротивления источника тока

$$r=\frac{I_2(R_A+\rho_2 l_2/S_2)-I_2(R_A+\rho_1 l_1/S_1)}{I_1-I_2}=0{,}5\text{ Ом}.$$ Из (1) э.д.с. источника тока $\varepsilon=I_1\left(r+R_A+\rho_1\frac{l_1}{S_1}\right)=2\text{ В}$.

10.26. Напряжение на зажимах элемента в замкнутой цепи $U=2{,}1\text{ В}$, сопротивления $R_1=5\text{ Ом}$, $R_2=6\text{ Ом}$ и $R_3=3\text{ Ом}$. Какой ток I показывает амперметр?

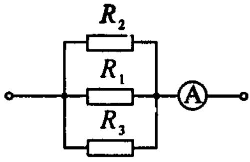
Решение:



Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_1=I_2+I_3$ — (1), где I_1, I_2 и I_3 соответственно токи через сопротивления R_1, R_2 и R_3. Т. к. элемент и сопротивления R_1 и R_3 соединены последовательно, то $U=U_1+U_2$, и т. к. по закону Ома для участка цепи $U_1=I_1R_1$ и $U_2=I_2R_2$, то $U=I_1R_1+I_2R_2$ — (2). Т. к. сопротивления R_2 и R_3 соединены параллельно, то $U_2=U_3$, или т. к. по закону Ома для участка цепи $U_3=I_3R_3$, то $I_2R_2=I_3R_3$ — (3). Амперметр покажет ток через сопротивление R_3. Выражая из уравнений (2) и (3) соответственно токи I_1, I_2 и подставляя их в уравнение (1), окончательно получаем $I_3=\frac{UR_2}{R_3R_1+R_3R_2+R_1R_2}=0{,}2\text{ А}$.

10.27. Сопротивления $R_2=20\text{ Ом}$ и $R_3=15\text{ Ом}$. Через сопротивление R_2 течет ток $I_2=0{,}3\text{ А}$. Амперметр показывает ток $I=0{,}8\text{ А}$. Найти сопротивление R_1.

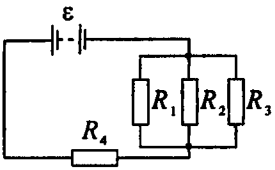
Решение:



При параллельном соединении сопротивлений ток, текущий через эквивалентное сопротивление R_{123}, равен сумме токов, текущих через R_1, R_2, R_3. $I = I_1 + I_2 + I_3$. При этом все сопротивления находятся под одной разностью потенциалов, т. е. $U = U_1 = U_2 = U_3$. Согласно закону Ома $U = I_2 R_2$. Сила тока $I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{I_2 R_2}{R_3} = 0{,}4$ А, тогда $I_1 = I - I_2 - I_3$; $I_1 = 0{,}1$ А. Искомое сопротивление $R_1 = \frac{U}{I_1} = 60$ Ом.

10.28. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 100$ В, сопротивления $R_1 = R_3 = 40$ Ом, $R_2 = 80$ Ом и $R_4 = 34$ Ом. Найти ток I_2, текущий через сопротивление R_2, и падение потенциала U_2 на нем.

Решение:



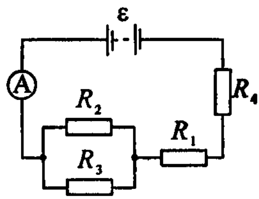
Для параллельного участка цепи $I_{123} = I_1 + I_2 + I_3$; $U_{123} = U_1 + U_2 + U_3$. Ток, текущий через сопротивление $R_и$ и эквивалентное сопротивление R_{123}, $I = I_4 = I_{123}$; $I = \frac{\varepsilon}{R}$.

Найдем сопротивление параллельного участка: $\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{16}$ Ом$^{-1}$, следовательно, $R_{123} = 16$ Ом.

Полное сопротивление цепи $R = R_{123} + R_4 = 50$ Ом. Тогда $I = 2$ А. Напряжение на зажимах источника $U = \varepsilon - I \cdot r$, но т. к. $r \to 0$, то $U = \varepsilon$. Падение напряжения на сопротивлении R_4: $U_4 = IR_4 = 68$ В, но $U = U_{123} + U_4$, следовательно, $U_{123} = U_2 = U - U_4$; $U_2 = 32$ В. Тогда $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 0{,}4$ А.

10.29. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 120$ В, сопротивления $R_3 = 20$ Ом и $R_4 = 25$ Ом. Падение потенциала на сопротивлении R_1 равно $U_1 = 40$ В. Амперметр показывает ток $I = 2$ А. Найти сопротивление R_2.

Решение:



Падение напряжения на параллельном участке цепи $U_{23} = \varepsilon - U_1 - U_4$ — (1), где $U_4 = IR_4 = 50$ В — (2). Кроме того, $U_{23} = U_2 = U_3$. Сумма токов, протекающих через сопротивления R_2 и R_3, равна току, который показывает амперметр. $I_2 + I_3 = I$ — (3). Из (1) и (2) найдем $U_{23} = 30$ В, тогда по закону Ома $I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = 1{,}5$ А, а $I_2 = I - I_3 = 0{,}5$ А. Также по закону Ома $I_2 = \frac{U_{23}}{R_2}$, откуда $R_2 = \frac{U_{23}}{I_2} = 60$ Ом.

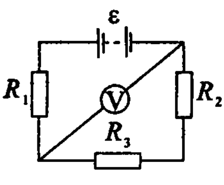
10.30. Батарея с э.д.с. $\varepsilon = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом имеет к.п.д. $\eta = 0{,}8$ (см. рисунок к задаче 10.29). Падения потенциала на сопротивлениях R_1 и R_4 равны $U_1 = 4$ В и $U_4 = 2$ В. Какой ток I показывает амперметр? Найти падение потенциала U_2 на сопротивлении R_2.

Решение:

По закону Ома для замкнутой цепи ток, текущий через амперметр, равен $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ — (1). Полное сопротивление цепи R найдем из соотношения $\eta = \frac{R}{R + r}$, откуда $R = \frac{r\eta}{1 - \eta} = 4$ Ом. Тогда из (1) ток $I = 2$ А. Согласно второму закону Кирхгоффа $U_1 + 2U_2 + U_4 = \varepsilon$, отсюда $U_2 = \frac{\varepsilon - U_1 - U_4}{2} = 2$ В.

10.31. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 100$ В, сопротивления $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом и $R_3 = 300$ Ом, сопротивление вольтметра $R_{V} = 2$ кОм. Какую разность потенциалов U показывает вмперметр?

Решение:



По закону Ома для замкнутой цепи ток, текущий через сопротивление R_1 и через эквивалентное сопротивление параллельного участка цепи R', равен $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ или, поскольку внутренним сопротивлением источника r мы пренебрегаем, $I = \frac{\varepsilon}{R}$ — (1). Полное сопротивление цепи $R = R_1 + R'$ — (2). Эквивалентное сопротивление R' найдем из соотношения: $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_2 + R_3}$; $R' = \frac{R_V(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_V} = 400$ Ом. Тогда из (2) получим $R = 500$ Ом. Из (1) найдем $I = 0{,}2$ А. Сумма токов, текущих через вольтметр и сопротивления R_2 и R_3, равна току I; $I = I_V + I_{23}$, где $I_V = \dfrac{U}{R_V}$; $I_{23} = \dfrac{U}{R_2 + R_3}$. Т. е.

$$I = \frac{U}{R_V} + \frac{U}{R_2 + R_3} = \frac{U(R_2 + R_3 + R_V)}{R_V(R_2 + R_3)} \quad \text{или} \quad I = \frac{U}{R'}.$$ Отсюда $U = IR' = 80$ В.

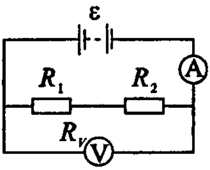
10.32. Сопротивления $R_1 = R_2 = R_3 = 200$ Ом (см. рисунок к задаче 10.31), сопротивление вольтметра $R_V = 1$ кОм. Вольтметр показывает разность потенциалов $U = 100$ В. Найти э.д.с. ε батареи.

Решение:

По закону Ома для замкнутой цепи ток, текущий через сопротивление R_1 и через эквивалентное сопротивление параллельного участка цепи R', $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$ или, поскольку внутренним сопротивлением источника r мы пренебрегаем, $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$ — (1). Сумма токов, текущих через вольтметр и сопротивления R_2 и R_3, равна току I. $I = I_V + I_{23}$, где $I_V = \dfrac{U}{R_V}$; $I_{23} = \dfrac{U}{R_2 + R_3}$. Отсюда $I = \dfrac{U}{R_V} + \dfrac{U}{R_2 + R_3} = 0{,}35$ А. Полное сопротивление цепи $R = R_1 + R'$. Эквивалентное сопротивление R' найдем из соотношения: $\dfrac{1}{R'} = \dfrac{1}{R_V} + \dfrac{1}{R_2 + R_3}$; $R' = \dfrac{R_V(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_V}$. Тогда $R = R_1 + \dfrac{R_V(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_V}$; $R = 485$ Ом. Из (1) найдем $\varepsilon = IR$. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon = 170$ В.

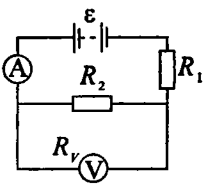
10.33. Найти показания амперметра и вольтметра в схемах, изображенных на рисунках. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 110$ В, сопротивления $R_1 = 400$ Ом и $R_2 = 600$ Ом, сопротивление вольтметра $R_V = 1$ кОм.

Решение:



Будем считать внутреннее сопротивление э.д.с. равным нулю.

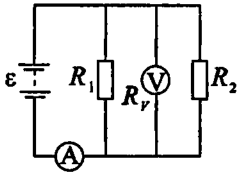
а) Т. к. R_1 и R_2 соединены последовательно, то $R_{12} = R_1 + R_2 = 1$ кОм. Вольтметр подключен параллельно R_{12}, поэтому сопротивление всей цепи $R = \dfrac{R_V R_{12}}{R_V + R_{12}} = 500$ Ом. Амперметр покажет ток во всей цепи, который по закону Ома $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = 0{,}22$ А, а вольтметр покажет падение напряжения на сопротивлении R_{12}, а т. к. $R_{12} = R_V$, то ток через R_{12} равен $I_{12} = \dfrac{I}{2} = 0{,}11$ А, тогда по закону Ома для участка цепи $U = I_{12} R_{12} = 110$ В.



б) Т. к. сопротивление R_2 и вольтметр соединены параллельно, то их общее сопротивление $R' = \dfrac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} = 375$ Ом. Общее сопротивление всей цепи $R = R_1 + R' = 775$ Ом. Показание амперметра $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = 0{,}142$ А. По первому закону Кирхгоффа $I = I_2 + I_V$, где I_2 и I_V соответственно токи через R_2 и вольтметр, и, кроме того, $I_2 R_2 = I_V R_V$, тогда $I_2 = \dfrac{I R_V}{R_2 + R_V} = 0{,}089$ А. Показание вольтметра $U = I_2 R_2 = 53{,}2$ В.

в) Т. к. оба сопротивления и вольтметр соединены параллельно, то $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_V}$, откуда сопротивление всей цепи

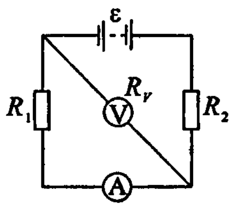
$$R = \frac{R_1 R_2 R_V}{R_2 R_V + R_1 R_V + R_1 R_2} = 193{,}6\,\text{Ом}.$$



Показание амперметра $I = \frac{\varepsilon}{R} = 0{,}57$ А.

Показание вольтметра $U = IR = 110$ В.

г) Т. к. сопротивление R_1 и вольтметр соединены параллельно, то их общее сопротивление $R' = \frac{R_1 R_V}{R_1 + R_V} = 285{,}7$ Ом.



Полное сопротивление цепи $R = R_2 + R' = 885{,}7$ Ом. По закону Ома ток в цепи $I = \frac{\varepsilon}{R} = 0{,}12$ А. С другой стороны, по первому закону Кирхгоффа $I = I_1 + I_V$, а также $I_1 R_1 = I_V R_V$, тогда ток, который покажет амперметр,

$$I_1 = \frac{I R_V}{R_1 + R_V} = 0{,}088\,\text{А}.$$

10.34. Амперметр с сопротивлением $R_A = 0{,}16$ Ом зашунтован сопротивлением $R = 0{,}04$ Ом. Амперметр показывает ток $I_0 = 8$ А. Найти ток I в цепи.

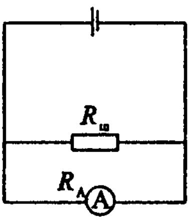
Решение:

Шунтирующее сопротивление подключается параллельно амперметру, следовательно, ток в цепи $I = I_0 + I_ш$. Падения напряжения на сопротивлениях амперметра и шунта одинаковы, поэтому $I_0 R_A = I_ш R$; $I_ш = I_0 \frac{R_A}{R}$. Тогда

$I = I_0 + I_0 \dfrac{R_A}{R} = I_0\left(1 + \dfrac{R_A}{R}\right)$. Подставляя числовые данные, получим $I = 40$ А.

10.35. Имеется предназначенный для измерения токов до $I = 10$ А амперметр с сопротивлением $R_A = 0{,}18$ Ом, шкала которого разделена на 100 делений. Какое сопротивление R надо взять и как его включить, чтобы этим амперметром можно было измерять ток до $I_0 = 100$ А? Как изменится при этом цена деления амперметра?

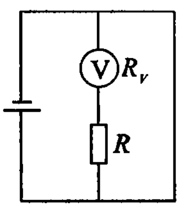
Решение:



Если необходимо измерить силу тока в n раз большую, чем можно измерить данным амперметром, т. е. $\dfrac{I_0}{I} = n = 10$, то следует параллельно подключить шунт с сопротивлением $R_ш = \dfrac{R_A}{n-1}$. Таким образом, $R_ш = 0{,}02$ Ом. Цена деления без шунта равна 0,1 А, с шунтом 1 А.

10.36. Имеется предназначенный для измерения разности потенциалов до $U = 30$ В вольтметр с сопротивлением $R_V = 2$ кОм, шкала которого разделена на 150 делений. Какое сопротивление R надо взять и как его включить, чтобы этим вольтметром можно было измерять разности потенциалов до $U_0 = 75$ В? Как изменится при этом цена деления вольтметра?

Решение:



Если необходимо измерить напряжение в n раз большее, чем то, которое может измерить данный вольтметр, т. е. $n = \dfrac{U_0}{U}$, то необходимо последовательно подключить добавочное сопротивление $R = R_V(n-1)$. Т. к. $n = 2{,}5$, то $R = 3$ кОм. Цена деления вольтметра без добавочного сопротивления была 0,2 В, с сопротивлением стала 0,5 В.

10.37. Имеется предназначенный для измерения токов до $I = 15$ мА амперметр с сопротивлением $R_A = 5$ Ом. Какое сопротивление R надо взять и как его включить, чтобы этим прибором можно было измерять: а) ток до $I_0 = 150$ мА; б) разность потенциалов до $U_0 = 150$ В?

Решение:

а) Добавочное сопротивление $R = \dfrac{R_A}{n-1}$, где $n = \dfrac{I_0}{I} = 10$ (см. задачу 10.35), нужно подключить параллельно. $R = 0{,}56$ Ом. б) Надо последовательно подключить добавочное сопротивление $R = R_A(n-1)$, где $n = \dfrac{U_0}{U}$ (см. задачу 10.36). Т. к. $U = IR_A$, то $n = \dfrac{U_0}{IR_A} = 2000$. Отсюда $R = 9995$ Ом.

10.38. Имеется 120-вольтовая электрическая лампочка мощностью $P = 40$ Вт. Какое добавочное сопротивление R надо включить последовательно с лампочкой, чтобы она давала нормальный накал при напряжении в сети $U_0 = 220$ В? Какую длину l нихромовой проволоки диаметром $d = 0{,}3$ мм надо взять, чтобы получнть такое сопротивление?

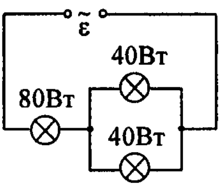
Решение:

При последовательном соединении $U_0 = U_1 + U_2$, где U_1 — падение напряжения на лампочке, U_2 — падение напряжения на добавочном сопротивлении. По условию $U_1 = 120$ В, тогда $U_2 = U_0 - U_1 = 100$ В. Мощность лампочки $P = I^2R_1 =$

$= \frac{U_1^2}{R_1}$, отсюда сопротивление лампочки $R_1 = \frac{U_1^2}{P} = 360$ Ом, ток $I = \sqrt{\frac{P}{R_1}} = 0{,}33$ А. Тогда добавочное сопротивление $R_2 = \frac{U_2}{I} = 303$ Ом. Длину нихромовой нити, имеющей такое сопротивление, можно найти по формуле $R_2 = \rho\frac{l}{S}$, откуда $l = \frac{R_2 S}{\rho} = \frac{R_2 \pi d^2}{4\rho}$. Подставляя числовые данные, получим $l = 21{,}2$ м.

10.39. Имеется три 110-вольтовых электрических лампочки, мощности которых $P_1 = P_2 = 40$ Вт и $P_3 = 80$ Вт. Как надо включить эти лампочки, чтобы они давали нормальный накал при напряжении в сети $U_0 = 220$ В? Начертить схему. Найти токи I_1, I_2 и I_3, текущие через лампочки при нормальном накале.

Решение:



При параллельном включении двух лампочек мощностью по 40 Вт получается «потребитель», рассчитанный на то же напряжение и мощность, а следовательно, имеющий такое же сопротивление, что и 80-ваттная лампочка. Схема соединения лампочек изображена на рисунке. Падение напряжения на лампочках 1 и 2 равно падению напряжения на лампочке 3 и равно $U = \frac{U_0}{2}$. Тогда $I_3 = \frac{P_3}{U} = 0{,}73$ А и $I_1 = I_2 = \frac{P_1}{U} = 0{,}365$ А.

10.40. В лаборатории, удаленной от генератора на расстояние $l = 100$ м, включили электрический нагревательный прибор, потребляющий ток $I = 10$ А. На сколько понизилось напряжение U на зажимах электрической лампочки, горящей в этой лаборатории, если сечение медных подводящих проводов $S = 5\ мм^2$?

Решение:
Сопротивление проводов можно рассчитать по формуле $R = \rho\frac{2l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление меди. Тогда падение напряжения $U = IR = I\rho\frac{2l}{S}$; $U = 6{,}8$ В.

10.41. От батареи с э.д.с. $\varepsilon = 500$ В требуется передать энергию на расстояние $l = 2{,}5$ км. Потребляемая мощность $P = 10$ кВт. Найти минимальные потери мощности ΔP в сети, если диаметр медных подводяших проводов $d = 1{,}5$ см.

Решение:
Потери мощности в проводах $\Delta P = I^2 R$, где ток в цепи $I = \frac{P}{\varepsilon}$, а R — сопротивление проводов. Учитывая двухпроводность линии, $R = 2\rho\frac{l}{S}$, где $\rho = 0{,}017\cdot 10^{-6}$ Ом·м — удельное сопротивление меди при $0°$ С. Тогда $\Delta P = \frac{P^2}{\varepsilon^2}2\rho\frac{l}{S}$ или, учитывая $S = \pi\frac{d^2}{4}$, $\Delta P = \frac{8P^2\rho l}{\pi\varepsilon^2 d^2}$;

$$\Delta P = \frac{8\cdot 10^8\cdot 0{,}017\cdot 10^{-6}\cdot 2{,}5\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 500^2\cdot 1{,}5^2\cdot 10^{-4}} = 193\ \text{Вт}.$$

10.42. От генератора с э.д.с. $\varepsilon = 110$ В требуется передать энергию на расстояние $l = 250$ м. Потребляемая мощность $P = 1$ кВт. Найти минимальное сечение S медных подводящих проводов, если потери мощности в сети не должны превышать 1%.

Решение:

По условию потери мощности в сети не должны превышать 1%, следовательно, к.п.д. $\eta = 99\%$. Сопротивление проводов $R = \rho\frac{2l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление меди. С другой стороны, согласно закону Ома $R = \frac{U}{I}$ — (2). Поскольку мощность генератора $p = \varepsilon I$, то $I = \frac{p}{\varepsilon}$ — (3). Падение напряжения $\eta = \frac{U}{\varepsilon}$, откуда $U = \eta\varepsilon$ — (4). Подставив (3) и (4) в (2), найдем $R = \frac{\eta\varepsilon^2}{P}$ — (5). Приравняв правые части (1) и (5), получим $\frac{\eta\varepsilon^2}{P} = \rho\frac{2l}{S}$, откуда $S = \frac{2pl\rho}{\eta\varepsilon^2}$; $S = 78\,\text{мм}^2$.

10.43. В цепь включены последовательно медная и стальная проволоки одинаковых длины и диаметра. Найти: а) отношение количеств теплоты, выделяющихся в этих проволоках; б) отношение падений напряжения на этих проволоках.

Решение:

При последовательном включении по медной и стальной проволоке течет одинаковый ток. Согласно закону Джоуля — Ленца на медной проволоке выделится количество тепла $Q_1 = I^2R_1t = I^2\rho_1\frac{l}{S}t$, а на стальной проволоке — количество тепла $Q_2 = I^2R_2t = I^2\rho_2\frac{l}{S}t$. Отношение $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0{,}17$. Падение напряжения на медной проволоке

$U_1 = IR_1 = I\rho_1 \dfrac{l}{S}$. Падение напряжения на стальной проволоке $U_2 = IR_2 = I\rho_2 \dfrac{l}{S}$. Отношение $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = 0{,}17$.

10.44. Решить предыдущую задачу для случая, когда проволоки включены параллельно.

Решение:

При параллельном включении медной и стальной проволоки падение напряжения на них одинаково. Согласно закону Джоуля — Ленца $Q_1 = \dfrac{U^2}{R_1} t = \dfrac{U^2}{\rho_1 l / S} t$, а $Q_2 = \dfrac{U^2}{R_2} t = \dfrac{U^2}{\rho_2 l / S} t$. Отношение $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} = 5{,}9$. Падение напряжения $U_1 = U_2$, следовательно, $\dfrac{U_1}{U_2} = 1$.

10.45. Элемент с э.д.с. $\varepsilon = 6$ В дает максимальный ток $I = 3$ А. Найти наибольшее количество теплоты Q_r, которое может быть выделено во внешнем сопротивлении в единицу времени.

Решение:

За счет работы электрического тока во внешнем сопротивлении выделяется количество теплоты $Q = A = I\varepsilon t$. При $t = 1$ с количество теплоты $Q = 18$ Дж.

10.46. Батарея с э.д.с. $\varepsilon = 240$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнута на внешнее сопротивление $R = 23$ Ом. Найти полную мощность P_0, полезную мощность P и к.п.д. η батареи.

Решение:

К.п.д. батареи $\eta = \dfrac{R}{R+r} = 0{,}96$. Полная мощность батареи $P_0 = \varepsilon I$, где согласно закону Ома $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$, т. е. $P_0 = \dfrac{\varepsilon^2}{R+r}$; $P_0 = 2{,}4$ кВт. Полезная мощность $P = \eta P_0 = 2{,}3$ кВт.

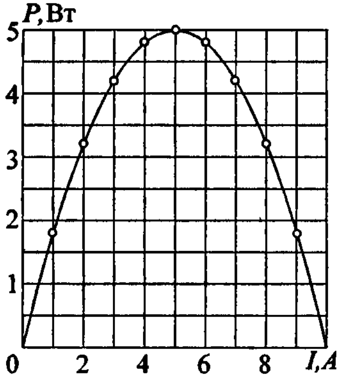
10.47. Найти внутреннее сопротивление r генератора, если известно, что мощность P, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова при внешних сопротивлениях $R_1 = 5$ Ом и $R_2 = 0{,}2$ Ом. Найти к.п.д. η генератора в каждом из этих случаев.

Решение:

Мощность, выделяющаяся во внешней цепи: $P = I_1^2 R_1$ или $P = I_2^2 R_2$. Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + r}$, а $I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_2 + r}$. Тогда $P = \dfrac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \dfrac{\varepsilon_2 R_2}{(R_2 + r)^2}$, откуда $R_1 (R_2 + r)^2 = R_2 (R_1 + r)^2$. Раскрыв скобки и проведя несложные преобразования, найдем $r = \sqrt{R_1 R_2} = 1$ Ом. Для первого сопротивления к.п.д. генератора $\eta_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + r} = 83\%$.

Для второго сопротивления $\eta_2 = \dfrac{R_2}{R_2 + r} = 17\%$.

10.48. На графике дана зависимость полезной мощности P от тока I в цепи. По данным этой кривой найти внутреннее сопротивление r и э.д.с. ε элемента. Построить график зависимости от тока I в цепи к.п.д. η элемента и падения потенциала U во внешней цепи.

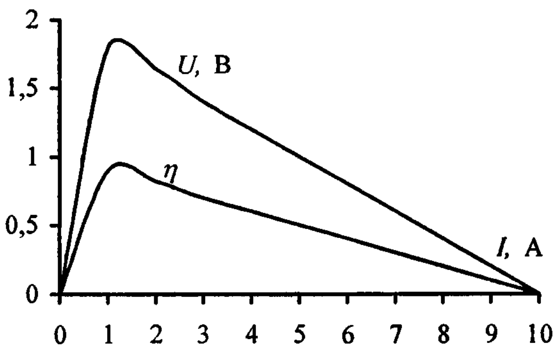


Решение:

По точкам на кривой составим таблицу:

I, А	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P, Вт	0	1,8	3,2	4,2	4,8	5	4,8	4,2	3,2	1,8	0

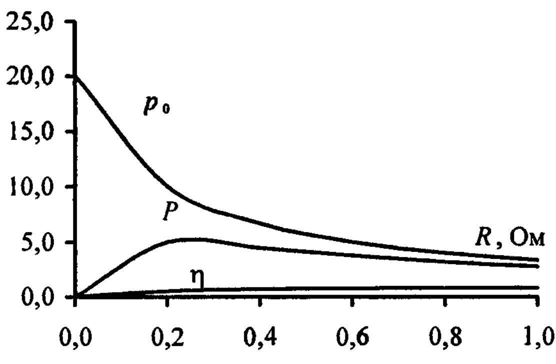
Мощность, выделяемая во внешней цепи (полезная мощность), достигнет максимума при внешнем сопротивлении R, равном внутреннему сопротивлению r элемента. При этом падение потенциала во внешней цепи $U = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда к.п.д. элемента $\eta = 0{,}5$. В нашем случае $P_{max} = IU = 5\,\text{Вт}$.



Следовательно, $U = \frac{P_{max}}{I} = 1$ В; отсюда э.д.с. элемента $\varepsilon = 2U = 2$ В. Т. к. при этом $I = \frac{\varepsilon}{2r}$, то внутреннее сопротивление элемента $r = \frac{\varepsilon}{2I} = 0{,}2$ Ом. Падение потенциала во внешней цепи $U = \frac{P}{I}$; к.п.д. элемента $\eta = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{P}{\varepsilon \cdot I}$.

10.49. По данным кривой, изображенной на рисунке к задаче 10.48, построить график зависимости от виешнего сопротивления R цепи: к.п.д. η элемента, полной мощности P_0 и полезной мощности P. Кривые построить для значений внешнего сопротивления R, равных: $0, r$, $2r$, $3r$, $4r$ и $5r$, где r — внутреннее сопротивление элемента.

Решение:



Имеем $\varepsilon = 2$ В; $r = 0{,}2$ Ом (см. задачу 10.48). Полная мощность, развиваемая источником, равна $P_0 = I^2(R + r) = I\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R + r}$. Полезная мощность $P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2}$. К.п.д.

источника $\eta=\frac{P}{P_0}=\frac{R}{R+r}$. Подставив числовые данные; получим следующие зависимости: $P_0=\frac{4}{R+0{,}2}$;

$P=\frac{4R}{(R+0{,}2)^2}$; $\eta=\frac{R}{R+0{,}2}$. Для заданного интервала значений R составим таблицу и построим графики.

R, Ом	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
P_0, Вт	20	10	6,67	5	4	3,33
P, Вт	0	5	4,44	3,75	3,2	2,78
η	0	0,5	0,67	0,75	0,8	0,83

10.50. Элемент замыкают сначала на внешнее сопротивление $R_1=2$ Ом, а затем на внешнее сопротивление $R_2=0{,}5$ Ом. Найти э.д.с. ε элемента и его внутреннее сопротивление r, если известно, что в каждом из этих случаев мощность, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова и равна $P=2{,}54$ Вт.

Решение:

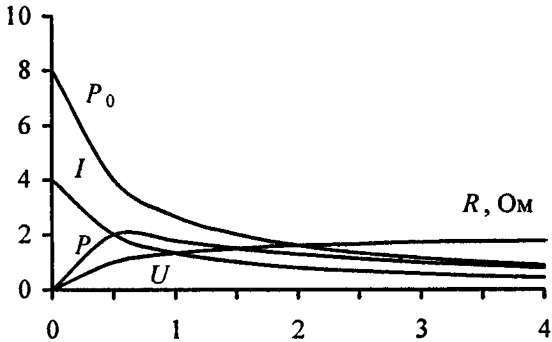
Мощность, выделяющаяся во внешней цепи, равна $P=I^2\times$ $\times R$, где согласно закону Ома для полной цепи $I=\frac{\varepsilon}{R+r}$.

Отсюда $P=\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$. По условию $P=\frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1+r)^2}=$ $=\frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2+r)^2}$ — (1), отсюда $\frac{R_1+r}{\sqrt{R_1}}=\frac{R_2+r}{\sqrt{R_2}}$; $r\frac{\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1R_2}}=$ $=\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2}$; $r=\sqrt{R_1R_2}=1$ Ом. Из (1) найдем $\varepsilon=(R_1+r)\sqrt{\frac{P}{R_1}}=3{,}4$ Ом.

10.51. Элемент с э.д.с. $\varepsilon = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом замкнут на внешнее сопротивление R. Построить график зависимости от сопротивления R: тока I в цепи, падения потенциала U во внешней цепи, полезной мощности P и полной мощности P_0. Сопротивление взять в пределах $0 \le R \le 4$ Ом через каждые $0{,}5$ Ом.

Решение:

Зависимость тока I в цепи от внешнего сопротивления R выражается законом Ома для полной цепи: $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ или, с учетом данных задачи, $I = \frac{2}{R + 0{,}5}$. К.п.д. элемента $\eta = \frac{U}{\varepsilon}$, кроме того, $\eta = \frac{R}{R + r}$ (см. задачу 10.49). Тогда $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$; $U = \frac{2R}{R + 0{,}5}$. Зависимость полезной мощности P и полной мощности P_0 задается соотношением $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2}$; $P_0 = \frac{\varepsilon^2}{R + r}$ (см. задачу 10.49) или $P = \frac{4R}{(R + 0{,}5)^2}$; $P_0 = \frac{4}{R + 0{,}5}$. Для заданного интервала значений R составим таблицу и построим графики.



R, Ом	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
I, А	4	2	1,33	1	0,8	0,67	0,57	0,5	0,44
U, В	0	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78
P, Вт	0	2	1,78	1,5	1,28	1,11	0,98	0,88	0,79
P_0, Вт	8	4	2,67	2	1,6	1,33	1,14	1	0,89

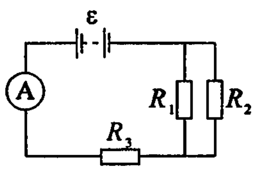
10.52. Элемент с э.д.с. ε и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнее сопротивление R. Наибольшая мощность, выделяющаяся во внешней цепи, $P = 9$ Вт. При этом в цепи течет ток $I = 3$ А. Найти э.д.с. ε и внутреннее сопротивление r элемента.

Решение:

Имеем $P_{max} = UI$, при этом $U = \frac{\varepsilon}{2}$ (см. задачу 10.48), т. е. $P_{max} = P = \frac{\varepsilon I}{2}$. Отсюда $\varepsilon = \frac{2P}{I} = 6$ В. Имеем $r = \frac{\varepsilon}{2I}$ (см. задачу 10.48); $r = 1$ Ом.

10.53. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 120$ В, сопротивления $R_3 = 30$ Ом, $R_2 = 60$ Ом. Амперметр показывает ток $I = 2$ А. Найти мощность P, выделяющуюся в сопротивлении R_1.

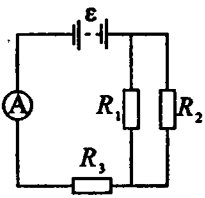
Решение:



Мощность, выделяющаяся в цепи, определяется соотношением $P = UI$, где U — падение напряжения на данном участке, I — ток, протекающий через него. Падение напряжения на сопротивлении R_1: $U_1 = \varepsilon - R_3 I = 60$ В. Ток в параллельном участке цепи $I = I_1 + I_2$. По закону Ома $I_2 = \frac{U_1 r}{R_2} = 1$ А, тогда $I_1 = I - I_2$; $I_1 = 1$ А. Отсюда искомая мощность $P_1 = I_1 \cdot U_1 = 60$ Вт.

10.54. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 100$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом, сопротивления $R_1 = 25$ Ом н $R_3 = 78$ Ом. На сопротивлении R_1 выделяется мощность $P_1 = 16$ Вт. Какой ток I показывает амперметр?

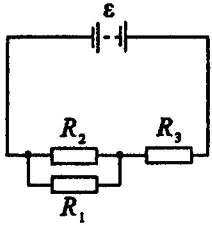
Решение:



По определению мощности тока $P_1 = I_1 U_1$ — (1), а из закона Ома сопротивление $R_1 = \dfrac{U_1}{I_1}$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем ток $I_1 = \sqrt{\dfrac{P_1}{R_1}}$. Т. к. сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, то $R_1 I_1 = R_2 I_2$, тогда ток $I_2 = \dfrac{R_1 I_1}{R_2}$. По первому правилу Кирхгоффа ток, который покажет амперметр, $I = I_1 + I_2 = I_1\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right) = \sqrt{\dfrac{P_1}{R_1}}\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)$ — (3). С другой стороны, по закону Ома $I = \dfrac{\varepsilon}{r + R}$ — (4), где $R = R_{12} + R_3$ — (4) — сопротивление внешней цепи. Поскольку сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, то $R_{12} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ — (6). Подставляя (5), с учетом (6), в (4), получаем $I = \dfrac{\varepsilon}{r + R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + R_3}$ — (7). Исключая из соотношений (3) и (7) сопротивление R_2, окончательно находим $I = \dfrac{\varepsilon - \sqrt{P_1 R_1}}{r + R_3} = 1$ А.

10.55. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 120$ В, сопротивления $R_1 = 25$ Ом, $R_2 = R_3 = 100$ Ом. Найти мощность P_1, выделяющуюся на сопротивлении R_1.

Решение:



Т. к. сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, то $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ и $U_1 = U_2$. Общее сопротивление внешней цепи $R = R_{12} + R_3 = 120$ Ом. По закону Ома для всей цепи ток $I = \frac{\varepsilon}{R} = 1$ А. Согласно первому закону Кирхгоффа $I = I_1 + I_2$ — (1) и, кроме того, $I_1 R_1 = I_2 R_2$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), находим ток через сопротивление R_1: $I_1 = \frac{IR_2}{R_2 + R_1} = 0{,}8$ А. Тогда мощность, выделяющаяся на сопротивлении R_1: $P_1 = I_1 U_1 = I_1^2 R_1 = 16$ Вт.

10.56. К.п.д. батареи $\eta = 80\,\%$ (см. рис. 1), сопротивление $R_1 = 100$ Ом. На сопротивлении R_1 выделяется мощность $P_1 = 16$ Вт. Найти э.д.с. ε батареи, если известно, что падение потенциала на сопротивлении R_3 равно $U_3 = 40$ В.

Решение:

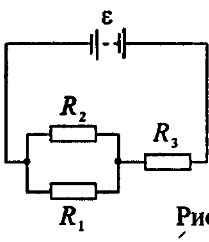


Рис. 1

Рассмотрим упрощенную эквивалентную схему (см. рис. 2), где r — внутреннее сопротивление участка цепи AB. По определению к.п.д. батареи $\eta = \frac{P_{полез}}{P_{полн}}$ — (1), где $P_{полез} = I^2 R_{AB}$ — (2) — полезная

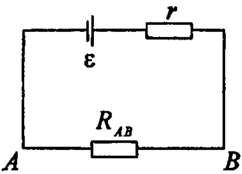


Рис. 2

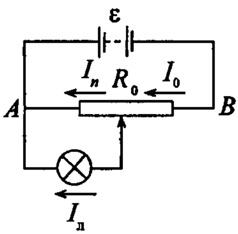
мощность, которая выделяется на участке AB, $P_{\text{полн}} = I^2(R_{AB}+r)$ — (3) — полезная мощность батареи. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем

$$\eta = \frac{I^2 R_{AB}}{I^2(R_{AB}+r)} = \frac{IR_{AB}}{I(R_{AB}+r)} \quad \text{— (4).}$$

По закону Ома для участка цепи падение потенциала на участке AB равно $U_{\text{внешн}} = IR_{AB}$ — (5), а по закону Ома для полной цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{R_{AB}+r}$, откуда э.д.с. батареи $\varepsilon = I(R_{AB}+r)$ — (6). Подставляя (5) и (6) в (4), получаем $\eta = \dfrac{U_{\text{внешн}}}{\varepsilon}$, откуда э.д.с. батареи $\varepsilon = \dfrac{U_{\text{внешн}}}{\eta}$ — (7). Мощность тока, выделяемая на сопротивлении R_1, равна $p_1 = I_1 U_1$, и поскольку по закону Ома для участка цепи $I_1 = \dfrac{U_1}{R_1}$, то $P_1 = \dfrac{U_1^2}{R_1}$. Тогда падение потенциала на сопротивлении R_1 равно $U_1 = \sqrt{P_1 R_1}$, и т. к. сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, то падения потенциалов на них $U_1 = U_2 = \sqrt{P_1 R_1}$ — (8). Полное падение потенциала на участке AB равно $U_{\text{внешн}} = U_1 + U_3 = U_2 + U_3$ — (9). Подставляя (8) в (9), получаем $U_{\text{внешн}} = \sqrt{P_1 R_1} + U_3$ — (10). Подставляя (10) в (7), окончательно находим э.д.с. батареи $\varepsilon = \sqrt{P_1 R_1} + U_3 / \eta = 100\text{ В}$.

10.57. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 120\text{ В}$, полное сопротивление потенциометра $R_0 = 120\text{ Ом}$. Сопротивление R лампочки меняется при нагревании от 30 до 300 Ом. На сколько меняется при этом разность потенциалов U на лампочке, если подвижный контакт стоит на середине потенциометра? На сколько меняется при этом мощность P, потребляемая лампочкой?

Решение:



По условию задачи подвижный контакт C стоит на середине потенциометра, поэтому сопротивления на участках AC и CB равны между собой: $R_{AC} = R_{CB} = \frac{R_0}{2}$ — (1), где R_0 — полное сопротивление потенциометра. Т. к. лампочка подключена параллельно участку AC, то падения потенциалов в лампочке и на участке AC равны между собой: $U_п = U_{AC}$ или, с учетом (1), $I_л R_1 = I_п \frac{R_0}{2}$ — (2), где $I_п$ — ток на участке AC, R_1 — сопротивление лампочки в начальный момент времени. Согласно первому правилу Кирхгоффа для узла C имеем $I_0 = I_п + I_л$ — (3). Решая совместно уравнения (2) и (3), получаем $I_0 = \left(\frac{2R_1}{R_0} + 1\right) I_л$ — (4). С другой стороны, по закону Ома для полной цепи

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R_0/2 + (R_0 R_1/2)/((R_0/2) + R_1)} = \frac{2\varepsilon(R_0 + 2R_1)}{R_0(R_0 + 4R_1)} \quad \text{— (5).}$$

Приравнивая правые части уравнений (4) и (5), получаем $I_л = \frac{2\varepsilon}{R_0 + 4R_1}$ — (6) — ток через лампочку в начальный момент времени. Тогда разность потенциалов на лампочке в начальный момент времени $U_1 = I_л R_1$ — (7), а мощность, потребляемая лампочкой, $P_1 = I_л^2 R_1$ — (8). Подставляя (6) в (7) и (8), соответственно получаем $U_1 = \frac{2\varepsilon R_1}{R_0 + 4R_1} = 30\,\text{В}$ и $P_1 = \frac{4\varepsilon^2 R_1}{(R_0 + 4R_1)^2} = 30\,\text{Вт}$. В процессе нагрева сопротивление лампочки возрастает до $R_2 = 300$ Ом, тогда разность потенциалов на лампочке и мощность, потребляемая лампочкой, станут соответственно равны $U_2 = \dfrac{2\varepsilon R_2}{R_0 + 4R_2} = 54{,}5$ В и $P_2 = \dfrac{4\varepsilon^2 R_2}{(R_0 + 4R_1)^2} = 9{,}9$ Вт.

10.58. Разность потенциалов между точками A и B равна $U = 9$ В. Имеются два проводника с сопротивлениями $R_1 = 5$ Ом и $R_2 = 3$ Ом. Найти количество теплоты $Q_т$, выделяющееся в каждом проводнике в единицу времени, если проводники между точками A и B соединены: а) последовательно; б) параллельно.

Решение:

Согласно закону Джоуля — Ленца количество теплоты, выделяющееся в проводнике, равно $Q = I^2Rt$. Тогда в единицу времени выделится количество теплоты $Q_т = \dfrac{Q}{t} = I^2R$. а) При последовательном соединении проводников $I_1 = I_2 = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$. Количество теплоты, выделившееся на первом проводнике, $Q_{т1} = I_1^2 R_1 = \dfrac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}$; $Q_{т1} = 6{,}3$ Дж. Аналогично $Q_{т2} = \dfrac{U^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$; $Q_{т2} = 3{,}8$ Дж.

б) При параллельном соединении $U_1 = U_2 = U$. Тогда $I_1 = \dfrac{U}{R_1}$, а $I_2 = \dfrac{U}{R_2}$. Отсюда $Q_{т1} = \dfrac{U^2}{R_1} = 16{,}2$ Дж; $Q_{т2} = \dfrac{U^2}{R_2} = 27$ Дж.

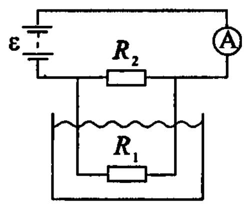
10.59. Две электрические лампочки с сопротивлениями $R_1 = 360$ Ом и $R_2 = 240$ Ом включены в сеть параллельно. Какая из лампочек потребляет большую мощность? Во сколько раз?

Решение:

Поскольку лампочки включены в сеть параллельно, то падение напряжения на них одинаково, т. е. $U_1 = U_2 = U$. Мощности P_1 и P_2, потребляемые лампочками, определяются следующими соотношениями: $P_1 = \dfrac{U^2}{R_1}$ и $P_2 = \dfrac{U^2}{R_2}$, откуда $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{3}{2}$. Т. е. лампочка с меньшим сопротивлением потребляет в 1,5 раза больше.

10.60. Калориметр имеет спираль сопротивлением $R_1 = 60$ Ом, которая включена в цепь, как показано на рисунке. Сопротивление $R_2 = 30$ Ом. Амперметр показывает ток $I = 6$ А. На сколько нагревается масса $m = 480$ г воды, налитой в калориметр, за время $\tau = 5$ мин пропускания тока?

Решение:



За время τ на спирали выделится количество теплоты $Q = I_1^2 R_1 \tau$ — (1), где I_1 — ток, проходящий через спираль. Поскольку спираль и сопротивление R_2 соединены параллельно, то $U_1 = U_2 = U$, а $I = I_1 + I_2$. Тогда $I_1 = \dfrac{U}{R_1}$, где $U = IR_{12} = I\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Отсюда найдем $I_1 = \dfrac{IR_2}{R_1 + R_2} = 2$ А. Выделенное количество тепла пошло на нагревание воды, причем $Q = mc\Delta T$ — (2), где $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды;

ΔT — искомое изменение температуры. Приравнивая правые части (1) и (2), получим $I_1^2 R_1 \tau = mc\Delta T$, откуда $\Delta T = \dfrac{I_1^2 R_1 \tau}{mc} = 36\,\text{K}$.

10.61. Какой объем V воды можно вскипятить, затратив электрическую энергию $W = 3\,\text{гВт·ч}$? Начальная температура воды $t_0 = 10°\,\text{C}$.

Решение:

Электрическая энергия W задана во внесистемных единицах гектоватт-часах. В единицах системы СИ $1\,\text{Вт·ч} = 3{,}6 \cdot 10^3\,\text{Дж}$; $1\,\text{гВт·ч}\,3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10^2\,\text{Дж}$; $3\,\text{гВт·ч} = 10{,}8 \cdot 10^{12}\,\text{Дж}$. Эта энергия была затрачена на нагревание воды массой $m = \rho V$ на $\Delta T = 90°\,\text{C}$. Т. е. $W = cm\Delta T = c\rho V\Delta T$, откуда $V = \dfrac{W}{c\rho\Delta T}$. $c_{\text{воды}} = 4{,}2 \cdot 10^3\,\text{Дж/кг·К}$; $\rho_{\text{воды}} = 1 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$. Подставляя числовые данные, получим $V = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^3 = 2{,}9\,\text{л}$.

10.62. Какую мощность P потребляет нагреватель электрического чайника, если объем $V = 1\,\text{л}$ воды закипает через время $\tau = 5\,\text{мин}$? Каково сопротивление R нагревателя, если напряжение в сети $U = 120\,\text{В}$? Начальная температура воды $t_0 = 13{,}5°\,\text{C}$.

Решение:

Для нагревания объема V воды до температуры кипения T_K за время τ необходимо количество тепла $Q = mc\Delta T = V\rho c(T_к - T_0)$ — (1). Количество тепла Q и мощность P связаны соотношением $Q = P\tau$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим

$V\rho c(T_к - T_0) = P\tau$, откуда $P = \frac{V\rho c(T_к - T_0)}{\tau} = 1{,}2$ кВт. Сопротивление R нагревателя можно выразить из закона Ома: $R = \frac{U}{I}$. Мощность $P = IU$, откуда $I = \frac{P}{U}$. Тогда $R = \frac{U^2}{P} = 12$ Ом.

10.63. На плитке мощностью $P = 0{,}5$ кВт стоит чайник, в который налит объем $V = 1$ л воды при $t_0 = 16°$ С. Вода в чайнике закипела через время $\tau = 20$ мин после включения плитки. Какое количество теплоты Q потеряно при этом на нагревание самого чайника, на излучение и т.д.?

Решение:
Если бы потерь тепла не было, на нагревание воды до температуры кипения $T_к$ потребовалось бы количество тепла $Q_1 = mc\Delta T = V\rho c(T_к - T_0)$. На самом деле было израсходовано тепла $Q_2 = P\tau$. Отсюда потери тепла составили $Q = Q_2 - Q_1 = P\tau - V\rho c(T_к - T_0)$; $Q = 2{,}5 \cdot 10^5$ Дж.

10.64. Нагреватель электрической кастрюли имеет две одинаковые секции с сопротивлением $R = 20$ Ом каждая. Через какое время τ закипит объем $V = 2{,}2$ л воды, если: а) включена одна секция; б) обе секции включены последовательно; в) обе секции включены параллельно? Начальная температура воды $t_0 = 16°$ С, напряжение в сети $U = 110$ В, к.п.д. нагревателя $\eta = 85\%$.

Решение:

а) Мощность нагревателя $P = IU = \frac{U^2}{R}$ — (1). За время τ выделится количество теплоты $Q = \eta P\tau$ — (2), которое пойдет на нагревание воды до температуры кипения $T_к$, т. е. $Q = V\rho c(T_к - T_0)$ — (3). Решая совместно уравнения (1) — (4), получим $\tau = \frac{V\rho c(T_к - T_0)R}{\eta U^2} = 1506\,с = 25\,мин.$

б) При последовательном включении секций их общее сопротивление равно $2R$. Отсюда $\tau = 50\,мин.$ в) При параллельном соединении секций их общее сопротивление равно $\frac{R}{2}$. Отсюда $\tau = 12{,}5\,мин.$

10.65. Нагреватель электрического чайника имеет две секции. При включении одной из них вода в чайнике закипит через время $\tau_1 = 15\,мин$, при включении другой — через время $\tau_2 = 30\,мин$. Через какое время τ закипит вода в чайнике, если включить обе секции: а) последовательно; б) параллельно?

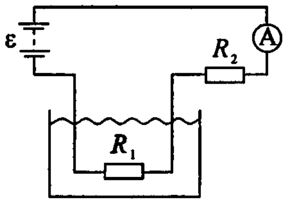
Решение:

В предыдущей задаче была получена формула, связывающая время нагрева воды τ и сопротивление R секции нагревателя. $\tau = \frac{mc\Delta T}{\eta U^2}R$. Поскольку τ прямо пропорционально R и величины, входящие в коэффициент при R, постоянны, т. е. они сократятся при преобразованиях, то можно записать: а) при последовательном соединении секций $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 45\,мин$; б) при параллельном соединении $\tau = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 10\,мин.$

10.66. Нагреватель электрического чайника сопротивлением R_1 включен в цепь, как показано на рисунке. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 120\,В$, сопротивление $R_2 = 10\,Ом$. Амперметр показывает ток $I = 2\,А$. Через какое время закипит объем $V = 0{,}5\,л$ воды? Начальная температура воды $t_0 = 4°\,С$. К.п.д. $\eta = 76\,\%$ нагревателя.

Решение:

Имеем $\tau = \dfrac{V\rho c(T_к - T_0)R_1}{\eta U_1^2}$ (см. задачу 10.64). Т. к. сопротивления R_1 и R_2 включены последовательно, то ток в цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$, отсюда $R_1 = \dfrac{\varepsilon}{I} - R_2 = 50$ Ом. Падение

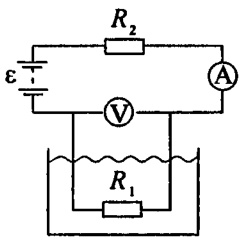


напряжения на сопротивлении R_1 равно $U_1 = IR_1 = 100$ В. Подставляя числовые данные, получим $\tau = 22$ мин.

10.67. Калориметр имеет спираль сопротивлением R_1, которая включена в цепь, как показано на рисунке. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 110$ В, к.п.д. спирали $\eta = 80\%$. В калориметр налита масса $m = 500$ г керосина. Амперметр показывает ток $I = 2$ А, вольтметр показывает напряжение $U = 10{,}8$ В. Каково сопротивление R_1 спирали? Найти удельную теплоемкость c керосина, если за время $\tau = 5$ мин пропускания тока керосин нагрелся на $\Delta t = 5°$ С. Каково сопротивление R_2? Сопротивление вольтметра считать бесконечно большим.

Решение:

Количество тепла, необходимое для нагревания керосина на Δt, есть $Q_1 = cm\Delta t$. По закону Джоуля — Ленца количество тепла, выделяемое спиралью за время τ, есть $Q_2 = IU\tau$. По закону сохранения энергии $Q_1 = \eta Q_2$ или $cm\Delta t = \eta IU\tau$, откуда удельная теплоемкость керосина $c = \eta \dfrac{IU\tau}{m\Delta t} = 2{,}07$ кДж/(кг·К). Из зако-



на Ома для участка цепи сопротивление $R_1 = \frac{U}{I} = 5{,}4$ Ом.

По закону Ома для всей цепи ток $I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$, откуда сопротивление $R_2 = \frac{\varepsilon}{I} - R_1 = 49{,}6$ Ом.

10.68. Объем $V = 4{,}5$ л воды можно вскипятить, затратив электрическую энергию $W = 0{,}5$ кВт·ч. Начальная температура воды $t_0 = 23°$ С. Найти к.п.д. η нагревателя.

Решение:

Количество тепла, необходимое для того, чтобы вскипятить воду, $Q = cm(t_к - t_0) = c\rho V(t_к - t_0)$, где $c = 4{,}19$ кДж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды, $m = \rho V$ — масса воды, $t_к = 100°$ С — температура кипения воды. По определению $\eta = \frac{Q}{W}$. Подставляя числовые данные, получим $\eta = \frac{c\rho V(t_к - t_0)}{W} = 0{,}8 = 80\,\%$.

10.69. Для отопления комнаты пользуются электрической печью, включенной в сеть напряжением $U = 120$ В. Комната теряет в единицу времени количество теплоты $Q_\tau = 87{,}08$ МДж/сут. Требуется поддерживать температуру комнаты постоянной. Найти: а) сопротивление R печи; б) длину l нихромовой проволоки диаметром $d = 1$ мм, необходимой для обмотки такой печи; в) мощность P печи.

Решение:

Мощность печи $P = \frac{Q_\tau}{\tau}$, где $\tau = 24$ ч $= 86400$ с, тогда $P = 1$ кВт. С другой стороны, $P = IU$, откуда сила тока в сети $I = \dfrac{P}{U}$ — (1). По закону Ома для участка цепи $I = \dfrac{U}{R}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), находим сопротивление печи $R = \dfrac{U^2}{P} = 14{,}4$ Ом. Сопротивление проволоки также можно выразить как $R = \rho\dfrac{l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление материала проволоки, l — ее длина, S — площадь поперечного сечения. Тогда $l = \dfrac{RS}{\rho} = \dfrac{R\pi d^2}{4\rho} = 11{,}3$ м.

10.70. Температура водяного термостата объемом $V = 1$ л поддерживается постоянной при помощи нагревателя мощностью $P = 26$ Вт. На нагревание воды тратится 80% этой мощности. На сколько понизится температура воды в термостате за время $\tau = 10$ мин, если нагреватель выключить?

Решение:

Количество тепла, отданное водой при охлаждении, $Q_1 = cm\Delta t = c\rho V\Delta t$. По закону Джоуля — Ленца количество тепла нагревателя $Q_2 = IU\tau = P\tau$. По закону сохранения энергии $Q_1 = \eta Q_2$ или $c\rho V\Delta t = \eta P\tau$, откуда изменение температуры $\Delta t = \dfrac{\eta P\tau}{c\rho V} = 2{,}97°$ C.

10.71. Сколько надо заплатить за пользование электрической энергией в месяц (30 дней), если ежедневно в течение времени $\tau = 6$ ч горят две 120-вольтовых лампочки, потребляющие ток $I = 0{,}5$ А? Кроме того, ежедневно кипятится объем $V = 3$ л воды. Начальная температура воды $t_0 = 10°$ C. Стоимость 1кВт·ч энергии принять равной 4 коп. К.п.д. нагревателя $\eta = 80\,\%$.

Решение:

Количество энергии, потребляемое в сутки лампочками, $w_1 = 2IU\tau$, а в месяц $W_1 = 30w_1 = 60IU\tau$. Количество энергии, необходимое для нагревания воды в сутки, $Q = C\rho V(t_к - t_0)$, при этом затрачивается энергия $W = cm\Delta T = c\rho V\Delta T$, а в месяц $W_2 = \frac{30c\rho V(t_к - t_0)}{\eta}$. Полная энергия, которая расходуется за месяц, $W = W_1 + W_2 = 30\left(2IU\tau + \frac{c\rho V(t_к - t_0)}{\eta}\right) = 120{,}18$ МДж. За пользование электроэнергией надо заплатить $N = \frac{W \cdot n}{10^3 \cdot 3600} = 133$ коп.= =1р. 33коп.

10.72. Электрический чайник, содержащий объем $V = 600$ см^3 воды при $t_0 = 9°$ С, забыли выключить. Сопротивление нагревателя чайника $R = 16$ Ом. Через какое время τ после включения вода в чайнике выкипит? Напряжение в сети $U = 120$ В, к.п.д. нагревателя $\eta = 60\,\%$.

Решение:

По закону Джоуля — Ленца $Q_{полн} = I^2R\tau$; $Q_{полезн} = Q_1 + Q_2$. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды до температуры кипения, $Q_1 = cm(t_к - t_0)$. Количество теплоты, необходимое для испарения воды, $Q_2 = rm$. По закону сохранения энергии $Q_{полезн} = \eta Q_{полн}$; $cm(t_к - t_0) + rm = \eta I^2R\tau$; $m = \rho V$. По закону Ома $I = \frac{U}{R}$, отсюда $I^2 = \frac{U^2}{R^2}$; $\rho V\left[c(t_K - t_0) + r\right] = \eta\frac{U^2}{R}\tau$, следовательно,

$\tau = \frac{\rho VR\left[c(t_к - t_0) + r\right]}{\eta U^2}$; $\tau = 49$ мин.

10.73. В ртутном диффузионном насосе в единицу времени испаряется масса $m_\tau = 100$ г/мин ртути. Каково должно быть сопротивление R нагревателя насоса, если он включается в сеть напряжением $U = 127$ В? Удельная теплота парообразования ртути $q = 296$ кДж/кг.

Решение:

Количество тепла, необходимое для испарения ртути, $Q = qm$ — (1). С другой стороны, по закону Джоуля — Ленца $Q = IU\tau$ — (2). Приравниваем правые части уравнений (1) и (2) $qm = IU\tau$, отсюда сила тока нагревателя насоса $I = \frac{qm}{U\tau} = \frac{qm_\tau}{U}$. Из закона Ома для участка цепи сопротивление нагревателя насоса $R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{qm_\tau} = 32{,}69$ Ом.

10.74. В цепь, состоящую из медного провода площадью поперечного сечения $S_1 = 3\text{ мм}^2$, включен свинцовый предохранитель площадью поперечного сечения $S_2 = 1\text{ мм}^2$. На какое повышение температуры Δt_1 медного провода при коротком замыкании цепи рассчитан предохранитель? Считать, что при коротком замыкании вследствие кратковременности процесса все выделившееся тепло идет на нагревание цепи. Начальная температура предохранителя $t_0 = 17°$ С.

Решение:

В медном проводе выделится количество теплоты $Q_1 = m_1 c_1 \Delta T_1 = \rho_1 l_1 S_1 c_1 \Delta T_1$ — (1), где ρ_1 — плотность меди, l_1 — длина провода, c_1 — удельная теплоемкость меди. В свинцовом предохранителе выделится количество теплоты $Q_2 = m_2 c_2 \Delta T_2 + m_2 r = \rho_2 l_2 S_2 \left(c_2 \left(T_{пл} - T_0\right) + r\right)$ — (2), где ρ_2 — плотность свинца, l_2 — длина предохранителя, c_2 — удельная теплоемкость свинца, r — удельная теплота плавления свинца. По закону Джоуля — Ленца $Q_1 = I_1^2 R_1 t$,

$Q_2 = I_2^2 R_2 t$. Поскольку провод и предохранитель включены в цепь последовательно, то $I_1 = I_2$, тогда $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1' l_1 S_2}{\rho_2' l_2 S_1}$ — (3), где ρ_1' и ρ_2' — удельные сопротивления меди и свинца. Из уравнений (1) — (3) найдем $\frac{\rho_1 l_1 S_1 c_1 \Delta T_1}{\rho_2 l_2 S_2 (c_2 (T_{пл} - T_0) + r)} = \frac{\rho_1' l_1 S_2}{\rho_2' l_2 S_1}$, откуда $\Delta T_1 = \frac{\rho_2 \rho_1' S_2^2 (c_2 (T_{пл} - T)_0 + r)}{\rho_2' \rho_1 S_1^2 c_1}$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta T_1 = 1{,}8$ К.

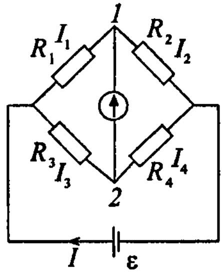
10.75. Найти количество теплоты Q_τ, выделившееся в единицу времени в единице объема медного провода при плотности тока $j = 300$ кА/м^2.

Решение:

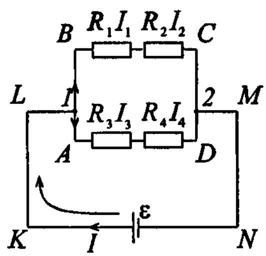
Согласно закону Джоуля — Ленца за время τ в проводнике выделяется количество теплоты $Q = I^2 R\tau$. Тогда в единицу времени в единице объема проводника выделится количество теплоты $Q_\tau = \frac{I^2 R}{V}$. Имеем $R = \rho\frac{l}{S}$; $V = Sl$, тогда $Q_\tau = \frac{I^2}{S^2}\rho$, где $\rho = 0{,}017 \cdot 10^{-6}$ Ом·м — удельное сопротивление меди. Плотность тока $j = \frac{I}{S}$, отсюда $Q_\tau = j^2 \rho = 1{,}5 \cdot 10^3$ Дж/(м^3·с).

10.76. Найти токи I_i в отдельных ветвях мостика Уитстона при условии, что через гальванометр идет ток $I_г = 0$. Э.д.с. элемента $\varepsilon = 2$ В, сопротивления $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 45$ Ом и $R_3 = 200$ Ом.

Решение:



Т. к. $I_г = 0$, то потенциалы в точках 1 и 2 одинаковые, следовательно, можно рассматривать упрощенную эквивалентную схему. По первому правилу Кирхгоффа для узла 1 имеем: $I = I_1 + I_3$ — (1). По второму правилу Кирхгоффа для контуров *KLBCMN* и *KLADMN* соответственно имеем: $\varepsilon = I_1(R_1 + R_2)$ — (2) и $\varepsilon = I_3(R_3 + R_4)$ — (3). Поскольку $U_{AD} = U_{BC}$, а также $I_1 = I_2$ и $I_3 = I_4$, то падения потенциалов на сопротивлениях R_2 и R_4 равны между собой, то $I_1R_2 = I_3R_4$ — (4). Из уравнения (2) находим, что $I_1 = I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$ — (5). Подставляя

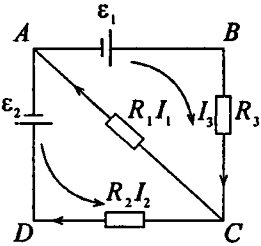


числовые данные, получим $I_1 = I_2 = 26{,}7$ мА. Из уравнения (3) находим, что $I_3 = \dfrac{\varepsilon}{R_3 + R_4}$ — (6), а из уравнения (4) находим, что $R_4 = \dfrac{I_1R_2}{I_3}$ — (7). Подставляя (5) в (7), получаем

$R_4 = \dfrac{R_2\varepsilon}{I_3(R_1 + R_2)}$ — (8). Решая совместно уравнения (6) и (8) и учитывая, что $I_3 = I_4$, окончательно получаем $I_3 = I_4 = \dfrac{R_1\varepsilon}{R_3(R_1 + R_2)} = 4$ мА.

10.77. Э.д.с. элементов $\varepsilon_1 = 2{,}1$ В и $\varepsilon_2 = 1{,}9$ В, сопротивления $R_1 = 45$ Ом, $R_2 = 10$ Ом и $R_3 = 10$ Ом. Найти токи I_i во всех участках цепи.

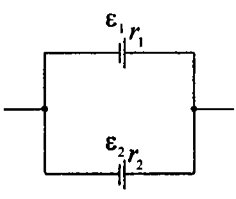
Решение:



На рисунке стрелками указано выбранное направление токов. Для узла A согласно первому правилу Кирхгоффа имеем $I_1 + I_2 = I_3$. Для контуров ABC и ACD по второму правилу Кирхгоффа имеем $I_3R_3 + I_1R_1 = \varepsilon_1$, $I_1R_1 - I_2R_2 = \varepsilon_2$. Подставляя числовые данные, получим систему уравнений: $I_3 = I_1 + I_2$, $10I_3 + 45I_1 = 2{,}1$, $45I_1 - 10I_2 = 1{,}9$. Решая эту систему, получим $I_1 = 0{,}04$ А, $I_2 = -0{,}01$ А, $I_3 = 0{,}03$ А. Знак «минус» у тока I_2 указывает на то, что его направление противоположно выбранному.

10.78. Какая разность потенциалов U получается на зажимах двух элементов, включенных параллельно, если их э.д.с. $\varepsilon_1 = 1{,}4$ В и $\varepsilon_2 = 1{,}2$ В и внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}6$ Ом и $r_2 = 0{,}4$ Ом?

Решение:



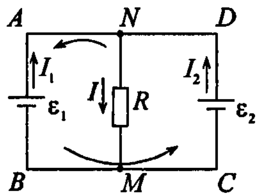
Согласно закону Ома для неоднородного участка цепи $I = \dfrac{\varepsilon_1 + (\varphi_1 - \varphi_2)}{r_1}$; $I = \dfrac{-\varepsilon_2 + (\varphi_1 - \varphi_2)}{r_2}$. Таким образом, $\dfrac{\varepsilon_1 + U}{r_1} = \dfrac{-\varepsilon_2 + U}{r_2}$, откуда $r_2(\varepsilon_1 - U) =$

$= r_1(U - \varepsilon_2)$; $\quad r_2\varepsilon_1 - r_2U = r_1U - r_1\varepsilon_2$; $\quad U = \dfrac{r_2\varepsilon_1 + r_1\varepsilon_2}{r_1 + r_2}$;

$U = 1{,}28$ В.

10.79. Два элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 2$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление R. Через элемент с э.д.с. ε_1 течет ток $I_1 = 1$ А. Найти сопротивление R и ток I_2, текущий через элемент с э.д.с. ε_2. Какой ток I течет через сопротивление R?

Решение:



Выберем и рассмотрим два контура $ABCD$ и $ABMN$. Для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом из элементов схемы. По второму правилу Кирхгоффа для контура $ABCD$ имеем $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = I_2r_2 - I_1r_1$ — (1); для контура $ABMN$ имеем $-\varepsilon_1 = -I_1r_1 - IR$ — (2). По первому правилу Кирхгоффа для узла N имеем $I = I_1 + I_2$ — (3). Из уравнения (1) ток $I_2 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + I_1r_1}{r_2} = 0{,}5$ А. Решаем систему уравнений методом подстановки, т. к. у нас есть три уравнения и три неизвестных. Подставив найденное значение тока I_2 в уравнение (3), найдем ток $I = I_1 + I_2 = 1{,}5$ А. Из уравнения (2) сопротивление $R = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1R}{I} = 0{,}66$ Ом.

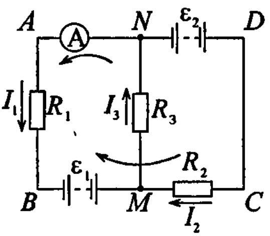
10.80. Решить предыдущую задачу, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ В, $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом и $I_1 = 2$ А.

Решение:

Т. к. внутренние сопротивления источников э.д.с. равны, то токи (см. задачу 10.79) $I_1 = I_2 = 2$ А, а, следовательно, $I = 2I_1 = 4$ А, тогда сопротивление $R = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1 r_1}{I} = 0{,}75$ Ом.

10.81. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 110$ В и $\varepsilon_2 = 220$ В, сопротивления $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 500$ Ом. Найти показание амперметра.

Решение:



Выберем и рассмотрим два контура $ABCD$ и $ABMN$, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении. По второму правилу Кирхгоффа для контура $ABMN$ имеем $\varepsilon_1 = I_3 R_3 + I_1 R_1$ — (1); для контура $ABCD$ имеем $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = I_2 R_2 - I_1 R_1$ — (2). Согласно первому правилу Кирхгоффа для узла M имеем $I_3 = I_1 + I_2$ — (3). Из уравнения (1) ток $I_3 = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1 R_1}{R_3}$, а из уравнения (2) ток $I_2 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + I_1 R_1}{R_2}$.

Амперметр покажет ток через сопротивление R_1, который из уравнения (3) $I_1 = I_3 - I_2 = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1 R_1}{R_3} - \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + I_1 R_1}{R_2}$ или окончательно $I_1 = \dfrac{\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_3 + \varepsilon_1 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3} = -0{,}4$ А. Знак «минус» означает, что мы ошиблись в выборе направления тока I_1, т. е. он течет в противоположном направлении.

10.82. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2$ В и $\varepsilon_2 = 4$ В, сопротивление $R_1 = 0{,}5$ Ом (см. рисунок к задаче 10.81). Падение потенциала на сопротивлении R_2 равно $U_2 = 1$ В (ток через R_2 направлен справа налево). Найти показание амперметра.

Решение:

Выберем и рассмотрим два контура $NMCD$ и $ABMN$. Для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом из элементов схемы. По второму правилу Кирхгоффа для контура $ABMN$ имеем $I_1R_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1$, для контура $NMCD$ имеем $I_3R_3 + I_2R_2 = \varepsilon_2$. Падение сопротивления на R_2: $U_2 = I_2R_2$. Подставляя числовые данные, получим систему уравнений $\begin{cases} 0{,}5I_1 - I_3R_3 = -2, \\ I_3R_3 + 1 = 4. \end{cases}$ Решив эту систему, получим $I_1 = 2$ А.

10.83. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 30$ В и $\varepsilon_2 = 5$ В, сопротивления $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом (см. рисунок к задаче 10.81). Через амперметр течет ток $I = 1$ А, направленный от R_3 к R_1. Найти сопротивление R_1.

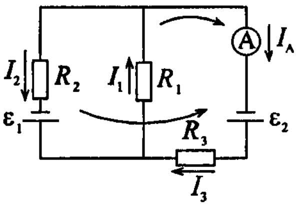
Решение:

Воспользуемся результатами задачи 10.81
$I_1 = \dfrac{\varepsilon_1R_2 - \varepsilon_2R_3 + \varepsilon_1R_3}{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}$. Преобразуем это выражение и выразим из него R_1: $I_1R_2R_3 + I_1R_1R_1 + I_1R_1R_3 = \varepsilon_1R_2 - \varepsilon_2R_3 + {}$ $+ \varepsilon_1R_3 - I_1R_2R_3$; $R_1I_1(R_2 + R_3) = R_2(\varepsilon_1 - I_1R_3) + R_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$;

$$R_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R_2 + (\varepsilon_1 - R_2I_1)R_3}{I_1(R_2 + R_3)} = \frac{100 + 500}{30} = 20\ \text{Ом}.$$

10.84. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2$ В и $\varepsilon_2 = 3$ В, сопротивления $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 0{,}5$ кОм и $R_3 = 0{,}2$ кОм, сопротивление амперметра $R_A = 0{,}2$ кОм. Найти показание амперметра.

Решение:

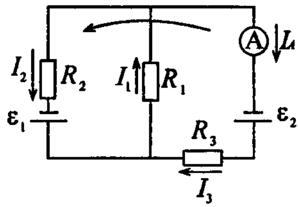


Выберем и рассмотрим два контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении и амперметре. Для каждого контура запишем уравнение по второму правилу Кирхгоффа $\varepsilon_2 = I_3R_3 + I_1R_1 + I_AR_A$ — (1); $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_2R_2 - I_3R_3 - I_AR_A$ — (2). С учетом $I_A = I_3$ уравнения (1) и (2) можно переписать следующим образом: $\varepsilon_2 = I_A(R_3 + R_A) + I_1R_1$ или $I_1 = \dfrac{\varepsilon_2 - I_A(R_3 + R_A)}{R_1}$ — (5); $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_2R_2 - I_A(R_3 - R_A)$ или $I_2 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I_A(R_3 + R_A)}{R_2}$ — (6). Из уравнения (3), с учетом уравнений (5) и (6), имеем $I_A = I_2 - I_1 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I_A(R_3 + R_A)}{R_2} - \dfrac{\varepsilon_2 - I_A(R_3 + R_A)}{R_1}$, откуда ток через амперметр $I_A = \dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R_1 - \varepsilon_2 R_2}{R_2R_3 - (R_3 + R_A)(R_1 - R_2)} = -0{,}45$ А. Знак «минус» означает, что направление тока I_A противоположно направлению, указанному на рисунке.

10.85. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2$ В и $\varepsilon_2 = 3$ В, сопротивление $R_3 = 1{,}5$ кОм, сопротивление амперметра $R_A = 0{,}5$ кОм. Падение потенциала на сопротивлении R_2 равно $U_2 = 1$ В (ток через R_2 направлен сверху вниз). Найти показание амперметра.

Решение:

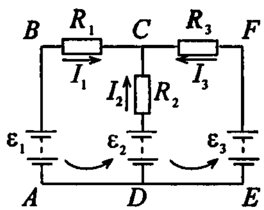
Выберем контур, направление обхода по нему и запишем для него уравнение по второму правилу Кирхгоффа $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = = U_2 - I_3R_3 - I_AR_A$. Кроме того, по первому правилу Кирхгоффа $I_1 = I_2 + I_A$. Отсюда показание амперметра $I_A = \frac{U_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_3 + R_A} = 1$ мА.



10.86. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В и $\varepsilon_3 = 6$ В, сопротивления $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом и $R_3 = 8$ Ом. Найти токи I_i во всех участках цепи.

Решение:

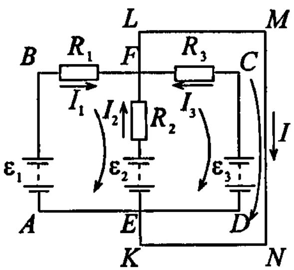
Выберем и рассмотрим два контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении. Для каждого контура запишем уравнение по второму правилу Кирхгоффа $\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = I_1R_1 - I_3R_3$ — (1); $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = I_2R_2 + I_1R_1$ — (2). Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_2 = I_1 + I_3$ — (3). Подставим (3) в (2), тогда $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = I_1R_2 + I_3R_2 + I_1R_1$, откуда $I_3 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - I_1R_2 - I_1R_1}{R_2}$ — (4). После подстановки (4) в (1) получаем $I_1 = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)R_2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} = 385$ мА. Подставляя найденное значение тока I_1 в уравнение (4), получаем $I_3 = -308$ мА. Знак «минус» означает, что направление тока



I_3 противоположно указанному на рисунке направлению. Подставляя найденное значение токов I_1 и I_3 в уравнение (3), находим $I_2 = 77$ мА.

10.87. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 6$ В, сопротивления $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 12$ Ом. При коротком замыкании верхнего узла схемы с отрицательным зажимом батарей через замыкающий провод течет ток $I = 1{,}6$ А. Найти токи I_i во всех участках цепи и сопротивление R_3.

Решение:

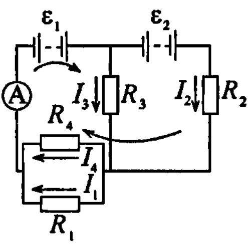


Для контура $ABFE$ по второму правилу Кирхгоффа при направлении обхода по часовой стрелке имеем $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1R_1 - I_2R_2$ и т. к. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то $I_1R_1 = I_2R_2$ — (1). Для контура $FCDE$ по второму правилу Кирхгоффа, при направлении обхода по часовой стрелке, имеем $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_2R_2 - I_3R_3$, т. к. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, то $I_3R_3 = I_2R_2$ — (2). При коротком замыкании узлов E и F получаем контур $KLMN$, для которого по второму правилу Кирхгоффа имеем $\varepsilon_2 = I_2R_2$ — (3), откуда ток через сопротивление R_2 равен $I_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{R_2} = 0{,}5$ А.

По первому правилу Кирхгоффа для узла F имеем $I_1 + I_2 + I_3 = I$ — (4). Из уравнения (1) с учетом (3) $I_1R_1 = \varepsilon_2$ находим ток через сопротивление R_1: $I_1 = \dfrac{\varepsilon_2}{R_1} = 0{,}3$ А. Из уравнения (4) находим ток через сопротивление R_3: $I_3 = I - I_1 - I_2 = 0{,}8$ А. Из уравнения (2) с учетом (3) сопротивление $R_3 = \dfrac{\varepsilon_2}{I_3} = 7{,}5$ Ом.

10.88. В схеме, изображенной на рисунке к задаче 10.86, токи I_1 и I_3 направлены справа налево, ток I_2 — сверху вниз. Падения потенциала на сопротивлениях R_1, R_2 и R_3 равны $U_1 = U_2 = U_3 = 10$ В. Найти э.д.с. ε_2 и ε_3, если э.д.с. $\varepsilon_1 = 25$ В.

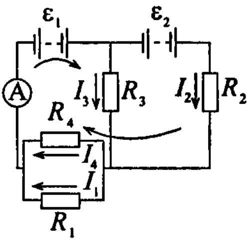
Решение:



Рассмотрим контур $ABCD$. По второму правилу Кирхгоффа $U_1 - U_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_2$ и $U_1 = 2U_2$, отсюда $\varepsilon_2 = U_1 - \dfrac{U_1}{2} + \varepsilon_1 = \dfrac{U_1}{2} + \varepsilon_1$; $\varepsilon_2 = 30$ В. Аналогично рассмотрим контур $CDFE$. По второму правилу Кирхгоффа $U_3 + U_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$ и $U_3 = 2U_2$, откуда $\varepsilon_3 = \dfrac{U_3}{2} + U_3 + \varepsilon_2$; $\varepsilon_3 = 45$ В.

10.89. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 100$ В, сопротивления $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 40$ Ом и $R_4 = 30$ Ом. Найти показание амперметра.

Решение:



Выберем и рассмотрим два контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении. Для каждого контура запишем уравнение по второму правилу Кирхгоффа $\varepsilon_1 = I_3 R_3 + I_{14} R_{14}$ — (1);

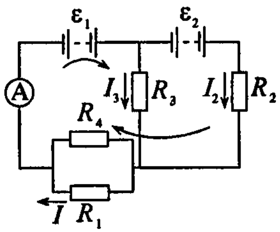
$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = I_2 R_2 + I_{14} R_{14}$ — (2), где $R_{14} = \dfrac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}$ — (3), т. к. сопротивления R_1 и R_4 соединены параллельно. Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_{14} = I_3 + I_2$ — (4), где I_{14} — ток, который покажет амперметр. Из уравнений (1) и (2) находим токи $I_3 = \dfrac{\varepsilon_1 - I_{14} R_{14}}{R_3}$ и $I_2 = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - I_{14} R_{14}}{R_2}$ и подставляем их в уравнение (4), тогда $I_{14} = \dfrac{\varepsilon_1 - I_{14} R_{14}}{R_3} + \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - I_{14} R_{14}}{R_2}$ — (5). Из уравнения (5) с учетом (3) окончательно получаем

$$I_{14} = \frac{\varepsilon_1 R_2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) R_3}{R_3 R_2 + R_1 R_4 (R_2 + R_3)/(R_1 + R_4)} = -9 \text{ мА}.$$

Знак «минус» означает, что ток I_{14} имеет направление, противоположное указанному на рисунке.

10.90. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$, сопротивления $R_1 = R_3 = 20$ Ом, $R_2 = 15$ Ом и $R_4 = 30$ Ом. Через амперметр течет ток $I = 1{,}5$ А, направленный снизу вверх. Найти э.д.с. ε_1 и ε_2, а также токи I_2 и I_3, текущие через сопротивления R_2 и R_3.

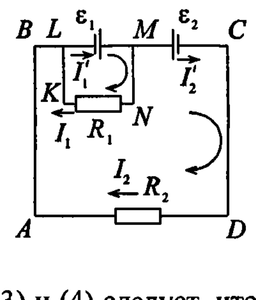
Решение:



Т. к. по условию батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$, то уравнения по второму правилу Кирхгоффа (см. задачу 10.89) запишутся следующим образом: $2\varepsilon_2 = I_3 R_3 + I R_{14}$ — (1) и $3\varepsilon_2 = I_2 R_2 + I R_{14}$ — (2), где I — показание амперметра, $R_{14} = \dfrac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}$ — (3) — общее сопротивление R_1 и R_4, т. к. они соединены параллельно. Т. к. $I = I_3 + I_2$ — (4), то $I_2 = I - I_3$ — (5), следовательно, после подстановки (5) в (2) имеем $3\varepsilon_2 = (I - I_3)R_2 + IR_{14}$ или $I_2 = \dfrac{I(R_2 + R_{14}) - 3\varepsilon_2}{R_2}$ — (6). Подставив (6) и (3) в (1), найдем э.д.с. $\varepsilon_2 = \dfrac{I[R_2R_3 + R_1R_4(R_3 + R_2)/(R_1 + R_4)]}{2R_2 + 3R_3} = 12$ В, тогда $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 24$ В. Подставив в уравнение (6) найденное значение ε_2, находим ток $I_3 = 0{,}3$ А; после чего из уравнения (5) ток $I_2 = 1{,}2$ А.

10.91. Два одинаковых элемента имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В и внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом. Найти токи I_1 и I_2, текущие через сопротивления $R_1 = 0{,}5$ Ом и $R_2 = 1{,}5$ Ом, а также ток I через элемент с э.д.с. ε_1.

Решение:

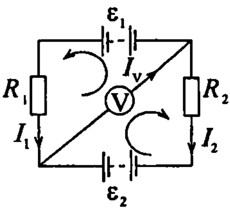


Для контура $KLMN$ по второму правилу Кирхгоффа при направлении обхода по часовой стрелке имеем $\varepsilon_1 = I_1R_1 + I_1'r_1$ — (1). Аналогично для контура $ABCD$: $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1R_1 + I_2'r_2 + I_1'r_1$ — (2). По первому правилу Кирхгоффа для узлов L и M соответственно получаем $I_1' = I_1 + I_2$ — (3) и $I_1' = I_1 + I_2$ — (4). Из уравнений (3) и (4) следует, что $I_2' = I_2$. Т. к. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то из уравнения (2) с учетом (4) получаем $I_2(R_2 + r_2) = -I_1'r_1$, откуда ток $I_2 = -\dfrac{I_1'r_1}{R_2 + r_2}$ — (5), а из уравнения (1) ток $I_1 = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1'r_1}{R_1}$ — (6). Подставляя (5) и

(6) в (3), получаем $I_1' = \frac{\varepsilon_1 - I_1' r_1}{R_1} - \frac{I_1' r_1}{R_2 + r_2}$, откуда ток через элемент ε_1 равен $I_1' = \frac{\varepsilon_1 (R_2 + r_2)}{R_1 R_2 + R_1 r_2 + r_1 R_2 + r_1 r_2 + r_1 R_1} = 1{,}78$ А. Из уравнения (5) ток через сопротивление R_2 равен $I_2 = -0{,}46$ А. Из уравнения (3) ток через сопротивление R_1 равен $I_1 = I_1' - I_2 = 2{,}24$ А.

10.92. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, сопротивления $R_2 = 2R_1$. Во сколько раз ток, текущий через вольтметр, больше тока, текущего через сопротивление R_2?

Решение:



Выберем и рассмотрим два контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении и в вольтметре. По второму правилу Кирхгоффа для каждого контура имеем $\varepsilon_1 = I_1 R_1 + I_V R_V$ — (1) и $\varepsilon_2 = I_2 R_2 + I_V R_V$ — (2) и т. к. по условию $R_2 = 2R_1$, то уравнение (2) можно переписать в виде $\varepsilon_2 = 2I_1 R_1 + I_V R_V$ — (3). Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_V = I_1 + I_2$ — (4), откуда $I_1 = I_V - I_2$ — (5). Вычтем из (3) (1), тогда $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 2I_2 R_1 - I_1 R_1 = 0$, т. к. по условию $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, следовательно, с учетом (5) $2I_2 R_1 = (I_V - I_2) R_1$, откуда $I_V = 3I_2$.

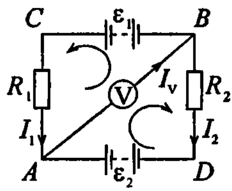
10.93. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 110$ В, сопротивления $R_1 = R_2 = 0{,}2$ кОм, сопротивление вольтметра $R_V = 1$ кОм (см. рисунок к задаче 10.92). Найти показание вольтметра.

Решение:

По второму правилу Кирхгоффа (см. задачу 10.92) $\varepsilon_1 = I_1R_1 + U$ — (1) и $\varepsilon_2 = I_2R_2 + U$ — (2), где $U = I_VR_V$ — показание вольтметра. Т. к. по условию $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $R_1 = R_2$, то из уравнений (1) и (2) следует, что $I_1 = I_2$. Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_V = I_1 + I_2 = 2I_1$, тогда $U = 2I_1R_V$ или $I_1 = \frac{U}{2R_V} + U = U\left(\frac{R_1}{2R_V} + 1\right)$, откуда показание вольтметра $U = \frac{2R_V\varepsilon_1}{R_1 + 2R_V} = 100\,\text{В}$.

10.94. Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, сопротивления $R_1 = R_2 = 100\,\text{Ом}$, сопротивление вольтметра $R_V = 150\,\text{Ом}$ (см. рисунок к задаче 10.93). Показание вольтметра $U = 150\,\text{В}$. Найти э.д.с. ε_1 и ε_2 батарей.

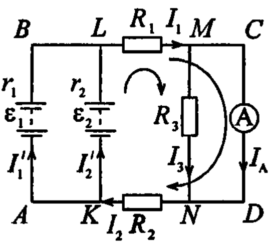
Решение:



По первому правилу Кирхгоффа $I_1 + I_2 = I_V$. По второму правилу Кирхгоффа для контуров ABC и ABD соответственно имеем: $I_1R_1 + I_VR_V = \varepsilon_1$ и $I_2R_2 + I_VR_V = \varepsilon_2$. По закону Ома $I_VR_V = U$, отсюда $I_1R_1 + U = \varepsilon_1$ и $I_2R_2 + U = \varepsilon_2$. Т. к. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $R_1 = R_2$, то $(I_1 + I_2)R_1 + 2U = 2\varepsilon_1$; $I_VR_1 + 2U = 2\varepsilon_1$; $\varepsilon_1 = \frac{I_VR_1}{2} + U$. По закону Ома $I_V = \frac{U}{R_V}$, отсюда $\varepsilon_1 = \frac{UR_1}{2R_V} + U = U\left(\frac{R_1}{2R_V} + 1\right)$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 200\,\text{В}$.

10.95. Элементы имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1{,}5$ В и внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом, сопротивления $R_1 = R_2 = 5$ Ом и $R_3 = 1$ Ом, сопротивление амперметра $R_A = 3$ Ом. Найти показание амперметра.

Решение:

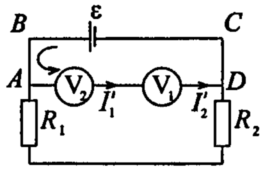


Выберем и рассмотрим три контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении и в амперметре. По второму правилу Кирхгоффа для контура $KLCD$ имеем $\varepsilon_2 = I_1R_1 + I_AR_A + I_2'r_2$ — (1). Для контура $ABCD$ имеем $\varepsilon_1 = I_1R_1 + I_AR_A + I_2R_2 + I_1'r_1$ — (2). Для контура $ABMN$ имеем $\varepsilon_1 = I_1R_1 + I_3R_3 + I_2R_2 + I_1'r_1$ — (3). По первому правилу Кирхгоффа для узла M $I_1 = I_3 + I_A$ — (4). Для узла N $I_2 = I_3 + I_A$ — (5). Вычитая (3) из (2), найдем $I_AR_A = I_3R_3$ или $3I_A = I_3$. Подставляя это выражение в (4), получим $I_1 = 4I_A$. Вычитая (2) из (1), найдем $I_2' = I_1'$. Из (4) и (5) следует, что $I_1 = I_2 = 4I_A$. Подставляя данное выражение в (1), найдем $19I_A + 0{,}5I_2' = 1{,}5$, откуда $I_2' = I_1' = 3 - 38I_A$. Из (5) имеем $4I_A = I_1' + I_2' = 6 - 76I_A$; $80I_A = 6$, отсюда ток, текущий через амперметр, $I_A = 75$ мА.

10.96. Элемент имеет э.д.с. $\varepsilon = 200$ В, сопротивления $R_1 = 2$ кОм и $R_2 = 3$ кОм, сопротивления вольтметров $R_{V1} = 3$ кОм и $R_{V2} = 2$ кОм. Найти показание вольтметров V_1 и V_2, если ключ K: а) разомкнут, б) замкнут. Задачу решить, применяя законы Кирхгоффа.

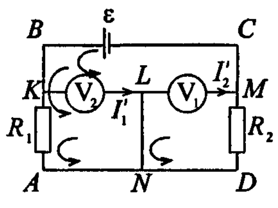
Решение:

а) Если ключ разомкнут, то схема принимает упрощенный вид, изображенный на рисунке. Рассмотрим контур $ABCD$ и выберем направление обхода против часовой стрелки. Тогда по второму правилу Кирхгоффа для данного контура



$\varepsilon = I_1' R_{V1} + I_2' R_{V2}$ — (1), но т. к. вольтметры соединены между собой последовательно, то токи $I_1' = I_2'$ — (2). Уравнение (1) с учетом (2) можно переписать следующим образом: $\varepsilon = I_1'(R_{V1} + R_{V2})$, откуда ток через вольтметры $I_1' = \dfrac{\varepsilon}{R_{V1} + R_{V2}}$. Вольтметры в данном случае покажут падение напряжений на своих собственных сопротивлениях, т. е. $U_1 = I_1' R_{V1} = \dfrac{\varepsilon R_{V1}}{R_{V1} + R_{V2}} = 120$ В; $U_2 = I_1' R_{V2} = \dfrac{\varepsilon R_{V2}}{R_{V1} + R_{V2}} = 80$ В.

б) Если ключ замкнут, то схема принимает следующий вид. Укажем предполагаемое направление токов в каждом элементе и рассмотрим контуры $KBCM$, $ABCD$, $AKLM$ и $NLMD$. Направление обхода в каждом контуре выберем против часовой стрелки. Напишем уравнение по второму правилу Кирхгоффа для каждого из контуров: $\varepsilon = I_1' R_{V1} + I_2' R_{V2}$ — (1); $\varepsilon = I_1 R_1 + I_2 R_2$ — (2). Поскольку контуры $AKLM$ и $NLMD$ не содержат источников э.д.с., то для них $I_1 R_1 - I_1' R_{V1} = 0$ — (3); $I_2 R_2 - I_2' R_{V2} = 0$ — (4). По первому правилу Кирхгоффа для узла L имеем $I_1 + I_1' = I_2 + I_2'$ — (5). Из уравнений (3) и (4) соответственно получим



$I'_1=\dfrac{I_1R_1}{R_{V1}}$ — (6) и $I'_2=\dfrac{I_2R_2}{R_{V2}}$ — (7). Подставляя (6) и (7) в (3), получаем $I_1\left(1+\dfrac{R_1}{R_{V1}}\right)=I_2\left(1+\dfrac{R_2}{R_{V2}}\right)$, откуда ток $I_1=\dfrac{I_2(R_{V1}+R_2)R_{V1}}{(R_{V1}+R_1)R_{V2}}$ — (8). Подставим (8) в (2), тогда $\varepsilon=\dfrac{I_2(R_{V2}+R_2)R_{V1}R_1}{(R_{V1}+R_1)R_{V2}}+I_2R_2$, отсюда ток

$$I_2=\frac{\varepsilon R_{V2}(R_{V1}+R_1)}{(R_{V2}+R_2)R_{V1}R_1+R_2R_{V2}(R_{V1}+R_1)} \text{ — (9).}$$

Следовательно, показание второго вольтметра

$$U_2=I_2R_2=\frac{\varepsilon R_2R_{V2}(R_{V1}+R_1)}{(R_{V2}+R_2)R_{V1}R_1+R_2R_{V2}(R_{V1}+R_1)}=100\text{ В}.$$

Подставив (9) в (8), находим ток

$$I_1=\frac{\varepsilon R_{V1}(R_{V2}+R_2)}{(R_{V2}+R_2)R_{V1}R_1+R_2R_{V2}(R_{V1}+R_1)},$$

тогда показание первого вольтметра

$$U_1=I_1R_1=\frac{\varepsilon R_1R_{V1}(R_{V2}+R_2)}{(R_{V2}+R_2)R_{V1}R_1+R_2R_{V2}(R_{V1}+R_1)}=100\text{ В}.$$

Применение правил Кирхгоффа к решению данной задачи авторы книги считают нерациональным. Читателю предлагается самостоятельно решить данную задачу, используя законы Ома для участка цепи и для полной цепи.

10.97. За какое время τ при электролизе водного раствора хлорной меди ($CuCl_2$) на катоде выделится масса меди $m=4{,}74$ г, если ток $I=2$ А?

Решение:

Согласно первому закону Фарадея $m=KI\tau$ — (1). Электрохимический эквивалент хлорной меди $K=\dfrac{1}{F}\dfrac{A}{Z}$, где $A = 64 \cdot 10^{-3}$ Кл/моль — постоянная Фарадея. Отсюда $K = 332{,}8 \cdot 10^{-9}$ кг/Кл. Из (1) $\tau = \dfrac{m}{KI}$. Подставляя числовые данные, получим $\tau \approx 2$ ч.

10.98. За какое время τ при электролизе медного купороса масса медной пластинки (катода) увеличится на $\Delta m = 99$ г? Площадь пластинки $S = 25$ см^2, плотность тока $j = 200$ А/м^2. Найти толщину d слоя меди, образовавшегося на пластинке.

Решение:

Согласно первому закону Фарадея $\Delta m = KI\tau$. Молярная масса меди $A = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, валентность меди в $CuSO_4$ равна $Z = 2$. Отсюда электрохимический эквивалент $\cdot K = \dfrac{1}{F}\dfrac{A}{Z} = 332{,}8 \cdot 10^{-9}$ кг/Кл. Сила тока $I = jS$. Тогда $\Delta m = KjS\tau$, откуда $\tau = \dfrac{\Delta m}{KjS} = 595$ с ≈ 10 мин. Объем образовавшегося слоя меди $V = Sd = \dfrac{\Delta m}{\rho}$, отсюда $d = \dfrac{\Delta m}{\rho S} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}$ м.

10.99. При электролизе медного купороса за время $\tau = 1$ ч выделилась масса меди $m = 0{,}5$ г. Площадь каждого электрода $S = 75$ см^2. Найти плотность тока j.

Решение:

Имеем $m = KjS\tau$ (см. задачу 10.98), откуда $j = \dfrac{m}{KS\tau} = 55{,}6$ А/м^2.

10.100. Найти электрохимический эквивалент K водорода.

Решение:

Имеем $K = \frac{1}{F}\frac{A}{Z}$, где $F = 96{,}48 \cdot 10^3$ Кл/моль — постоянная Фарадея, $A = 0{,}001$ — молярная масса водорода, $Z = 1$ — валентность. Подставляя числовые данные, получим $K = 1{,}04 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл.

10.101. Амперметр, включенный последовательно с электролитической ванной с раствором $AgNO_3$, показывает ток $I = 0{,}90$ А. Верен ли амперметр, если за время $\tau = 5$ мин прохождения тока выделилась масса $m = 316$ мг серебра?

Решение:

По первому закону Фарадея $m = KI\tau$. Тогда амперметр должен показывать ток $I = \frac{m}{K\tau}$. Найдем электрохимический эквивалент серебра. Имеем $K = \frac{1}{F}\frac{A}{Z}$, где $A = 0{,}108$, $Z = 1$. Отсюда $K = 1{,}12 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл. Подставляя числовые данные, получим $I = 0{,}94$ А. Следовательно, амперметр показывает ток на 0,04 А меньше, чем нужно.

10.102. Две электролитические ванны с растворами $AgNO_3$ и $CuSO_4$ соединены последовательно. Какая масса m_2 меди выделится за время, в течение которого выделилась масса $m_1 = 180$ г серебра?

Решение:

При последовательном соединении через обе ванны проходит одинаковый ток I. За время τ выделилась масса серебра $m_1 = K_1 I\tau$ — (1) и масса меди $m_2 = K_2 I\tau$ — (2). Выразив из (1) и (2) время τ, получим $\tau = \frac{m_1}{K_1 I} = \frac{m_2}{K_2 I}$, откуда $m_2 = \frac{m_1 K_2}{K_1}$. Электрохимический эквивалент серебра $K_1 = 1{,}12 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл. Подставляя числовые данные, получим $m_2 = 53{,}5 \cdot 10^{-6}$ кг.

10.103. При получении алюминия электролизом раствора Al_2O_3 в расплавленном криолите проходил ток $I = 20$ кА при разности потенциалов на электродах $U = 5$ В. За какое время τ выделится масса $m = 1$ т алюминия? Какая электрическая энергия W при этом будет затрачена?

Решение:

Имеем $m = KI\tau$, откуда $\tau = \frac{m}{KI}$, где $K = \frac{1}{96{,}48 \cdot 10^3} \times$ $\times \frac{27 \cdot 10^{-3}}{3} = 9{,}3 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл. Подставляя числовые данные, получим $\tau = 537634$ с $= 149{,}3$ ч. Затраченная энергия W будет равна работе электрических сил $A = P\tau$, т. е. $W = P\tau = IU\tau$. Подставляя числовые данные, получим $W = 53{,}8$ ГДж.

10.104. Какую электрическую энергию W надо затратить, чтобы при электролизе раствора $AgNO_3$ выделилась масса $m = 500$ мг серебра? Разность потенциалов на электродах $U = 4$ В.

Решение:

Имеем $W = UI\tau$ (см. задачу 10.103). По первому закону Фарадея $m = KI\tau$, откуда $I\tau = \frac{m}{K}$. Тогда $W = \frac{Um}{K}$, где $K = 1{,}12 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл (см. задачу 10.101). Подставляя числовые данные, получим $W = 1{,}8$ кДж.

10.105. Реакция образования воды из водорода и кислорода происходит с выделением тепла: $2H_2 + O_2 = 2H_2O + 5{,}57 \cdot 10^5$ Дж. Найти наименьшую разность потенциалов U, при которой будет происходить разложение воды электролизом.

Решение:
Для выделения массы m вещества при электролизе необходима энергия $W = IUt = \frac{mUZF}{A}$, откуда $U = \frac{WA}{mZF}$, где F — постоянная Фарадея, A — молярная масса, Z — валентность. Чтобы разложить $\nu = 2$ моль воды, т. е. чтобы выделить $m = 4$ г водорода, потребуется энергия $W = 5{,}57 \cdot 10^5$ Дж. Подставляя числовые данные, получим $U = 1{,}5$ В.

10.106. Найти эквивалентную проводимость Λ_∞ для очень слабого раствора азотной кислоты.

Решение:
В слабых растворах все молекулы диссоциированы, т. е. степень диссоциации $\alpha \approx 1$. Тогда эквивалентная проводимость $\Lambda_\infty = F(u_+ + u_-)$. Имеем $u_+ = 3{,}26 \cdot 10^{-7}$ м^2/(В·с) и $u_- = 0{,}64 \cdot 10^{-7}$ м^2/(В·с). Подставляя числовые данные, получим $\Lambda_\infty = 37{,}6 \cdot 10^{-3}$ м^2/(Ом·моль).

10.107. Через раствор азотной кислоты пропускается ток $I = 2$ А. Какое количество электричества q переносится за время $\tau = 1$ мин ионами каждого знака?

Решение:
Запишем уравнение диссоциации для азотной кислоты $HNO_3 \to H^+ + NO_3^-$. По определению силы тока $I = \frac{q}{\tau}$, откуда $q = I\tau$ — (1) — полное количество электричества, переносимое всеми ионами за время τ. Плотность тока

положительных и отрицательных ионов соответственно равна $j^+ = q^+n^+u^+$ — (2) и $j^- = q^-n^-u^-$ — (3), где q — количество электричества, переносимое ионами каждого знака, n — концентрация ионов, u — подвижность ионов. Из уравнения диссоциации видно, что концентрации положительных и отрицательных ионов равны, следовательно, и плотности тока по модулю равны, тогда из уравнений (2) и (3) имеем $q^-u^- = q^+u^+$ или $\frac{q^-}{q^+} = \frac{u^+}{u^-}$ — (4). Кроме того, с учетом (1), $q^+ + q^- = I\tau$ — (5). Решая совместно уравнения (4) и (5), находим $q^+ = \frac{I\tau u^+}{u^- + u^+} = 100{,}3\,\text{Кл}$ и $q^- = \frac{I\tau u^-}{u^- + u^+} = 19{,}7\,\text{Кл}$.

10.108. Эквивалентная проводимость раствора KCl при некоторой концентрации $\Lambda = 12{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^2/(\text{Ом}\cdot\text{моль})$, удельная проводимость при той же концентрации $\sigma = 0{,}122\,\text{См/м}$, эквивалентная проводимость при бесконечном разведении $\Lambda_\infty = 13 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^2/(\text{Ом}\cdot\text{моль})$. Найти: а) степень диссоциации α раствора KCl при данной концентрации; б) эквивалентную концентрацию η раствора; в) сумму подвижностей $u_+ + u_-$ ионов K^+ и Cl^-.

Решение:

В слабых растворах степень диссоциации $\alpha \approx 1$, т. е. все молекулы диссоциированы. Следовательно, эквивалентная проводимость $\Lambda_\infty = F(u^+ + u^-)$, откуда сумма подвижностей $u^+ + u^- = \frac{\Lambda_\infty}{F} = 13{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. По определению эквивалентной проводимости $\Lambda = \frac{\sigma}{\eta}$, откуда эквивалентная концентрация $\eta = \frac{\sigma}{\Lambda} = 0{,}1$ моль/л. Удельная проводимость электролита определяется формулой $\sigma = \alpha\eta F\left(u^+ + u^-\right) = \alpha\eta\Lambda_\infty$, откуда степень диссоциации электролита $\alpha = \frac{\sigma}{\eta\Lambda_\infty} \cdot 100\% = 0{,}938 \cdot 100\% = 93{,}8\%$.

10.109. Найти сопротивление R раствора $AgNO_3$, заполняющего трубку длиной $l = 84$ см и площадью поперечного сечения $S = 5\ мм^2$. Эквивалентная концентрация раствора $\eta = 0{,}1$ моль/л, степень диссоциации $\alpha = 81\%$.

Решение:
Сопротивление раствора в трубке выражается формулой $R = \rho\frac{l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление раствора. Удельная проводимость электролита определяется формулой $\sigma = \frac{1}{\rho} = \alpha\eta F\left(u^+ + u^-\right)$, где u^+ и u^- — соответственно подвижности ионов Ag^+ и NO_3^-, тогда удельное сопротивление $\rho = \frac{1}{\alpha\eta F\left(u^+ + u^-\right)}$ — (2). Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $R = \frac{l}{S\alpha\eta F\left(u^+ + u^-\right)} = 179{,}1$ кОм.

10.110. Найти сопротивление R раствора, заполняющего трубку длиной $l = 2$ см и площадью поперечного сечения $S = 7\ см^2$. Эквивалентная концентрация раствора $\eta = 0{,}05$ моль/л, эквивалентная проводимость $\Lambda = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\ м^2/(Ом \cdot моль)$.

Решение:
Сопротивление раствора в трубке выражается формулой $R = \rho\frac{l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление

раствора. По определению эквивалентной проводимости $\Lambda = \frac{\sigma}{\eta}$, откуда удельная проводимость электролита $\sigma = \Lambda\eta$ — (2). С другой стороны, $\sigma = \frac{1}{\rho}$, тогда, с учетом (2), удельное сопротивление раствора $\rho = \frac{1}{\Lambda\eta}$ — (3). Подставляя (3) в (1), окончательно получаем $R = \frac{l}{S\Lambda\eta} = 519{,}5$ кОм.

10.111. Трубка длиной $l = 3$ см и площадью поперечного сечения $S = 10\ см^2$ заполнена раствором $CuSO_4$. Эквивалентная концентрация раствора $\eta = 0{,}1$ моль/л, сопротивление $R = 38$ Ом. Найти эквивалентную проводимость Λ раствора.

Решение:

Сопротивление трубки $R = \rho\frac{l}{S}$. Отсюда удельное сопротивление электролита $\rho = \frac{RS}{l}$. Удельная электропроводность $\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{RS}$. Эквивалентная проводимость $\Lambda = \frac{\sigma}{\eta} = \frac{l}{RS\eta}$; $\Lambda = 7{,}89 \cdot 10^{-3}$ м²/(Ом·моль).

10.112. Удельная проводимость децинормального раствора соляной кислоты $\sigma = 3{,}5$ См/м. Найти степень диссоциации α.

Решение:

Удельная электропроводность $\sigma = \alpha CZF(u_+ + u_-)$, где $C = 0{,}1 \cdot 10^3$ м³/моль — молярная концентрация, $Z = 1$ — валентность, $u_+ = 32{,}6 \cdot 10^{-8}$ м²/(В·с) и $u_- = 6{,}8 \cdot 10^{-8}$ м²/(В·с) —

подвижности ионов. Отсюда степень диссоциации $\alpha = \dfrac{\sigma}{CZF(u_+ + u_-)} = 0{,}92 = 92\%$.

10.113. Найти число ионов n каждого знака, находящихся в единице объема раствора предыдущей задачи.

Решение:

При небольших плотностях тока, текущего в газе, имеет место закон Ома $j = qn(u_+ + u_-)E = \sigma E$, откуда $n = \dfrac{\sigma}{q(u_+ + u_-)} = 5{,}6 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

10.114. При освещении сосуда с газом рентгеновскими лучами в единице объема в единицу времени ионизуется число молекул $N = 10^{16}$ м$^{-3}$·с$^{-1}$. В результате рекомбинации в сосуде установилось равновесие, причем в единице объема газа находится число ионов каждого знака $n = 10^{14}$ м$^{-3}$. Найти коэффициент рекомбинации γ.

Решение:

Количество рекомбинирующих за единицу времени в единице объема пар ионов пропорционально квадрату числа имеющихся в единице объема пар ионов $N = \gamma n^2$. Отсюда коэффициент рекомбинации $\gamma = \dfrac{N}{n^2} = 10^{-12}$ м^3/с.

10.115. К электродам разрядной трубки приложена разность потенциалов $U = 5$ В, расстояние между ними $d = 10$ см. Газ, находящийся в трубке, однократно ионизирован. Число ионов каждого знака в единице объема газа $n = 10^8$ м$^{-3}$; подвижности ионов $u_+ = 3 \cdot 10^{-2}$ м^2/(В·с) и $u_- = 3 \cdot 10^2$ м^2/(В·с). Найти плотность тока j в трубке. Какая часть полного тока переносится положительными ионами?

Решение:

При небольших плотностях тока, текущего в газе, имеет место закон Ома $j = qn(u^+ + u^-)E$ — (1), где E — напряженность поля между электродами, которая равна $E = \frac{U}{d}$ — (2). Т. к. по условию газ однократно ионизирован, то заряд ионов $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $j = \frac{en(u^+ + u^-)U}{d} = 0{,}24$ мкА/м^2.

Плотность тока положительных ионов $j^+ = \frac{enu^+U}{d}$, тогда $\frac{j^+}{j} = \frac{u^+}{u^+ + u^-} = 10^{-4} \cdot 100\% = 0{,}01\%$.

10.116. Площадь каждого электрода ионизационной камеры $S = 0{,}01\,\text{м}^2$, расстояние между ними $d = 6{,}2$ см. Найти ток насыщения $I_\text{н}$ в такой камере, если в единице объема в единицу времени образуется число однозарядных ионов каждого знака $N = 10^{15}\,\text{м}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}$.

Решение:

Плотность тока насыщения в газе определяется формулой $j_\text{н} = Nqd$ — (1), где N — число пар ионов, созданных ионизирующим агентом в единице объема в единицу времени, d — расстояние между электродами. Сила и плотность тока связаны соотношением $j = \frac{I}{S}$, тогда $j_\text{н} = \frac{I_\text{н}}{S}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2) и считая $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, получим $\frac{I_\text{н}}{S} = Ned$, откуда ток насыщения $I_\text{н} = NedS = 0{,}1$ мкА.

10.117. Найти наибольшее возможное число ионов n каждого знака, находящихся в единице объема камеры предыдущей задачи, если коэффициент рекомбинации $\gamma = 10^{-12}$ м^3/с.

Решение:

Наибольшее возможное число ионов n каждого знака в единице объема камеры получится, если убывание ионов происходит только за счет рекомбинации. Тогда имеем $N = \gamma n^2$, откуда $n = \sqrt{\dfrac{N}{\gamma}} = 3{,}2 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$.

10.118. Найти сопротивление R трубки длиной $l = 84$ см и площадью поперечного сечения $S = 5$ мм^2, если она заполнена воздухом, ионизированным так, что в единице объема при равновесии находится $n = 10^{13}$ м$^{-3}$ однозарядных ионов каждого знака. Подвижности ионов $u_+ = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с) и $u_- = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с).

Решение:

Сопротивление трубки $R = \rho \dfrac{l}{S}$. Отсюда удельное сопротивление $\rho = \dfrac{RS}{l}$. Удельная электропроводность $\sigma = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{l}{RS}$. С другой стороны, $\sigma = qn(u_+ + u_-)$. Т. к. левые части равны, то можно приравнять и правые: $\dfrac{l}{RS} = qn(u_+ + u_-)$, отсюда $R = \dfrac{l}{qSn(u_+ + u_-)}$. Т. к. ионы однозарядные, то $q = e$ и окончательно $R = \dfrac{l}{eSn(u_+ + u_-)}$; $R = 3{,}4 \cdot 10^{14}$ Ом.

10.119. Какой ток I пройдет между электродами ионизационной камеры задачи 10.116, если к электродам приложена разность потенциалов $U = 20\,\text{В}$? Подвижности ионов $u_+ = u_- = 10^{-4}\,\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, коэффициент рекомбинации $\gamma = 10^{-12}\,\text{м}^3/\text{с}$. Какую долю тока насыщения составляет найденный ток?

Решение:

При небольших плотностях тока, текущего в газе, имеет место закон Ома $j = qn(u_+ + u_-)E$ – (1), где $E = \dfrac{U}{d}$ — (2) – напряженность однородного поля, U — разность потенциалов на электродах, d — расстояние между электродами, $n = \sqrt{\dfrac{N}{\gamma}}$ — (3) — число пар ионов, γ — коэффициент рекомбинации, $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Кл}$ — заряд иона, u_+ и u_- — подвижности ионов. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $j = e\sqrt{\dfrac{N}{\gamma}}(u_+ + u_-)\dfrac{U}{d}$ — (4). С другой стороны, плотность тока $j = \dfrac{I}{S}$ — (5), где I — сила тока, S — площадь электронов. Приравнивая правые части уравнений (4) и (5), получаем $\dfrac{I}{S} = e\sqrt{\dfrac{N}{\gamma}}(u_+ + u_-)\dfrac{US}{d} = 3{,}3\,\text{нА}$. Ток насыщения в камере (см. задачу 10.116) $I_\text{н} = NedS = 0{,}1\,\text{мкА}$, тогда $\dfrac{I}{I_\text{н}} = 3{,}3\%$.

10.120. Какой наименьшей скоростью v должен обладать электрон для того, чтобы ионизировать атом водорода? Потенциал ионизации атома водорода $U = 13{,}5\,\text{В}$.

Решение:

Потенциалом ионизации атома называется разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы при соударении с атомом его ионизировать. Поэтому скорость электрона найдем из равенства $\frac{mv^2}{2} = eU$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

10.121. При какой температуре T атомы ртути имеют кинетическую энергию поступательного движения, достаточную для ионизации? Потенциал ионизации атома ртути $U = 10{,}4$ В.

Решение:

Средняя кинетическая энергия поступательного движения атомов ртути $W_к = \frac{3}{2}kT$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Потенциальная энергия атомов в металле $W_п = eU$. По закону сохранения энергии $W_к = W_п$ или $\frac{3}{2}kT = eU$, откуда температура $T = \frac{2eU}{3k} = 8036$ К.

10.122. Потенциал ионизации атома гелия $U = 24{,}5$ В. Найти работу ионизации A.

Решение:

Потенциальная энергия атомов гелия $W = eU$. По закону сохранения энергии работа ионизации идет на разрыв связи молекул, т. е. равна потенциальной энергии $A = W = eU = 39{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж.

10.123. Какой наименьшей скоростью v должны обладать свободные электроны в цезии и платине для того, чтобы они смогли покинуть металл?

Решение:
По закону сохранения энергии кинетическая энергия свободных электронов $W_к = \frac{mv^2}{2}$ идет на работу выхода электронов из металла, следовательно, $\frac{mv^2}{2} = A$, откуда наименьшая скорость $v_{min} = \sqrt{\frac{2A}{m}}$. а) Для цезия $A = 1{,}9$ эВ, тогда $v_{min} = 8{,}3 \cdot 10^5$ м/с. б) Для платины $A = 5{,}3$ эВ, тогда $v_{min} = 1{,}4 \cdot 10^6$ м/с.

10.124. Во сколько раз изменится удельная термоэлектронная эмиссия вольфрама, находящегося при температуре $T_1 = 2400$ К, если повысить температуру вольфрама на $\Delta T = 100$ К?

Решение:
Удельная термоэлектронная эмиссия вольфрама при температурах T_1 и T_2: $j_1 = BT_1^2 e^{-\frac{A}{kT_1}}$ и $j_2 = BT_2^2 e^{-\frac{A}{kT_2}}$. Разделив второе уравнение на первое, получим $\frac{j_2}{j_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \times$ $\times e^{-\frac{A}{k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} = 2{,}6$.

10.125. Во сколько раз катод из торированного вольфрама при температуре $T = 1800$ К дает большую удельную эмиссию, чем катод из чистого вольфрама при той же температуре? Эмиссионная постоянная для чистого вольфрама $B_1 = 0{,}6 \cdot 10^6$ А/(м^2·К^2), для торированного вольфрама $B_2 = 0{,}3 \cdot 10^7$ А/(м^2·К^2).

Решение:

Удельная эмиссия чистого вольфрама равна $j_1 = B_1 T^2 e^{-\frac{A_1}{kT}}$. Удельная эмиссия торированного вольфрама равна $j_2 = B_2 T^2 e^{-\frac{A_2}{kT}}$. По таблице 17 найдем $A_1 = 4{,}5$ эВ $= 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж; $A_2 = 2{,}63$ эВ $= 4{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Отсюда отношение $\frac{j_2}{j_1} = \frac{B_2}{B_1} e^{\frac{1}{kT}(A_1 - A_2)}$. Подставляя числовые данные, получим $\frac{j_2}{j_1} = 11 \cdot 10^3$.

10.126. При какой температуре T_2 торированный вольфрам будет давать такую же удельную эмиссию, какую дает чистый вольфрам при $T_1 = 2500$ К? Необходимые данные взять из предыдущей задачи.

Решение:

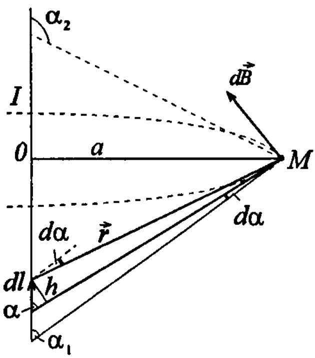
Удельная эмиссия чистого вольфрама при температуре $T_1 = 2500$ К и торированного вольфрама при температуре T_2: $j_1 = B_1 T_1^2 \exp\left(-\frac{A_1}{kT_1}\right) = 2{,}84 \cdot 10^3$ А/м^2, $j_2 = B_2 T_2^2 \times \exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right)$. По условию $j_1 = j_2$, т. е. $B_2 T_2^2 \exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) = 2{,}84 \cdot 10^3$ А/м^2 — (1). Т. к. в основном зависимость удельной эмиссии от температуры определяется экспоненциальным множителем $\exp\left(-\frac{A}{kT}\right)$, а не множителем T^2, то в первом приближении можно положить $B_2 T_1^2 \exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) =$

$= B_2(2500)^2 \, exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) 2{,}84\cdot 10^3$ А/м^2; отсюда $exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) = \frac{2{,}84\cdot 10^3}{B_2 T_1^2} = 1{,}86\cdot 10^{-8}$ и $T_2 = 1690$ К — первое приближение. Во втором приближении $B_2\cdot(1690)^2 \times \times exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) = 2{,}84\cdot 10^3$ А/м^2; отсюда $T_2 = 1770$ К — второе приближение. Далее $B_2\cdot(1770)^2 \, exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) = 2{,}84\cdot 10^3$ А/м^2; отсюда $T_2 = 1750$ К — третье приближение. Аналогично $B_2\cdot(1750)^2 \, exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) = 2{,}84\cdot 10^3$ А/м^2; отсюда $T_2 = 1760$ К – четвертое приближение. Легко убедиться, что пятое приближение с точностью до третьей значащей цифры совпадает с четвертым приближением. Таким образом, искомое решение $T_2 = 1760$ К.

В некоторых задачах этого раздела необходимо найти магнитную проницаемость μ материала. Для этого следует воспользоваться графиком зависимости магнитной индукции B от напряженности H магнитного поля, приведенным в приложении. Если известно значение B (или H), то, найдя по графику соответствующее ему значение H (или B), можно вычислить μ, используя соотношение $B = \mu\mu_0 H$. Кроме того, в этом разделе используются данные таблиц 3 и 15 из приложения. В задачах 11.66, 11.83, 11.123 дан авторский вариант решения.

11.1. Найти напряженность H магнитного поля в точке, отстоящей на расстоянии $a = 2$ м от бесконечно длинного проводника, по которому течет ток $I = 5$ А.

Решение:

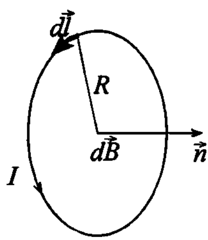


Выберем на проводнике с током элемент тока длиной $d\vec{l}$ (см. рисунок). Индукция магнитного поля, создаваемая этим элементом в точке M, согласно закону Био — Савара — Лапласа, $d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l}\cdot r\right]}{r^3}$. Вектор $d\vec{B}$ в точке M направлен от нас в плоскость чертежа. Модуль этого вектора $dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$. Выразим r и dl через угол α: $r = \frac{a}{\sin\alpha}$, а поскольку $\frac{h}{dl} = \frac{rd\alpha}{dl} = \sin\alpha$, то $dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ad\alpha}{\sin^2\alpha}$. Тогда $dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Iad\alpha\sin\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha a^2} =$

$= \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} \sin\alpha d\alpha$. Результирующую индукцию магнитного поля в точке M найдем интегрированием: $B = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} \sin\alpha d\alpha$. Здесь α — угол между направлением тока в проводнике (направлением вектора $d\vec{l}$) и вектором $\vec{r}$, проведенным от элемента $d\vec{l}$ в точку M, в которой определяется индукция магнитного поля. Если проводник бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. Тогда результирующая индукция магнитного поля $B = \int\limits_0^{\pi} \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} \sin\alpha d\alpha$; $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}$. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $H = \frac{I}{2\pi a} = 398$ мА.

11.2. Найти напряженность H магнитного поля в центре кругового проволочного витка радиусом $R = 1$ см, по которому течет ток $I = 1$ А.

Решение:

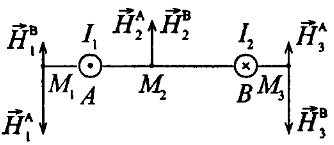


Каждый элемент тока создает в центре индукцию, направленную вдоль положительной нормали к контуру. Поэтому векторное сложение $d\vec{B}$ сводится к сложению их модулей. По закону Био — Савара — Лапласа $dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}$. Проинтегрируем это выражение по всему контуру: $B = \int dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{2R}$.

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $H = \frac{I}{2R}$. Подставляя числовые данные, получим $H = 50$ А/м.

11.3. На рисунке изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояние между проводниками $AB = 10$ см, токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А. Найти напряженности H магнитного поля, вызванного токами I_1 и I_2 в точках M_1, M_2 и M_3. Расстояния $M_1A = 2$ см, $AM_2 = 4$ см и $BM_3 = 3$ см.

Решение:



Согласно принципу суперпозиции напряженности $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3$ магнитного поля в точках M_1, M_2 и M_3 складываются из напряженностей, создаваемых токами I_1 и I_2. $\vec{H}_1 = \vec{H}_1^A + \vec{H}_1^B$; $\vec{H}_2 = \vec{H}_2^A + \vec{H}_2^B$; $\vec{H}_3 = \vec{H}_3^A + \vec{H}_3^B$. Напряженность $H = \dfrac{I}{2\pi a}$, где a — расстояние от проводника с током до точки, в которой определяется напряженность. Тогда $H_1^A = \dfrac{I_1}{2\pi \cdot M_1A} = 159{,}2$ А/м; $H_1^B = \dfrac{I_2}{2\pi \cdot (AB + M_1A)} = 39{,}8$ А/м;

$H_2^A = \dfrac{I_1}{2\pi \cdot M_2A} = 79{,}6$ А/м; $H_2^B = \dfrac{I_2}{2\pi \cdot (AB - M_2A)} = 79{,}6$ А/м;

$H_3^A = \dfrac{I_1}{2\pi \cdot (AB + M_3B)} = 24{,}5$ А/м;

$H_3^B = \dfrac{I_2}{2\pi \cdot M_3B} = 159{,}2$ А/м. Отсюда, с учетом рисунка, $H_1 = H_1^A - H_1^B = 119{,}4$ А/м; $H_2 = H_2^A + H_2^B = 159{,}2$ А/м; $H_3 = H_3^B - H_3^A = 134{,}7$ А/м.

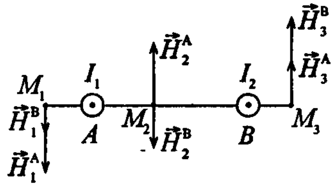
11.4. Решить предыдущую задачу при условии, что токи текут в одном направлении.

Решение:

$H_1 = H_1^A + H_1^B = 199$ А/м;

$H_2 = H_2^A - H_2^B = 0$ А/м;

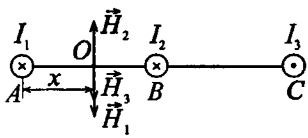
$H_3 = H_3^B + H_3^A = 183{,}7$ А/м (см. задачу 11.3).



11.5. На рисунке изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояния $AB = BC = 5$ см, токи $I_1 = I_2 = I$ и $I_3 = 2I$. Найти точку на прямой AC, в которой напряженность магнитного поля, вызванного токами I_1, I_2 и I_3, равна нулю.

Решение:

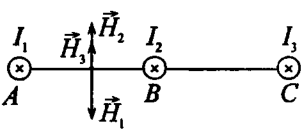
Искомая точка не может находиться на отрезке BC, т. к. векторы $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3$ здесь направлены в одну сторону и их сумма не может быть равной нулю. Тогда точка с нулевой напряженностью магнитного поля находится на отрезке AB на расстоянии x от точки A. Направления векторов $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3$ показаны на рисунке. По условию $\vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 = 0$, следовательно, $H_1 + H_3 = H_2$ — (2). Напряженность магнитного поля $H = \dfrac{I}{2\pi a}$, где a — расстояние от проводника с током до точки, в которой определяется напряженность. Тогда $H_1 = \dfrac{I}{2\pi x}$ — (2); $H_2 = \dfrac{I}{2\pi(AB - x)}$ — (3);



$H_3 = \dfrac{2I}{2\pi(BC + AB - x)}$ — (4). Подставив в (2) — (4) известные числовые данные, а затем подставив эти уравнения в (1), получим $\dfrac{I}{2\pi x} + \dfrac{2I}{2\pi(0{,}1 - x)} = \dfrac{I}{2\pi(0{,}05 - x)}$. Разделив уравнение на $\dfrac{I}{2\pi}$, получим $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{0{,}1 - x} = \dfrac{1}{0{,}05 - x}$. Решив данное уравнение, найдем $x = 0{,}033$ м. Т. е. точка O находится между точками I_1 и I_2 на расстоянии 3,3см от точки A.

11.6. Решить предыдущую задачу при условии, что токи текут в одном направлении.

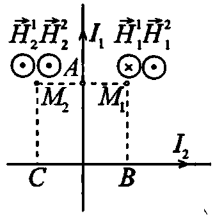
Решение:



Задачу решаем аналогично 11.5. При условии, что все токи текут в одном направлении, уравнение (1) примет вид: $H_2 + H_3 = H_1$ (см. рисунок). Решая далее, получим уравнение $\dfrac{2}{0{,}1 - x} + \dfrac{1}{0{,}05 - x} = \dfrac{1}{x}$. Приведя данное уравнение к квадратному и решив его, найдем, что напряженность равна нулю в точках, лежащих правее точки A на расстояниях 1,8 см и 6,96 см от нее.

11.7. Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг к другу и находятся в одной плоскости (см. рисунок). Найти напряженности H_1 и H_2 магнитного поля в точках M_1 и M_2, если токи $I_1 = 2$ А и $I_2 = 3$ А. Расстояния $AM_1 = AM_2 = 1$ см и $BM_1 = CM_2 = 2$ см.

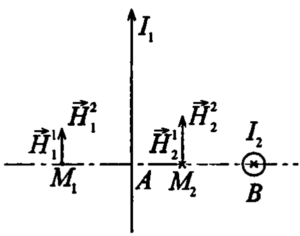
Решение:



Напряженность в точке M_1: $\vec{H}_1 = \vec{H}_1^1 + \vec{H}_1^2$, где $\vec{H}_1^1$ — напряженность магнитного поля тока I_1, $\vec{H}_1^2$ — напряженность магнитного поля тока I_2. Направление векторов определим по правилу правого винта: $\vec{H}_1^1$ — от нас, $\vec{H}_1^2$ — к нам. Имеем $H_1^1 = \dfrac{I_1}{2\pi \cdot AM_1} = 31{,}8$ А/м; $H_1^2 = \dfrac{I_2}{2\pi \cdot BM_1} = 23{,}8$ А/м. Поскольку векторы $\vec{H}_1^1$ и $\vec{H}_1^2$ направлены в противоположные стороны, то имеем $H_1 = H_1^1 - H_1^2 = 8$ А/м. Напряженность в точке M_2: $\vec{H}_2 = \vec{H}_2^1 + \vec{H}_2^2$, где оба вектора $\vec{H}_2^1$ и $\vec{H}_2^2$ направлены к нам. $H_2^1 = \dfrac{I_1}{2\pi \cdot AM_2} = 31{,}8$ А/м; $H_2^2 = \dfrac{I_2}{2\pi \cdot CM_2} = 23{,}8$ А/м, тогда $H_2 = H_2^1 + H_2^2 = 55{,}6$ А/м.

11.8. Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг к другу и находятся во взаимно перпендикулярных плоскостях. Найти напряженности H_1 и H_2 магнитного поля в точках M_1 и M_2, если токи $I_1 = 2$ А и $I_2 = 3$ А. Расстояния $AM_1 = AM_2 = 1$ см и $AB = 2$ см.

Решение:



Напряженность в точке M_1: $\vec{H}_1 = \vec{H}_1^1 + \vec{H}_1^2$. Вектор $\vec{H}_1^1$ направлен к нам, вектор $\vec{H}_1^2$ направлен перпендикулярно $\vec{H}_1^1$, вверх. Напряженность в точке

M_2: $\vec{H}_2 = \vec{H}^1 + \vec{H}_2^2$. Вектор $\vec{H}_2^1$ направлен от нас, вектор $\vec{H}_2^2$ направлен вверх перпендикулярно $\vec{H}_2^1$. Найдем величины:

$$H_1^1 = \frac{I_1}{2\pi \cdot AM_1} = 31{,}8 \text{ А/м}; \quad H_1^2 = \frac{I_2}{2\pi \cdot (AB + AM_1)} = 15{,}9 \text{ А/м};$$

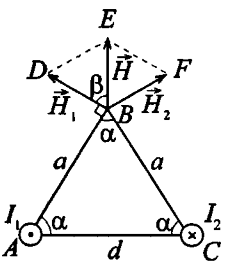
$$H_2^1 = \frac{I_1}{2\pi \cdot AM_2} = 31{,}8 \text{ А/м}; \quad H_2^2 = \frac{I_2}{2\pi \cdot (AB - AM_2)} = 47{,}8 \text{ А/м}.$$

Тогда $H_1 = \sqrt{\left(H_2^1\right)^2 + \left(H_1^2\right)^2} = 35{,}6$ А/м;

$$H_2 = \sqrt{\left(H_2^1\right)^2 + \left(H_2^2\right)^2} = 57{,}4 \text{ А/м}.$$

11.9. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. По проводникам текут токи $I_1 = I_2 = 5$ А в противоположных направлениях. Найти модуль и направление напряженности $\vec{H}$ магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $a = 10$ см от каждого проводника.

Решение:



Согласно принципу суперпозиции напряженность магнитного поля в точке B: $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, где $H_1 = \frac{I_1}{2\pi a}$; $H_2 = \frac{I_2}{2\pi a}$. Поскольку $I_1 = I_2$, то $H_1 = H_2$. Следовательно, вектор $\vec{H}$ будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат оба проводника. Треугольник ABC — равносторонний, т. к. $a = d$, следовательно, угол $\alpha = 60°$. $\angle DBA = \angle FBC$, отсюда $\beta = 60°$. Т. к. две боковые стороны треугольника BDE равны и угол при основании равен $60°$, то треугольник равносторонний. Тогда модуль вектора $\vec{H}$ равен модулю вектора $\vec{H}_1$, т. е. $H = H_1 = \dfrac{I_1}{2\pi a} = 8$ А/м.

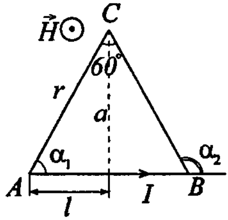
11.10. По длинному вертикальному проводнику сверху вниз идет ток $I = 8$ А. На каком расстоянии a от него напряженность поля, получающегося от сложения земного магнитного поля и поля тока, направлена вертикально вверх? Горизонтальная составляющая напряженности земного поля $H_г = 16$ А/м.

Решение:

Вектор магнитного поля Земли имеет горизонтальную $\vec{H}_г$ и вертикальную $\vec{H}_в$ составляющие. Для того чтобы было выполнено условие задачи, необходимо, чтобы магнитное поле тока $\vec{H}$ было равно по величине и противоположно по направлению $\vec{H}_г$. Таким образом, $H = H_г = \dfrac{I}{2\pi a}$, откуда $a = \dfrac{I}{2\pi H_г}$. Подставляя числовые данные, получим $a = 0{,}08$ м.

11.11. Найти напряженность H магнитного поля, создаваемого отрезком AB прямолинейного проводника с током, в точке C, расположенной на перпендикуляре к середине этого отрезка на расстоянии $a = 5$ см от него. По проводнику течет ток $I = 20$ А. Отрезок AB проводника виден из точки C под углом $60°$.

Решение:



По закону Био — Савара — Лапласа элемент контура dl, по которому течет ток I, создает в некоторой точке A пространства магнитное поле напряженностью $dH = \dfrac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl$, где r — расстояние от точки A до элемента тока dl, α — угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и элементом тока dl. Напряженность магнитного поля в точке C будет равна $H = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{I \sin\alpha}{4\pi r^2} dl$. Но $l = a \cdot ctg\alpha$ и $dl = -\frac{a d\alpha}{\sin^2\alpha}$. Далее, $r = \frac{a}{\sin\alpha}$. Следовательно, $H = -\frac{I}{4\pi a} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin\alpha d\alpha = \frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos a_2) = 31{,}8$ А/м, где $\alpha_2 = 180° - 60° = 120°$.

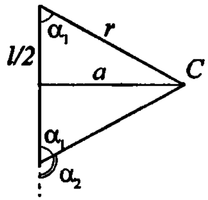
11.12. Решить предыдущую задачу при условии, что ток в проводнике $I = 30$ А и отрезок проводника виден из точки C под углом $90°$. Точка расположена на расстоянии $a = 6$ см от проводника.

Решение:

Из задачи 11.11 имеем $H = \frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$. Здесь $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_2 = 180° - 45° = 135°$. Подставляя числовые данные, получим $H = 56{,}3$ А/м.

11.13. Отрезок прямолинейного проводника с током имеет длину $l = 30$ см. При каком предельном расстоянии a от него для точек, лежащих на перпендикуляре к его середине, магнитное поле можно рассматривать как поле бесконечно длинного прямолинейного тока? Ошибка при таком допущении не должна превышать 5%. Указание: допускаемая ошибка $\delta = \frac{(H_2 - H_1)}{H_2}$, где H_1 — напряженность поля от отрезка проводника с током и H_2 — напряженность поля от бесконечно длинного прямолинейного тока.

Решение:



Напряженность магнитного поля, создаваемая отрезком прямолинейного проводника с током, $H_1 = \frac{I}{4\pi a} \times (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$ — (1) (см. задачу 11.11). Бесконечно длинный прямолинейный проводник с током создает магнитное поле напряженностью $H_2 = \frac{I}{2\pi a}$ — (2). Допускаемая ошибка $\delta = \frac{H_2 - H_1}{H_2}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\delta = 1 - \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{2}$. Из рисунка видно, что $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, тогда $\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos\alpha_1$. Отсюда $\delta = 1 - \cos\alpha_1$ или $\cos\alpha_1 = 1 - \delta$. Имеем $\frac{l}{2} = r\cos\alpha_1 = r(1-\delta)$, где $r = \frac{a}{\sin\alpha_1} = \frac{a}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}} = \frac{a}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. Тогда $\frac{l}{2} = \frac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$, откуда $a = \frac{l\sqrt{1-(1-\delta)^2}}{2(1-\delta)} = 5$ см.

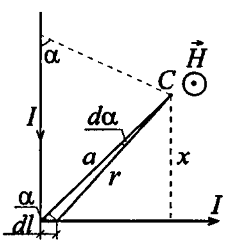
11.14. В точке C, расположенной на расстоянии $a = 5$ см от бесконечно длинного прямолинейного проводника с током, напряженность магнитного поля $H = 400$ А/м. При какой предельной длине l проводника это значение напряженности будет верным с точностью до 2%? Найти напряженность H магнитного поля в точке C, если проводник с током имеет длину $l = 20$ см и точка C расположена на перпендикуляре к середине этого проводника.

Решение:

Воспользуемся формулой, полученной в предыдущей задаче, $\frac{l}{2}=\frac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. По условию $\delta=0{,}02$, тогда $l=\frac{2a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}=0{,}245$ м. Напряженность магнитного поля в точке C (см. рисунок к задаче 11.13) $H_1=\frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)=\frac{I\cos\alpha_1}{2\pi a}$ — (1). Силу тока I найдем из выражения $H_2=\frac{I}{2\pi a}$, откуда $I=2H_2\pi a$ — (2), где $H_2=400$ А/м. Значение $\cos\alpha_1$ найдем, вычислив $tg\alpha_1=\frac{2a}{l}=0{,}5$. Отсюда угол $\alpha_1\approx 27°$, $\cos\alpha_1\approx 0{,}89$. Подставляя (2) в (1), получим $H_1=H_2\cos\alpha_1=356$ А/м.

11.15. Ток $I=20$ А идет по длинному проводнику, согнутому под прямым углом. Найти напряженность H магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе этого угла и отстоящей от вершины угла на расстоянии $a=10$ см.

Решение:



Разобьем проводник на вертикальный и горизонтальный участки, каждый из которых создает в точке C магнитное поле. Пусть $\vec{H}_1$ — напряженность магнитного поля, создаваемого вертикальным участком, $\vec{H}_2$ — горизонтальным. Тогда результирующая напряженность $\vec{H}=\vec{H}_1+\vec{H}_2$. Поскольку векторы $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ направлены на нас, то можно записать: $H=H_1+H_2$ — (1). По закону Био — Савара — Лапласа

$H_1 = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2} dl$ — (2); $H_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2} dl$ — (3). Выразим величины r и dl через угол α: $dl = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha}$; $r = \frac{x}{\sin\alpha}$, где $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, т. е. $r = \frac{a}{\sqrt{2}\sin\alpha}$. Подставим полученные соотношения в интеграл $\int \frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2} dl$ и вычислим его: $\int \frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2} dl = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\sin\alpha \cdot 2\sin^2\alpha \cdot a}{a^2 \sin\alpha \cdot \sqrt{2}\sin\alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{2}I}{4\pi a} \int \sin\alpha d\alpha$. Тогда $H_1 = \frac{\sqrt{2}I}{4\pi a} \int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin\alpha d\alpha$; $H_1 = \frac{\sqrt{2}I}{4\pi a}\left(-\cos\frac{3}{4}\pi + \cos 0\right)$; $H_1 = 37{,}9$ А/м. Аналогично $H_2 = \frac{\sqrt{2}I}{4\pi a}\left(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{4}\right)$; $H_2 = 39{,}3$ А/м. Подставив полученные значения в (1), найдем $H = 77{,}2$ А/м.

11.16. Ток $I = 20$ А, протекая по кольцу из медной проволоки сечением $S = 1\,\text{мм}^2$, создает в центре кольца напряженность магнитного поля $H = 178$ А/м. Какая разность потенциалов U приложена к концам проволоки, образующей кольцо?

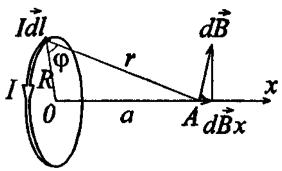
Решение:

Напряженность в центре кругового тока $H = \frac{I}{2r}$ (см. задачу 11.2), где r — раднус витка. К концам проволоки приложена разность потенциалов $U = IR$ — (2), где сопротивление проволоки $R = \rho\frac{l}{S}$ — (3). Удельная проводимость меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м, длина проволоки

$l = 2\pi r$ — (4). Из (1) найдем $r = \dfrac{I}{2H}$ — (5). Решая совместно уравнения (2) — (5), получим $U = \dfrac{\pi\rho I^2}{HS}$; $U = 0{,}12$ В.

11.17. Найти напряженность H магнитного поля на оси кругового контура на расстоянии $a = 3$ см от его плоскости. Радиус контура $R = 4$ см, ток в контуре $I = 2$ А.

Решение:



Выберем элемент тока $Id\vec{l}$. В точке A он создает поле $d\vec{B} = \dfrac{\mu\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}$. В силу симметрии суммарный вектор $\vec{B}$ направлен вдоль оси x, а это значит, что для нахождения модуля вектора надо сложить проекции всех векторов $d\vec{B}$ на ось Ox. $dB_x = dB\cos\varphi = \; = \dfrac{\mu\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_0 dl}{r^3}\cos\varphi$. Интегрируя это выражение по всем dl, что дает $2\pi R$, и учитывая, что $\cos\varphi = \dfrac{R}{r}$, $r = \left(a^2 + R^2\right)^{\frac{1}{2}}$, получаем $B = \dfrac{\mu\mu_0}{4\pi}\dfrac{2\pi R^2 I}{\left(a^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $H = \dfrac{R^2 I}{2\left(a^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; $H = 12{,}7$ А/м.

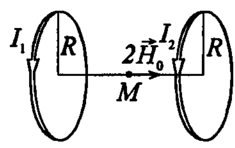
11.18. Напряженность магнитного поля в центре кругового витка $H_0 = 0{,}8$ Э. Радиус витка $R = 11$ см. Найти напряженность H магнитного поля на оси витка на расстоянии $a = 10$ см от его плоскости.

Решение:

Переведем значение напряженности в единицы СИ. Поскольку $1\,Э = \frac{1}{4\pi}\cdot 10^3$ А/м $\approx 79{,}6$ А/м, то $H_0 = 0{,}8\,Э = 63{,}7$ А/м. Напряженность магнитного поля на оси кругового витка $H = \frac{R^2 I}{2\left(R^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Нам неизвестен ток I. Но напряженность в центре витка $H_0 = \frac{I}{2R}$, откуда $I = 2H_0 R$. Тогда $H = \frac{R^3 H_0}{\left(R^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 25{,}7$ А/м.

11.19. Два круговых витка радиусом $R = 4$ см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. По виткам текут токи $I_1 = I_2 = 2$ А. Найти напряженность H магнитного поля на оси витков в точке, находящейся на равном расстоянии от них. Задачу решить, когда: а) токи в витках текут в одном направлении; б) токи в витках текут в противоположных направлениях.

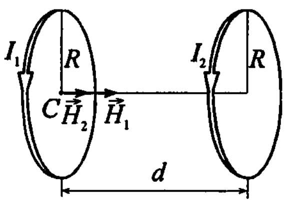
Решение:



Напряженность магнитного поля, создаваемого каждым из круговых витков в точке M, равна $H_0 = \frac{IR^2}{2\left(R^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, где $r = \frac{d}{2} = 5$ см. Поскольку величины I, R и r для обоих витков одинаковы, то значение напряженности по абсолютной величине для обоих витков будет равным, т. е. $H_{01} = H_{02}$. Согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность магнитного поля $\vec{H} = \vec{H}_{01} + \vec{H}_{02}$. Если токи в витках текут в одном направлении, то направления векторов напряженности $\vec{H}_{01}$ и $\vec{H}_{02}$ совпадают и $\vec{H} = 2\vec{H}_0$ или $H = \dfrac{IR^2}{\left(R^2 + r\right)^{\frac{3}{2}}} = 12{,}2$ А/м. Если токи текут в противоположных направлениях, то $\vec{H}_{01} = -\vec{H}_{02}$ и $H = 0$.

11.20. Два круговых витка радиусом $R = 4$ см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $d = 5$ см друг от друга. По виткам текут токи $I_1 = I_2 = 4$ А. Найти напряженность H магнитного поля в центре одного из витков. Задачу решить, когда: а) токи в витках текут в одном направлении; б) токи в витках текут в противоположных направлениях.

Решение:



Согласно принципу суперпозиции напряженность в точке C равна $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, где $H_1 = \dfrac{I_1}{2R_1}$, $H_2 = \dfrac{I_2 R_2^2}{2\left(R_2^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Если токи текут в одном направлении, то $H = H_1 + H_2$. По условию $R_1 = R_2 = R$ и $I_1 = I_2 = I$. Тогда $H = \dfrac{I}{2R} + \dfrac{IR^2}{2\left(R^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

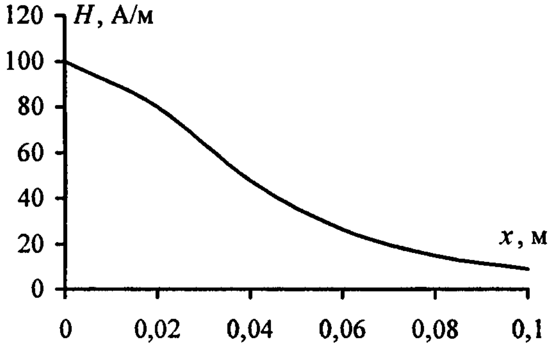
Подставляя числовые данные, получим $H = 62{,}3$ А/м. Если токи текут в противоположных направлениях, то $H = H_1 - H_2$; $H = 37{,}7$ А/м.

11.21. Найти распределение напряженности H магнитного поля вдоль оси кругового витка диаметром $D = 10$ см, по которому течет ток $I = 10\,А$. Составить таблицу значений H и построить график для значений x в интервале через каждые 2см.

Решение:

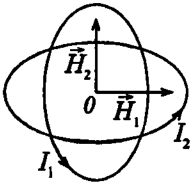
Зависимость напряженности магнитного поля H от расстояния x, откладываемого по оси кругового витка, дается следующим уравнением: $H = \frac{IR^2}{2\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, где $R = \frac{D}{2} = $ $= 5\,см$. Подставляя числовые данные, получим $H = \frac{12{,}5 \cdot 10^{-3}}{\left(25 \cdot 10^{-4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. По данной зависимости составим таблицу и построим график.

x, м	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
H, А/м	100,00	80,04	47,61	26,24	14,89	8,94



11.22. Два круговых витка расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что центры этих витков совпадают. Радиус каждого витка $R = 2\,см$, токи в витках $I_1 = I_2 = 5\,А$. Найти напряженность H магнитного поля в центре этих витков.

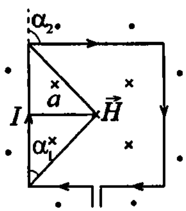
Решение:



Напряженность магнитного поля в центре кругового витка с током $H = \frac{I}{2R}$. На рисунке видно, что векторы $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ взаимно перпендикулярны. Согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ или $H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$. Поскольку $I_1 = I_2 = I$ и $R_1 = R_2 = R$, то $H_1 = H_2 = \frac{I}{2R}$. Тогда $H = \frac{I}{2R}\sqrt{2} = 177$ А/м.

11.23. Из проволоки длиной $l = 1$ м сделана квадратная рамка. По рамке течет ток $I = 10$ А. Найти напряженность H магнитного поля в центре рамки.

Решение:



Рамку можно условно разбить на четыре проводника длиной $\frac{l}{4}$, каждый из которых создает магнитное поле напряженностью $H_0 = \frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$ (см. задачу 11.11). Из рисунка видно, что $a = \frac{l}{8}$, угол $\alpha_1 = 45°$, угол $\alpha_2 = 135°$. Очевидно, что результирующая напряженность $\vec{H} = 4\vec{H}_0$. Вектор $\vec{H}$ направлен от нас, в плоскость чертежа. Таким образом, $H = \frac{8I}{\pi l} \times$ $\times(\cos 45° - \cos 135°) = \frac{8\sqrt{2}I}{\pi l}$; $H = 36$ А/м.

11.24. В центре кругового проволочного витка создается магнитное поле напряженностью H при разности потенциалов U_1 на концах витка. Какую надо приложить разность потенциалов U_2, чтобы получить такую же напряженность магнитного поля в центре витка вдвое большего радиуса, сделанного из той же проволоки?

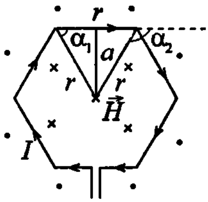
Решение:

Напряженность в центре кругового витка с током $H = \frac{I}{2r}$, где r — радиус витка. По закону Ома $I = \frac{U}{R}$, где сопротивление проводника $R = \rho \frac{l}{S}$. Для кругового витка радиуса r длина проводника $l_1 = 2\pi r$, тогда $R_1 = \rho \frac{2\pi r}{S}$ и $I_1 = \frac{U_1 S}{2\rho\pi r}$. Для кругового витка радиуса $2r$ длина проводника $l_2 = 4\pi r$, тогда $R_2 = \rho \frac{4\pi r}{S}$ и $I_2 = \frac{U_1 S}{4\rho\pi r}$. По условию $H = \frac{I_1}{2r} = \frac{I_2}{4r}$ или $\frac{U_1 S}{4\rho\pi r^2} = \frac{U_2 S}{16\rho\pi r^2}$, откуда $U_2 = 4U_1$.

11.25. По проволочной рамке, имеющей форму правильного шестиугольника, идет ток $I = 2$ А. При этом в центре рамки образуется магнитное поле напряженностью $H = 33$ А/м. Найти длину l проволоки, из которой сделана рамка.

Решение:

Разобьем шестиугольник на шесть прямолинейных проводников длиной $r = \frac{l}{6}$, каждый из которых создает в центре шестиугольника магнитное поле напряженностью $H_0 = \frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$ (см. задачу 11.11). Из рисунка

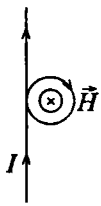


найдем $\alpha_1 = 60°$; $\alpha_2 = 120°$; $a = r\sin 60° = \frac{\sqrt{3}l}{12}$. Результирующий вектор $\vec{H} = 6\vec{H}_0$ и направлен от нас в плоскость рисунка. Подставив найденные величины, получим $H_0 = \frac{\sqrt{3}I}{\pi l}$.

Тогда $H = \frac{6\sqrt{3}I}{\pi l}$, откуда $l = \frac{6\sqrt{3}I}{H\pi} = 0{,}2$ м.

11.26. Бесконечно длинный провод образует круговой виток, касательный к проводу. По проводу идет ток $I = 5$ А. Найти радиус R витка, если напряженность магнитного поля в центре витка $H = 41$ А/м.

Решение:

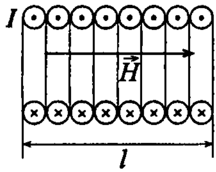


Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ в центре витка складывается из направленных за чертеж векторов напряженности $\vec{H}_1$, создаваемой прямолинейным проводником, и напряженности $\vec{H}_2$, создаваемой круговым током. $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, где $H_1 = \frac{I}{2\pi R}$; $H_2 = \frac{I}{2R}$. Тогда $H = \frac{I(1+\pi)}{2\pi R}$, откуда $R = \frac{I(1+\pi)}{2\pi H} = 8$ см.

11.27. Катушка длиной $l = 30$ см имеет $N = 1000$ витков. Найти напряженность H магнитного поля внутри катушки, если по катушке проходит ток $I = 2$ А. Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.

Решение:

По условию диаметр катушки намного меньше ее длины, тогда катушку можно считать бесконечно длинным соленоидом, для которого $H = In$, где $n = \frac{N}{l}$ — число витков на единицу длины. Таким образом, $H = I\frac{N}{l} = 6{,}67$ кА/м.



Направление магнитного поля в соленоиде (в разрезе)

11.28. Обмотка катушки сделана из проволоки диаметром $d = 0{,}8$ мм. Витки плотно прилегают друг к другу. Считая катушку достаточно длинной, найти напряженность H магнитного поля внутри катушки при токе $I = 1$ А.

Решение:

Внутри катушки напряженность поля $H = In$, где n — число витков на единицу длины, равное $\frac{1}{d}$. Отсюда $H = \frac{I}{d} = 1{,}25$ кА/м.

11.29. Из проволоки диаметром $d = 1$ мм надо намотать соленоид, внутри которого должна быть напряженность магнитного поля $H = 24$ кА/м. По проволоке можно пропускать предельный ток $I = 6$ А. Из какого числа слоев будет состоять обмотка соленоида, если витки наматывать плотно друг к другу? Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.

Решение:

Если обмотка состоит из одного слоя, то напряженность внутри катушки $H_1 = \frac{I}{d} = 6$ кА/м (см. задачу 11.28). Необходимое число слоев $N = \frac{H}{H_1} = 4$.

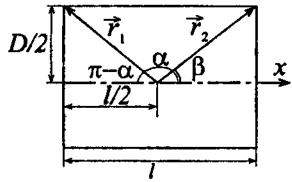
11.30. Требуется получить напряженность магнитного поля $H = 1$ кА/м в соленоиде длиной $l = 20$ см и диаметром $D = 5$ см. Найти число ампер-витков IN, необходимое для этого соленоида, и разность потенциалов U, которую надо приложить к концам обмотки из медной проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм. Считать поле соленоида однородным.

Решение:

Поскольку поле данного соленоида однородно, то можно рассчитать напряженность внутри него, используя формулу для бесконечного соленоида: $H = I\frac{N}{l}$. Отсюда число ампер-витков $IN = Hl = 200$ А·в. Согласно закону Ома разность потенциалов $U = IR$. Сопротивление обмотки найдем по формуле $R = \rho\frac{l}{S}$, где длина медной проволоки $l = \pi DN$, площадь поперечного сечения $S = \pi\frac{d^2}{4}$, удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м. Отсюда $R = \rho\frac{4DN}{d^2}$, тогда $U = \frac{\rho 4DIN}{d^2}$. Подставляя числовые данные, получим $U = 2{,}7$ В.

11.31. Каким должно быть отношение длины l катушки к ее диаметру D, чтобы напряженность магнитного поля в центре катушки можно было найти по формуле для напряженности поля бесконечно длинного соленоида? Ошибка при таком допущении не должна превышать $\delta = 5\%$. Указание: допускаемая ошибка $\delta = \frac{H_2 - H_1}{H_2}$, где H_1 — напряженность поля внутри катушки конечной длины и H_2 — напряженность поля внутри бесконечно длинной катушки.

Решение:



Напряженность магнитного поля на оси соленоида конечной длины $H_1 = \frac{In}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)$, где $n = \frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины, α и β — углы между осью соленоида из рассматриваемой точки к концам соленоида. Напряженность соленоида конечной длины $H_2 = In$. По условию допускаемая ошибка $\delta = \frac{H_2 - H_1}{H_2}$. Подставляя значения H_1 и H_2, получим $\delta = 1 - \frac{1}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)$ — (1). Из рисунка видно, что $\cos\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{D}{2r_1}$ или $\cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{D^2 + l^2}}$. Соответственно $\cos\beta = \frac{l}{2r_2}$; $\cos\beta = \frac{l}{\sqrt{D^2 + l^2}}$. Поскольку $\alpha = \pi - \beta$, то $\cos\alpha = -\cos\beta$ и уравнение (1) можно записать в виде $\delta = 1 - \cos\beta$, отсюда $1 - \delta = \cos\beta = \frac{l}{\sqrt{D^2 + l^2}}$; $(1-\delta)^2 = \frac{l^2}{D^2 + l^2}$;

$$\frac{1}{(1-\delta)^2} = 1 + \frac{D^2}{l^2};$$

$$\frac{D}{l} = \frac{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}{1-\delta} \text{ или } \frac{l}{D} = \frac{1-\delta}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}} = 3.$$

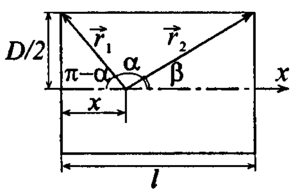
11.32. Какую ошибку δ мы допускаем при нахождении напряженности магнитного поля в центре соленоида, принимая соленоид задачи 11.30 за бесконечно длинный?

Решение:

Имеем $\frac{L}{D}=\frac{1-\delta}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$ — (1), где L — длина соленоида, D — его диаметр, δ — допустимая ошибка (см. задачу 11.31). Из (1) найдем $\delta=1-\frac{L}{\sqrt{D^2+L^2}}$. Подставляя числовые данные из задачи 11.30, найдем $\delta=0{,}03=3\%$.

11.33. Найти распределение напряженности H магнитного поля вдоль оси соленоида, длина которого $l=3$ см и диаметр $D=2$ см. По соленоиду течет ток $I=2$ А. Катушка имеет $N=100$ витков. Составить таблицу значений H и построить график для значений x в интервале $0\le x\le 3$ см через каждые 0,5 см.

Решение:



Напряженность магнитного поля на оси соленоида конечной длины $H=\frac{In}{2}(\cos\beta-\cos\alpha)$ — (1), где $n=\frac{N}{l}$ — число витков на единицу длины, α и β — углы между осью соленоида из рассматриваемой точки к концам соленоида. Рассмотрим произвольную точку A на оси соленоида и определим зависимость величин $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ от диаметра D и смещения по оси x. Из рисунка видно, что $\cos\alpha=\sin(\pi-\alpha)=\frac{D}{2r_1}$ или $\cos\alpha=\frac{D}{2\sqrt{(D/2)^2+x^2}}$.

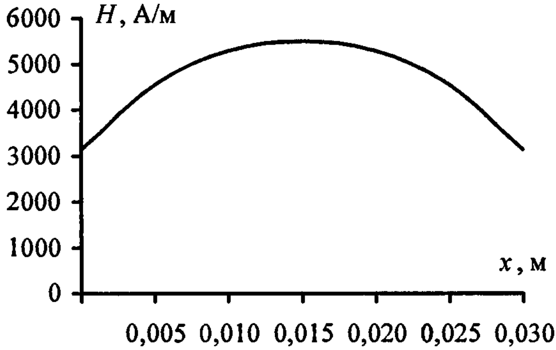
Соответственно $\cos\beta=\frac{l-x}{r_2}$; $\cos\beta=\frac{l-x}{\sqrt{(D/2)^2+(l-x)^2}}$.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$H=\frac{IN}{2l}\left(\frac{l-x}{\sqrt{(D/2)^2+(l-x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{(D/2)^2+x^2}}\right).$$ Подставляя числовые данные, получим

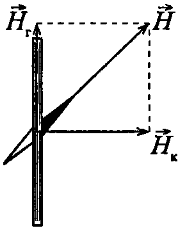
$$H=3{,}3\cdot 10^3\left(\frac{0{,}03-x}{\sqrt{10^{-4}+(0{,}03-x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{10^{-4}+x^2}}\right).$$ Для заданного интервала значений x составим таблицу и начертим график:

x, м	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03
H, А/м	3130,7	4539,8	5285,1	5491,5	5285,1	4539,8	3130,7



11.34. Конденсатор емкостью $C=10$ мкФ периодически заряжается от батареи с э.д.с. $\varepsilon=100$ В и разряжается через катушку в форме кольца диаметром $D=20$ см, причем плоскость кольца совпадает с плоскостью магнитного меридиана. Катушка имеет $N=32$ витка. Помещенная в центре катушки горизонтальная магнитная стрелка отклоняется на угол $\alpha=45°$. Переключение конденсатора происходит с частотой $n=100\ \text{с}^{-1}$. Найти из данных этого опыта горизонтальную составляющую $H_г$ напряженности магнитного поля Земли.

Решение:



(Вид сверху)

При каждом разряде конденсатора через катушку проходит количество электричества $q = CU$ — (1). Средняя сила тока, идущего через катушку, $I = q \cdot n$ — (2). Напряженность магнитного поля в центре катушки $H_к = \frac{NI}{2R} = \frac{NI}{D}$ или, с учетом (1) и (2), $H_к = \frac{NCUn}{D}$. Поскольку катушка находится в магнитном поле Земли, то магнитная стрелка, помещенная в центре катушки, поворачивается по направлению вектора $\vec{H}$, полученного сложением векторов $\vec{H}_к$ и $\vec{H}_г$. Векторы $\vec{H}_к$ и $\vec{H}_г$ взаимно перпендикулярны, и, как следует из рисунка, $H_г = H_к tg\alpha$. Поскольку $\alpha = 45°$ и $tg\alpha = 1$, то $H_г = H_к = \frac{NCUn}{D}$. Подставляя числовые данные, получим $H_г = 16$ А/м.

11.35. Конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ периодически заряжается от батареи с э.д.с. $\varepsilon = 120$ В и разряжается через соленоид длиной $l = 10$ см. Соленоид имеет $N = 200$ витков. Среднее значение напряженности магнитного поля внутри соленоида $H = 240$ А/м. С какой частотой n происходит переключение конденсатора? Диаметр соленоида считать малым по сравнению с его длиной.

Решение:

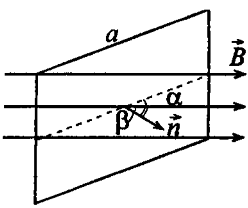
Напряженность магнитного поля соленоида $H = \frac{IN}{l}$, откуда ток, протекающий через соленоид, равен $I = \frac{lH}{N}$ — (1). Из определения силы тока следует, что $I = \frac{dq}{dt}$, откуда

$Idt = dq$; $I\int dt = \int dq$; $It = q$ — (2), где заряд q можно найти из соотношения $C = \dfrac{q}{U}$ — (3). Поскольку $U = \varepsilon$, то из (3) $q = C\varepsilon$. Тогда из (2) $I = \dfrac{C\varepsilon}{t}$ или, с учетом (1), $\dfrac{C\varepsilon}{t} = \dfrac{lH}{N}$. Отсюда время, в течение которого разряжается конденсатор, $t = \dfrac{C\varepsilon N}{lH}$. Частота переключения конденсатора $n = \dfrac{1}{t} = \dfrac{lH}{C\varepsilon N}$. Подставляя числовые данные, получим $n = 100\ \text{с}^{-1}$.

11.36. В однородном магнитном поле напряженностью $H = 79{,}6$ кА/м помещена квадратная рамка, плоскость которой составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 45°$. Сторона рамки $a = 4$ см. Найти магнитный поток Φ, пронизывающий рамку.

Решение:

Магнитный поток $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS\cos\beta$, где β — угол между направлением магнитного поля и нормалью к плоскости рамки. Имеем $S = a^2$; $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $B = \mu\mu_0 H$. Отсюда



$\Phi = \mu\mu_0 a^2 \cos 45° = 113 \cdot 10^{-6}$ Вб.

11.37. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}05$ Тл, вращается стержень длиной $l = 1$ м. Ось вращения, проходящая через один из концов стержня, параллельна направлению магнитного поля. Найти магнитный поток Φ, пересекаемый стержнем при каждом обороте.

Решение:

Магнитный поток, пересекаемый стержнем, равен $\Phi = \vec{B}\vec{S}$. По условию векторы $\vec{B}$ и $\vec{S}$ взаимно перпендикулярны, следовательно, $\Phi = BS$, где $S = \pi l^2$, $B = \mu\mu_0 H$. Отсюда $\Phi = \mu\mu_0 H\pi l^2 = 157 \cdot 10^{-3}$ Вб.

11.38. Рамка, площадь которой $S = 16$ см^2, вращается в однородном магнитном поле с частотой $n = 2$ с$^{-1}$. Ось вращения находится в плоскости рамки и перпендикулярна к направлению магнитного поля. Напряженность магнитного поля $H = 79{,}6$ кА/м. Найти зависимость магнитного потока Φ, пронизывающего рамку, от времени t и наибольшее значение Φ_{max} магнитного потока.

Решение:

Магнитный поток, пронизывающий рамку, равен $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS\cos\alpha$, где угол α между направлением магнитного поля и нормалью к плоскости рамки изменяется со временем по закону: $\alpha = \alpha_0 + \omega t = \alpha_0 + 2\pi nt$. Здесь α_0 — угол между направлением магнитного поля и нормалью в начальный момент времени. Отсюда, с учетом $B = \mu\mu_0 H$, имеем $\Phi = \mu\mu_0 HS\cos(2\pi nt + \alpha_0)$. Подставляя числовые данные, получим $\Phi = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\cos(4\pi t + \alpha_0)$. Очевидно, что максимального значения магнитный поток достигает, когда плоскость рамки перпендикулярна линиям магнитного поля, т. е. $\alpha = 0°$, а $\cos\alpha = 1$. Следовательно, $\Phi_{max} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Вб.

11.39. Железный образец помещен в магнитное поле напряженностью $H = 796$ А/м. Найти магнитную проницаемость μ железа.

Решение:

Напряженность магнитного поля и магнитная индукция связаны соотношением $B = \mu\mu_0 H$. По графику зависимости $B(H)$, данному в приложении, найдем для $H = 796$ А/м значение $B = 1{,}4$ Тл. Отсюда $\mu = \dfrac{B}{\mu_0 H} = 1400$.

11.40. Сколько ампер-витков потребуется для того, чтобы внутри соленоида малого диаметра и длиной $l = 30$ см объемная плотность энергии магнитного поля была равна $W_0 = 1{,}75$ Дж/м^3?

Решение:

Объемная плотность энергии $W_0 = \dfrac{HB}{2}$ — (1). Напряженность магнитного поля соленоида, который в данных условиях можно считать бесконечно длинным, определяется соотношением $H = In = \dfrac{IN}{l}$ — (2), где IN — искомое число ампер-витков. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то уравнение (1) можно записать в виде $W_0 = \dfrac{\mu\mu_0 H^2}{2}$ или, с учетом (2), $W_0 = \dfrac{\mu\mu_0 (IN)^2}{2l^2}$, откуда $IN = \sqrt{\dfrac{2W_0 l^2}{\mu\mu_0}} = 500$ А·в.

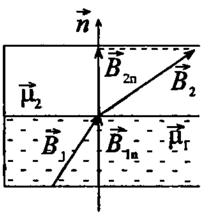
11.41. Сколько ампер-витков потребуется для создания магнитного потока $\Phi = 0{,}42$ мВб в соленоиде с железным сердечником длиной $l = 120$ см и площадью поперечного сечения $S = 3$ см^2?

Решение:

Имеем $B = \dfrac{\Phi}{S} = 1{,}4$ Тл. По графику зависимости $B(H)$, данному в приложении, найдем $H = 0{,}75 \cdot 10^3$ А/м. Но $H = \dfrac{IN}{l}$, откуда $IN = Hl = 900$ А·в.

11.42. Длина железного сердечника тороида $l_1 = 2{,}5$ м, длина воздушного зазора $l_2 = 1$ см. Число витков в обмотке тороида $N = 1000$. При токе $I = 20$ А индукция магнитного поля в воздушном зазоре $B = 1{,}6$ Тл. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника при этих условиях. (Зависимость B от H для железа неизвестна.)

Решение:



Запишем условие преломления линий поля $\vec{B}$ на границе раздела воздух — железо в проекции на нормаль: $B_{1n} = B_{2n}$. Обозначим для простоты записи $B_{1n} = B_{2n} \equiv B$. Если тороид имеет воздушный зазор, то магнитный поток $\Phi = \dfrac{IN}{l_1/(S\mu_0\mu_1) + l_2/(S\mu_0\mu_2)}$. Имеем $B = \dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{IN\mu_0}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}$ — (1), где $\mu_1 = 1$ — магнитная проницаемость воздуха, μ_2 — магнитная проницаемость железа. Из (1) имеем $\dfrac{1}{B} = \dfrac{l_1}{\mu_1 IM\mu_0} + \dfrac{l_2}{\mu_2 IN\mu_0}$; $\dfrac{l_2}{\mu_2 IN\mu_0} = \dfrac{\mu_1 IN\mu_0 - Bl_1}{B\mu_1 IN\mu_0}$, откуда $\mu_2 = \dfrac{B\mu_1 l_2}{\mu_1 IN\mu_0 - Bl_1} = 440$.

11.43. Длина железного сердечника тороида $l_1 = 1$ м, длина воздушного зазора $l_2 = 1$ см. Площадь поперечного сечения сердечника $S = 25\ \text{см}^2$. Сколько ампер-витков потребуется для создания магнитного потока $\Phi = 1{,}4$ мВб, если магнитная проницаемость материала сердечника $\mu = 800$? (Зависимость B от H для железа неизвестна.)

Решение:

Если тороид имеет воздушный зазор, то магнитный поток $\Phi = \frac{IN}{l_1/(S\mu_0\mu_1) + l_2/(S\mu_0\mu_2)}$ или $\Phi = \frac{INS\mu_0\mu_1\mu_2}{l_1\mu_2 + l_2\mu_1}$, откуда $IN = \frac{\Phi(l_1\mu_2 + l_2\mu_1)}{S\mu_0\mu_1\mu_2} = 5 \cdot 10^3$ А·в.

11.44. Найти магнитную индукцию B в замкнутом железном сердечнике тороида длиной $l = 20{,}9$ см, если число ампер-витков обмотки тороида $IN = 1500$ А·в. Какова магнитная проницаемость μ материала сердечника при этих условиях?

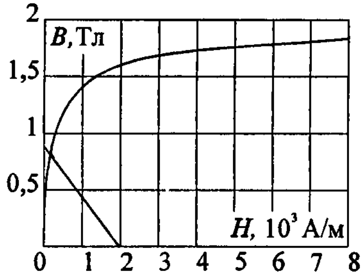
Решение:

Напряженность магнитного поля внутри тороида равна $H = In = \frac{IN}{l}$; $H = 7177$ А/м. По графику зависимости $B(H)$ найдем $B = 1{,}8$ Тл. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 200$.

11.45. Длина железного сердечника тороида $l_1 = 1$ м, длина воздушного зазора $l_2 = 3$ мм. Число витков в обмотке тороида $N = 2000$. Найти напряженность магнитного поля H_2 в воздушном зазоре при токе $I = 1$ А в обмотке тороида.

Решение:

Имеем $B_1 = B_2 = \frac{\Phi}{S} = \frac{IN\mu_0}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}$ — (1) (см. задачу 11.42). Т. к. $B_1 = \mu_0\mu_1 H_1$, то из (1) имеем $B_2 \frac{l_2}{\mu_2} + \mu_0 H_1 l_1 = IN\mu_0$ — (2). Это уравнение прямой линии в координат-

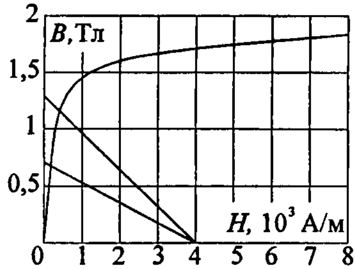


ных осях H, B. Но величины H и B кроме уравнения (2) связаны еще графиком $B = f(H)$. Ордината точки пересечения прямой (2) и кривой, соответствующей зависимости $B = f(H)$, дает значение магнитной индукции $B_1 = B_2$. Для построения прямой по уравнению (2) находим $B = \frac{IN\mu_0\mu_2}{l_2} = 0{,}84$ Тл при $H = 0$; $H = \frac{IN}{l_1} = 2 \cdot 10^3$ А/м при $B = 0$. Искомая точка пересечения дает $B_1 = B_2 = 0{,}78$ Тл. Тогда для воздушного зазора $H_2 = \frac{B_2}{\mu_0\mu_2} = 620 \cdot 10^3$ А/м.

11.46. Длина железного сердечника $l_1 = 50$ см, длина воздушного зазора $l_2 = 2$ мм. Число ампер-витков в обмотке тороида $IN = 2000$ А·в. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в воздушном зазоре, если при том же числе ампер-витков увеличить длину воздушного зазора вдвое?

Решение:

Имеем $B_1 = B_2 = \frac{\Phi}{S} = \frac{IN\mu_0}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}$ — (1) (см. задачу 11.42). Т. к. $B_1 = \mu_0\mu_1 H_1$, то из (1) имеем $B_2\frac{l_2}{\mu_2} + \mu_0 H_1 l_1 = IN\mu_0$ — (2). Это уравнение прямой линии в координатных осях H, B. Но величины H и B кроме уравнения (2) связаны еще графиком $B=f(H)$. Ордината точки пересечения прямой (2) и кривой, соответствующей зависимости $B=f(H)$, дает значение магнитной индукции $B_1=B_2$. Для построения прямой, соответствующей первоначальной длине воздушного зазора,



по уравнению (2) находим $B=\dfrac{IN\mu_0\mu_2}{l_2}=1{,}257\,\text{Тл}$ при $H=0$; $H=IN/l_1=4\cdot10^3\,\text{А/м}$ при $B=0$. Искомая точка пересечения дает $H_2=0{,}45\cdot10^3\,\text{А/м}$. Аналогично для построения прямой, соответствующей длине воздушного зазора равной $2\cdot l_2$, по уравнению (2) находим $B=\dfrac{IN\mu_0\mu_2}{l_2}=0{,}628\,\text{Тл}$ при $H=0$; $H=IN/l_1=4\cdot10^3\,\text{А/м}$ при $B=0$. Искомая точка пересечения дает $H_1=0{,}25\cdot10^3\,\text{А/м}$. Отсюда отношение $H_2/H_1=1{,}8$.

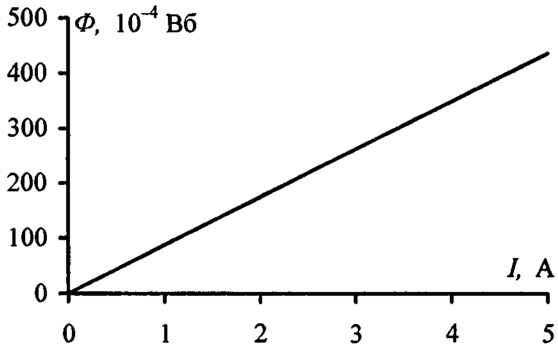
11.47. Внутри соленоида длиной $l=25{,}1\,\text{см}$ и диаметром $D=2\,\text{см}$ помещен железный сердечник. Соленоид имеет $N=200$ витков. Построить для соленоида с сердечником график зависимости магнитного потока Φ от тока I в интервале $0\le I\le 5\,\text{А}$ через каждый 1А. По оси ординат откладывать Φ (в 10^{-4} Вб).

Решение:

Полный магнитный поток сквозь соленоид выражается соотношением $\Phi=\dfrac{\mu\mu_0N^2IS}{l}$ — (1). Найдем магнитную проницаемость μ материала сердечника при $I=1\,\text{А}$.

Напряженность магнитного поля $H = \frac{IN}{l} = 8 \cdot 10^2$ А/м. По графику зависимости $B(H)$ найдем $B = 1{,}4$ Тл. Тогда $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1392$. Площадь поперечного сечения соленоида $S = \pi \frac{D^2}{4} = 3{,}14 \cdot 10^{-4}$ м^2. Подставляя числовые данные в (1), получим $\Phi = 87{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot I$. Для заданного интервала изменения I составим таблицу и построим график.

I, А	0	1	2	3	4	5
Φ, 10^{-4} Вб	0	87,5	175	262,5	350	437,5



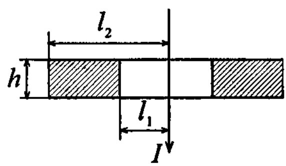
11.48. Магнитный поток сквозь соленоид (без сердечника) $\Phi = 5$ мкВб. Найти магнитный момент p соленоида, если его длина $l = 25$ см.

Решение:

Магнитный момент контура с током равен $p = IS$. Тогда магнитный момент соленоида $p = INS$. Имеем $\Phi = \frac{INS\mu\mu_0}{l} = \frac{p\mu\mu_0}{l}$, откуда $p = \frac{\Phi l}{\mu\mu_0} = 1$ м^2·А.

11.49. Через центр железного кольца перпендикулярно к его плоскости проходит длинный прямолинейный провод, по которому течет ток $I = 25$ А. Кольцо имеет четырехугольное сечение, размеры которого $l_1 = 18$ мм, $l_2 = 22$ мм и $h = 5$ мм. Считая приближенно, что в любой точке сечения кольца индукция одинакова и равна индукции на средней линии кольца, найти магнитный поток Φ, пронизывающий площадь сечения кольца.

Решение:



Т. к. по условию задачи приближенно можно считать, что в любой точке сечения кольца индукция одинакова и равна индукции на средней линии кольца, то напряженность магнитного поля в сечении $H = \frac{I}{2\pi a}$, где $a = \frac{l_2 - l_1}{2} + l_1 = 20$ мм, тогда $H = 198$ А/м. По графику для данного значения напряженности магнитного поля находим значение магнитной индукции $B = 0{,}45$ Тл. Тогда магнитный поток $\Phi = 2B(l_2 - l_1)h = 18$ мкВб.

11.50. Найти магнитный поток Φ, пронизывающий площадь сечения кольца предыдущей задачи, учитывая, что магнитное поле в различных точках сечения кольца различно. Значение μ считать постоянным и найти его по графику кривой $B = f(H)$ для значения на средней линии кольца.

Решение:

Напряженность магнитного поля в сечении $H = \frac{I}{2\pi x}$. Рассмотрим элемент площади поперечного сечения кольца $dS = hdx$. Магнитный поток сквозь этот элемент равен $d\Phi = BdS = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi x} hdx$. Тогда магнитный поток через левую половину поперечного сечения кольца равен $\Phi' = \frac{\mu\mu_0 Ih}{2\pi}\int\limits_{l_1}^{l_2}\frac{dx}{x} = \frac{\mu\mu_0 Ih}{2\pi}ln\frac{l_2}{l_1}$, а для всего кольца $\Phi = 2\Phi' = \frac{\mu\mu_0 Ih}{\pi}ln\frac{l_2}{l_1}$ — (1). Из предыдущей задачи имеем $H = 198$ А/м и $B = 0{,}45$ Тл. Тогда $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1808$. Подставляя числовые данные в (1), получим $\Phi = 18$ мкВб.

11.51. Замкнутый железный сердечник длиной $l = 50$ см имеет обмотку из $N = 1000$ витков. По обмотке течет ток $I_1 = 1$ А. Какой ток I_2 надо пустить через обмотку, чтобы при удалении сердечника индукция осталась прежней?

Решение:
Напряженность магнитного поля внутри сердечника $H_1 = \frac{I_1 N}{l} = 2000$ А/м. По графику зависимости B от H найдем $B = 1{,}56$ Тл. По условию после удаления сердечника индукция в обмотке не изменилась, т. е. $B = \frac{\mu_0 I_2 N}{l}$, откуда $I_2 = \frac{Bl}{\mu_0 N} = 620$ А.

11.52. Железный сердечник длиной $l_1 = 50{,}2$ см с воздушным зазором длиной $l_2 = 0{,}1$ см имеет обмотку из $N = 20$ витков. Какой ток I должен протекать по этой обмотке, чтобы в зазоре получить индукцию $B_2 = 1{,}2$ Тл?

Решение:
Имеем $B = \frac{IN\mu_0\mu_1\mu_2}{l_1\mu_2 + l_2\mu_1}$ — (1) (см. задачу 11.42), где $\mu_1 = 1$ — магнитная проницаемость воздуха, μ_2 — магнитная проницаемость материала сердечника. Зная

индукцию B, по графику найдем $H = 400$ А/м. Тогда $\mu_2 = \dfrac{B}{\mu_0 H} = 2387$. Из (1) найдем $I = \dfrac{B(l_1\mu_2 + l_2\mu_1)}{N\mu_0\mu_1\mu_2}$. Подставляя числовые данные, получим $I = 58$ А.

11.53. Железное кольцо диаметром $D = 11{,}4$ см имеет обмотку из $N = 200$ витков, по которой течет ток $I_1 = 5$ А. Какой ток I_2 должен проходить через обмотку, чтобы индукция в сердечнике осталась прежней, если в кольце сделать зазор шириной $b = 1$ мм? Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника при этих условиях.

Решение:

Напряженность магнитного поля в целом сердечнике равна $H_1 = \dfrac{I_1 N}{l} = 2794$ А/м. По графику зависимости B от H найдем $B_1 = 1{,}6$ Тл. Тогда магнитная проницаемость материала сердечника $\mu_2 = \dfrac{B_1}{\mu_0 H_1} = 456$. Индукция магнитного поля внутри сердечника с прорезью $B_2 = B_1 = \dfrac{I_2 N\mu_0\mu_1\mu_2}{b\mu_2 + (\pi D - b)\mu_1}$ (см. задачу 11.42). Учитывая, что магнитная проницаемость воздуха $\mu_1 = 1$, можно записать $B_1 = \dfrac{I_2 N\mu_0\mu_2}{b(\mu_2 - 1) + \pi D}$, откуда $I_2 = \dfrac{B_1(b(\mu_2 - 1) + \pi D)}{N\mu_0\mu_2} = 11{,}35$ А.

11.54. Между полюсами электромагнита требуется создать магнитное поле с индукцией $B = 1{,}4$ Тл. Длина железного сердечника $l_1 = 40$ см, длина межполюсного пространства $l_2 = 1$ см, диаметр сердечника $D = 5$ см. Какую э.д.с. ε надо взять для питания обмотки электромагнита, чтобы получить требуемое магнитное поле, используя медную проволоку площадью поперечного сечения $S = 1\,\text{мм}^2$? Какая будет при этом наименьшая толщина b намотки, если считать, что предельно допускаемая плотность тока $I = 3\,\text{МА/м}^2$?

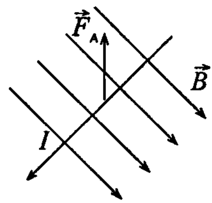
Решение:

Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$. Поскольку сопротивление проводника $R = \rho\dfrac{l}{S}$, то $I = \dfrac{\varepsilon S}{\rho l} = \dfrac{\varepsilon S}{\rho\pi DN}$, откуда $\varepsilon = \dfrac{IN\rho\pi D}{S}$ — (1). Количество ампер-витков IN найдем из уравнения $B = \dfrac{IN\mu_0}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}$, откуда $IN = \dfrac{B}{\mu_0}\left(\dfrac{l_1}{\mu_1} + \dfrac{l_2}{\mu_2}\right) = \dfrac{Bl_1}{\mu_0\mu_1} + Hl_2$. По графику зависимости B от H найдем, что значению $B = 1{,}4\,\text{Тл}$ соответствует значение $H = 0{,}8\cdot 10^3$ А/м. Следовательно, $IN = 1{,}14\cdot 10^4$ А·в — (2). Тогда из (1) найдем $\varepsilon = 31\,\text{В}$. Т. к. диаметр проволоки $d = \sqrt{\dfrac{4S}{\pi}}$, то на длине соленоида l_1 поместится $N_1 = l_1\sqrt{\dfrac{\pi}{4S}} = 354$ витка. Сила тока $I = jS = 3\,\text{А}$. Тогда из (2) найдем $N = 3830$ витков. Необходимое число слоев равно $n = \dfrac{N}{N_1} \approx 11$. Толщина намотки $b = nd = $ $= n\sqrt{\dfrac{4S}{\pi}} = 0{,}012\,\text{м}$.

11.55. Между полюсами электромагнита создается однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1\,\text{Тл}$. По проводу длиной $l = 70\,\text{см}$, помещенному перпендикулярно к направлению магнитного поля, течет ток $I = 70\,\text{А}$. Найти силу F, действующую на провод.

Решение:

На элемент длины $d\vec{l}$ проводника с током I в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ действует сила Ампера $d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$. Направление этой силы определяется по правилу векторного произведения векторов. Модуль силы Ампера вычисляется по формуле $dF = IBdl\sin\alpha$, где α — угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$. Поскольку $\sin\alpha = 1$, то $dF = IBdl$ или $F = IB\int_0^l dl = IBl$. Подставляя числовые данные, получим $F = 4{,}9$ Н.



11.56. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии $d_1 = 10$ см друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А. Какую работу A_l надо совершить (на единицу проводников), чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния $d_2 = 20$ см?

Решение:

Согласно закону Ампера для параллельных токов сила, действующая на единицу длины каждого из проводников, $F = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}$. Работа, затрачиваемая на единицу длины проводника, при перемещении одного проводника с током в магнитном поле, создаваемом другим проводником с током, $A = \int_{d_1}^{d_2} Fdr = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\frac{d_2}{d_1}$. Подставляя числовые данные, получим $A = 83 \cdot 10^{-6}$ Дж/м.

11.57. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на некотором расстоянии друг от друга. По проводникам текут одинаковые токи в одном направлении. Найти токи I_1 и I_2, текущие по каждому из проводников, если известно, что для того, чтобы раздвинуть эти проводники на вдвое большее расстояние, пришлось совершить работу (на единицу длины проводников) $A_l = 55$ мкДж/м.

Решение:

Имеем $A_l = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} ln\frac{d_2}{d_1}$ (см. задачу 11.56). По условию $I_1 = I_2 = I$ и $d_2 = 2d_1$, тогда $A_l = \frac{\mu\mu_0 I^2}{2\pi} ln 2$. Отсюда $I = \sqrt{\frac{2\pi A_l}{\mu\mu_0 \, ln 2}} = 20$ А, т. е. $I_1 = I_2 = 20$ А.

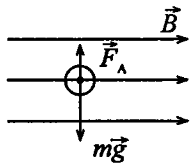
11.58. Из проволоки длиной $l = 20$ см сделаны квадратный и круговой контуры. Найти вращающие моменты сил M_1 и M_2, действующие на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. По контурам течет ток $I = 2$ А. Плоскость каждого контура составляет угол $\alpha = 45°$ с направлением поля.

Решение:

На замкнутый контур с током в магнитном поле действует вращательный момент $M = BIS\,sin\,\alpha$. Площадь квадратного контура $S_1 = \left(\frac{l}{4}\right)^2$. Площадь кругового контура $S_1 = \pi R^2$, где $R = \frac{l}{2\pi}$, следовательно, $S_2 = \frac{l^2}{4\pi}$. Тогда на квадратный контур действует вращательный момент $M_1 = \frac{BIl^2}{16} sin\,\alpha$; $M_1 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ Н·м. На круговой контур действует вращательный момент $M_2 = \frac{BIl^2}{4\pi} sin\,\alpha$; $M_2 = 4{,}5 \times$ $\times 10^{-4}$ Н·м.

11.59. Алюминиевый провод площадью поперечного сечения $S = 1\,\text{мм}^2$ подвешен в горизонтальной плоскости перпендикулярно к магнитному меридиану, и по нему течет ток (с запада на восток) $I = 1{,}6$ А. Какую долю от силы тяжести, действующей на провод, составляет сила, действующая на него со стороны земного магнитного поля? На сколько уменьшится сила тяжести, действующая на единицу длины провода, вследствие этой силы? Горизонтальная составляющая напряженности земного магнитного поля $H_г = 15$ А/м.

Решение:



Со стороны магнитного поля Земли на проводник действует сила Ампера F_A, направление которой определяется по правилу левой руки. Найдем отношение $\frac{F_A}{mg} = \frac{IBl}{V\rho g} = \frac{I\mu_0 H_г}{S\rho g}$. Подставляя числовые данные, получим $\frac{F_A}{mg} = 0{,}12\%$. Очевидно, что сила тяжести, действующая на единицу длины провода, уменьшится на величину $F_A = Il\mu_0 H_г = 3 \cdot 10^{-5}$ Н.

11.60. Катушка гальванометра, состоящая из $N = 400$ витков тонкой проволоки, намотанной на прямоугольный каркас длиной $l = 3$ см и шириной $b = 2$ см, подвешена на нити в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. По катушке течет ток $I = 0{,}1$ мкА. Найти вращающий момент M, действующий на катушку гальванометра, если плоскость катушки: а) параллельна направлению магнитного поля; б) составляет угол $\alpha = 60°$ с направлением магнитного поля.

Решение:

На каждый виток катушки действует вращающий момент $M_0 = BIS \sin\alpha$. Тогда на всю катушку действует вращающий момент $M = NBIS \sin\alpha$. Площадь одного витка $S = lb$.

а) $M = BIlbN\sin\frac{\pi}{2} = 2{,}4\cdot10^{-9}$ Н·м; б) $M = BIlbN\sin 60° =$ $= 1{,}2\cdot10^{-9}$ Н·м.

11.61. На расстоянии $a = 20$ см от длинного прямолинейного вертикального провода на нити длиной $l = 0{,}1$ м и диаметром $d = 0{,}1$ мм висит короткая магнитная стрелка, магнитный момент которой $p = 0{,}01$ А·м^2. Стрелка находится в плоскости, проходящей через провод и нить. На какой угол φ повернется стрелка, если по проводу пустить ток $I = 30$ А? Модуль сдвига материала нити $G = 5{,}9$ ГПа. Система экранирована от магнитного поля Земли.

Решение:

Проводник с током создает вокруг себя магнитное поле с индукцией $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}$. Со стороны поля на магнитную стрелку действует вращающий момент $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{B}]$ или $M = pB\sin\alpha$. Вращающий момент вызывает поворот нити на угол $\varphi = \frac{2lM}{\pi G r^4}$, где $r = \frac{d}{2} = 5\cdot10^{-5}$ м. Т. к. $\sin\alpha = 1$, то $M = pB = \frac{\mu\mu_0 pI}{2\pi a}$, отсюда $\varphi = \frac{\mu\mu_0 lIp}{\pi^2 aGr^4} = 0{,}52$ рад или $\varphi = 30°$.

11.62. Катушка гальванометра, состоящая из $N = 600$ витков проволоки, подвешена на нити длиной $l = 10$ см и диаметром $d = 0{,}1$ мм в магнитном поле напряженностью $H = 160$ кА/м так, что ее плоскость параллельна направлению магнитного поля. Длина рамки катушки $a = 2{,}2$ см и ширина $b = 1{,}9$ см. Какой ток I течет по обмотке катушки, если катушка повернулась на угол $\varphi = 0{,}5°$? Модуль сдвига материала нити $G = 5{,}9$ ГПа.

Решение:

На каждый виток катушки в магнитном поле действует вращающий момент $\vec{M}=\left[\vec{p},\vec{B}\right]$ — (1), где $\vec{p}$ — магнитный момент контура с током. $\vec{p}=IS\vec{n}$ — (2), где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контура. Для катушки уравнение (1) в скалярном виде, с учетом (2), можно записать так: $M=NISB=N\mu_0 ISH$ — (3). Вращающий момент вызывает поворот нити на угол $\varphi=\frac{2lM}{\pi Gr^4}$ или, с учетом (3), $\varphi=\frac{32lN\mu_0 ISH}{\pi Gd^4}$, откуда $I=\frac{\pi\varphi Gd^4}{32lN\mu_0 abH}=10^{-7}$ А.

11.63. Квадратная рамка подвешена на проволоке так, что направление магнитного поля составляет угол $\alpha=90°$ с нормалью к плоскости рамки. Сторона рамки $a=1$ см. Магнитная индукция поля $B=13{,}7$ мТл. Если по рамке пропустить ток $I=1$ А, то она поворачивается на угол $\varphi=1°$. Найти модуль сдвига G материала проволоки. Длина проволоки $l=10$ см, радиус нити $r=0{,}1$ мм.

Решение:

Имеем $I=\frac{\pi\varphi Gr^4}{2la^2B}$ (см. задачу 11.62), откуда $G=\frac{2Ila^2B}{\varphi\pi r^4}=50$ ГПа.

11.64. Круговой контур помещен в однородное магнитное поле так, что плоскость контура перпендикулярна к направлению магнитного поля. Напряженность магнитного поля $H=150$ кА/м. По контуру течет ток $I=2$ А. Радиус контура $R=2$ см. Какую работу A надо совершить, чтобы повернуть контур на угол $\varphi=90°$ вокруг оси, совпадающей с диаметром контура?

Решение:

Работа по перемещению проводника в магнитном поле равна $dA = Id\Phi$, откуда $A = I\int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1)$, где $\Phi_2 = BS\cos\alpha_2 = 0$, т. к. $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$; $\Phi_1 = BS\cos\alpha_1 = BS$, т. к. $\alpha_1 = 0$. Площадь контура $S = \pi R^2$. Окончательно $A = IB\times$ $\times\pi\cdot r^2 = I\mu_0 H\pi r^2$; $A = 0{,}5$ мДж.

11.65. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл движется равномерно проводник длиной $l = 10$ см. По проводнику течет ток $I = 2$ А. Скорость движения проводника $v = 20$ см/с и направлена перпендикулярно к направлению магнитного поля. Найти работу A перемещения проводника за время $t = 10$ с и мощность P, затраченную на это перемещение.

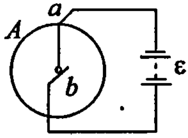
Решение:

Работа по перемещению проводника с током в электрическом поле $dA = Id\Phi$. Магнитный поток, пересеченный проводником при его движении, $d\Phi = BS\cos\alpha$, где площадь S, покрытая проводником за время t: $s = lvt$. Тогда $A = IBlvt\cos 0° = 0{,}2$ Дж. Затраченная мощность $P = \dfrac{A}{t} = 20$ мВт.

11.66. Однородный медный диск A радиусом $R = 5$ см помещен в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля. Ток $I = 5$ А проходит по радиусу диска ab (a и b — скользящие контакты). Диск вращается с частотой $n = 3\ \text{с}^{-1}$. Найти: а) мощность P такого двигателя; б) направление вращения диска при условии, что магнитное поле направлено от чертежа к нам; в) вращающий момент M, действующий на диск.

Решение:

а) На раднус ab действует сила $F = BIR$. Работа при одном обороте диска $A = BIS$, где S — площадь, описываемая радиусом за один оборот, т. е. площадь диска. Мощность такого двигателя $P = A/t = nBI\pi R^2 = 23{,}6 \cdot 10^{-3}$ Вт. б) Диск вращается против часовой стрелки. в) На элемент радиуса dx действует сила $dF = BIdx$ и вращающий момент $dM = xdF = BIxdx$, где x — расстояние элемента dx от сил вращения. На весь диск действует вращающий момент



$$M = \int_0^R BIxdx = \frac{BIR^2}{2} = 12{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ Н·м}.$$

11.67. Однородный медный диск A массой $m = 0{,}35$ кг помещен в магнитное поле с индукцией $B = 24$ мТл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля (см. рисунок к задаче 11.66). При замыкании цепи диск начинает вращаться и через время $t = 30$ с после начала вращения достигает частоты вращения $n = 5$ с$^{-1}$. Найти ток I в цепи.

Решение:

Сила, действующая на элемент радиуса dx, определяется формулой $dF = BIdx$. Вращающий момент, действующий на этот элемент, $dM = xdF = BIxdx$, где x — расстояние элемента dx от оси вращения. Вращающий момент, действующий на весь диск, $M = \int_0^R BIxdx = \frac{BIR^2}{2}$ — (1). Согласно основному закону динамики вращательного движения $M = J\varepsilon$, где $J = \frac{mR^2}{2}$ — момент инерции одного диска, $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}$ — угловое ускорение, тогда $M = \frac{\pi n m R^2}{t}$ —

(2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{BIR^2}{2} = \frac{\pi nmR^2}{t}$, откуда $I = \frac{2\pi nm}{Bt} = 15{,}3$ А.

11.68. Найти магнитный поток Φ, пересекаемый радиусом ab диска A (см. рисунок к задаче 11.66) за время $t = 1$ мин вращения. Радиус диска $R = 10$ см. Индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ Тл. Диск вращается с частотой $n = 5{,}3$ с$^{-1}$.

Решение:

Угол, на который повернется диск за время t при равномерном вращении с частотой n, равен $\varphi = \omega t = 2\pi nt$. Из геометрии площадь кругового сектора $S = \frac{1}{2}R^2\varphi$, тогда площадь, пронизываемая магнитным потоком за время t, равна $S = R^2\pi nt$. Следовательно, магнитный поток через площадь S за время t равен $\Phi = BS = BR^2\pi nt = 1$ Вб.

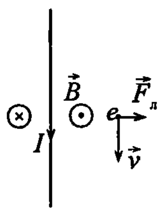
11.69. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 1$ кВ, влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению его движения. Индукция магнитного поля $B = 1{,}19$ мТл. Найти радиус R окружности, по которой движется электрон, период обращения T и момент импульса M электрона.

Решение:

Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца $\vec{F}_Л = -e[\vec{v}, \vec{B}]$. Направление силы Лоренца определяется по правилу векторного произведения векторов. В скалярном виде $F_Л = evB\sin\alpha = evB$, т. к. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Поскольку начальная скорость электрона перпендикулярна $\vec{B}$, то его траектория лежит в одной плоскости. Работа силы Лоренца равна нулю, поэтому $v = const$. Электрон движется с постоянным по модулю ускорением $a = \frac{F_o}{m} = \frac{eBv}{m}$ — (1), которое перпендикулярно скорости. Раднус кривизны траектории электрона можно найти из соотношения $a = \frac{v^2}{R}$ — (2). Приравняв (1) и (2), получим $\frac{eBv}{m} = \frac{v^2}{R}$, откуда $R = \frac{mv}{eB}$. Период обращения электрона по окружности не зависит от скорости: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}$. Момент импульса электрона $\vec{M} = m\left[\vec{v}, \vec{R}\right]$ или, поскольку векторы $\vec{v}$ и $\vec{R}$ перпендикулярны, $M = mvR$. Скорость электрона найдем из соотношения $\frac{mv^2}{2} = eU$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Отсюда $M = R\sqrt{2eUm}$. Подставляя числовые данные, получим $R = 0{,}09$ м; $T = 30 \cdot 10^{-9}$ с; $M = 1{,}5 \cdot 10^{-24}$ кг·м²/с.

11.70. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 300$ В, движется параллельно прямолинейному длинному проводу на расстоянии $a = 4$ мм от него. Какая сила F действует на электрон, если по проводнику пустить ток $I = 5$ А?

Решение:



Со стороны магнитного поля, создаваемого проводником с током, на электрон действует сила Лоренца $\vec{F} = -e\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$. Направление силы Лоренца определяется по правилу векторного произведения векторов. В скалярном виде $F = evB\sin\alpha$ — (1). Индукция магнитного поля проводника с током равна $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}$ — (2). Кинетическая энергия электрона, прошедшего разность потенциалов U, равна $\frac{mv^2}{2} = eU$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $F = e\sqrt{\frac{2eU}{m}}\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}$. Подставляя числовые данные, получим $F = 4{,}12 \cdot 10^{-16}$ Н.

11.71. Поток α-частиц (ядер атома гелия), ускоренных разностью потенциалов $U = 1$ МВ, влетает в однородное магнитное поле напряженностью $H = 1{,}2$ кА/м. Скорость каждой частицы направлена перпендикулярно к направлению магнитного поля. Найти силу F, действующую на каждую частицу.

Решение:

Имеем $F = q\sqrt{\frac{2qU}{m}}\mu\mu_0 H$ (см. задачу 11.70). Здесь $q = 2e = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд α-частицы, $m = 6{,}6 \times \times 10^{-27}$ кг — масса α-частицы. Подставляя числовые данные, получим $F = 4{,}7 \cdot 10^{-15}$ Н.

11.72. Электрон влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению его движения. Скорость электрона $v = 4 \cdot 10^7$ м/с. Индукция магнитного поля $B = 1$ мТл. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения электрона в магнитном поле.

Решение:

На электрон в магнитном поле действует сила Лоренца $\vec{F} = -e\left[\vec{B} \times \vec{v}\right]$, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд. В скалярном виде $F = eBv\sin\alpha$. Эта сила сообщает электрону ускорение $\vec{a}$. Тогда по второму закону Ньютона

$F = ma$. Тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$, т. к. вектор $\vec{v}$ перпендикулярен вектору $\vec{B}$. Нормальное ускорение $a_n = \frac{F}{m} = \frac{eBv}{m} = 7 \cdot 10^{15}$ м/с^2.

11.73. Найти кинетическую энергию W (в электронвольтах) протона, движущегося по дуге окружности радиусом $R = 60$ см в магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл.

Решение:

На протон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца $\vec{F} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$ — (1). Поскольку протон движется по окружности без поступательного движения, следовательно, вектор $\vec{F}$ перпендикулярен вектору $\vec{v}$, а следовательно, и вектору $\vec{B}$. Тогда уравнение (1) можно записать в скалярном виде: $F = qvB$ — (2). Чтобы протон удержался на круговой орбите, требуется выполнение равенства $F = ma_n = m\frac{v^2}{R}$ — (3). Приравнивая (2) и (3), получим $qvB = \frac{mv^2}{R}$, откуда скорость протона $v = \frac{qBR}{m}$ — (4). Кинетическая энергия протона равна $W = \frac{mv^2}{2}$ или, с учетом (4), $W = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 0{,}28 \cdot 10^{-4}$ Дж или $W = \frac{0{,}28 \cdot 10^{-4}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 17{,}5 \cdot 10^6$ эВ.

11.74. Протон и электрон, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны R_1 траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории электрона?

Решение:

Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца $\vec{F}_1 = -e\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$, на протон действует сила Лоренца $\vec{F}_2 = e\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$. Эти силы равны по модулю и противоположны по направлению. В скалярном виде $F_1 = F_2 = eBv$. Работа силы Лоренца равна нулю, поэтому $v = const$ и тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$. Частицы движутся с постоянным по модулю нормальным ускорением $a_n = \frac{F}{m} = \frac{eBv}{m}$ — (1), которое перпендикулярно скорости. Радиус кривизны траектории частиц можно найти из соотношения $a_n = \frac{v^2}{R}$ — (2). Приравняв (1) и (2), получим $\frac{eBv}{m} = \frac{v^2}{R}$, откуда $R = \frac{mv}{eB}$. Для протона $R_1 = \frac{m_p v}{eB}$. Для электрона $R_2 = \frac{m_e v}{eB}$. Отсюда $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_p}{m_e} = 1840$.

11.75. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны R_1 траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории электрона?

Решение:

Имеем $R = \frac{mv}{eB}$ (см. задачу 11.74). За счет работы сил электрического поля частицы приобрели кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2} = eU$. Откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Тогда $R = \frac{m\sqrt{2eU}}{eB\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{eUm}{e}}\frac{1}{B}$. Т. е. для протона $R_1 = \sqrt{\frac{2Um_p}{e}}\frac{1}{B}$. Отсюда $R_1 / R_2 = \sqrt{m_p / m_e} = 42{,}9$.

11.76. На фотографии, полученной в камере Вильсона, траектория электрона в однородном магнитном поле представляет собой дугу окружности радиусом $R = 10$ см. Индукция магнитного поля $B = 10$ мТл. Найти энергию электрона W (в электронвольтах).

Решение:

Имеем $W = \frac{e^2 B^2 R^2}{2m}$ (см. задачу 11.73). Подставляя числовые данные, получим $W = 1{,}4 \cdot 10^{-14}$ Дж или $W = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 88 \cdot 10^3$ эВ.

11.77. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью $v = 10^6$ м/с. Индукция магнитного поля $B = 0{,}3$ Тл. Радиус окружности $R = 4$ см. Найти заряд q частицы, если известно, что ее энергия $W = 12$ кэВ.

Решение:

В магнитном поле на частицу действует сила Лоренца $\vec{F} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$ — (1). Поскольку частица движется по окружности, следовательно, векторы $\vec{F}$, $\vec{v}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны. Тогда уравнение (1) можно записать в скалярном виде: $F = qvB$. Сила Лоренца сообщает частице постоянное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$. Следовательно, $qvB = \frac{mv^2}{2}$ — (2). Энергия частицы $W = \frac{mv^2}{2}$, откуда $mv^2 = 2W$ — (3). Подставляя (3) в (2) и выражая из полученного уравнения заряд частицы q, получим $q = \frac{2W}{vBR} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

11.78. Протон и α-частица влетают в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению их движения. Во сколько раз период обращения T_1 протона в магнитном поле больше периода обращения T_2 α-частицы?

Решение:

Период обращения протона равен $T_1 = \frac{2\pi R_1}{v_1}$, где v_1 — скорость его движения и $R_1 = \frac{m_p v_1}{eB}$ (см. задачу 11.74). Отсюда $T_1 = \frac{2\pi m_p}{eB}$, т. е. период не зависит от скорости. Поскольку заряд α-частицы равен $2e$, то период ее обращения равен $T_2 = \frac{\pi m_\alpha}{eB}$. Отсюда отношение $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2m_p}{m_\alpha} = 0{,}5$.

11.79. α-частица, кинетическая энергия которой $W = 500$ эВ, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное ее движению. Индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ Тл. Найти силу F, действующую на α-частицу, радиус R окружности, по которой движется α-частица, и период обращения T α-частицы.

Решение:

В магнитном поле на α-частицу действует сила Лоренца $\vec{F} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$. Поскольку векторы $\vec{F}$, $\vec{v}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны, то в скалярном виде $F = qvB\sin\alpha = qvB$ — (1). Кинетическая энергия частицы $W = \frac{mv^2}{2}$ — (2), откуда $v = \sqrt{\frac{2W}{m}}$ — (3). Подставляя (3) в (1), получим $F = qB\sqrt{\frac{2W}{m}} = 5 \cdot 10^{-15}$ Н. Сила Лоренца сообщает α-частице нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$, следовательно, $F = m\frac{v^2}{R}$. Из (2) имеем $mv^2 = 2W$, тогда $F = \frac{2W}{R}$, откуда радиус окружности $R = \frac{2W}{F} = 0{,}032$ м. Период обращения α-частицы равен $T = \frac{\pi m_\alpha}{eB}$ (см. задачу 11.78). Подставляя числовые данные, получим $T = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ с.

11.80. α-частица, момент импульса которой $M = 1{,}33 \times$ $\times 10^{-22}$ кг·м²/с, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное к направлению ее движения. Индукция магнитного поля $B = 25$ мТл. Найти кинетическую энергию W α-частицы.

Решение:

Момент импульса α-частицы $\vec{M} = m[\vec{v}, \vec{R}]$ или $M = mvR\sin\alpha = mvR$ — (1) (поскольку $\alpha = 90°$). На частицу действует сила Лоренца $F = m\frac{v^2}{R}$ или $qvB = m\frac{v^2}{R}$ — (2). Из (1) имеем $R = \frac{M}{mv}$. Подставляя это выражение в (2), найдем $mv^2 = qB\frac{M}{m}$ — (3). Поскольку кинетическая энергия частицы равна $W = \frac{mv^2}{2}$, то, с учетом (3), получим $W = \frac{qBM}{2m} = 500$ эВ.

11.81. Однозарядные ионы изотопов калия с относительными атомными массами 39 и 41 ускоряются разностью потенциалов

$U = 300$ В; затем они попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению их движения. Индукция магнитного поля $B = 0{,}08$ Тл. Найти радиусы кривизны R_1 и R_2 траекторий этих ионов.

Решение:

Потенциальная энергия ускоренных ионов $W_п = qU$ и т. к. по условию ионы однозарядные, то $q = |e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Эта энергия переходит в кинетическую $W_к = \frac{mv^2}{2}$ и по закону сохранения энергии $eU = \frac{mv^2}{2}$, откуда скорость движения ионов $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (1). В магнитном поле на ионы действует сила Лоренца $F = evB\sin\alpha$, но т. к. по условию поле перпендикулярно направлению движения, то $\sin\alpha = 1$, поэтому $F = evB$ — (2). С другой стороны, по второму закону Ньютона $F = ma_n$, где $a_n = \frac{v^2}{R}$ — нормальное ускорение, тогда $F = \frac{mv^2}{R}$ — (3). Приравниваем правые части уравнений (2) и (3): $evB = \frac{mv^2}{R}$, откуда скорость движения ионов $v = \frac{eBR}{m}$ — (4). Приравнивая правые части уравнений (1) и (4), получаем $\sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{eBR}{m}$, откуда радиусы кривизны траекторий ионов $R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$.

Подставляя числовые данные, получим $R_1 = 0{,}195$ м и $R_2 = 0{,}2$ м.

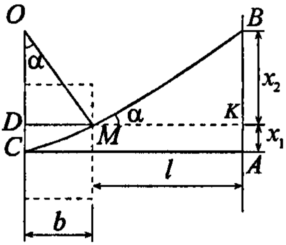
11.82. Найти отношение $\frac{q}{m}$ для заряженной частицы, если она, влетая со скоростью $v = 10^6$ м/с в однородное магнитное поле напряженностью $H = 200$ кА/м, движется по дуге окружности радиусом $R = 8{,}3$ см. Направление скорости движения частицы перпендикулярно к направлению магнитного поля. Сравнить найденное значение со значением $\frac{q}{m}$ для электрона, протона и α-частицы.

Решение:

Скорость движения заряженной частицы в магнитном поле под действием силы Лоренца (см. задачу 11.81) $v = \frac{qBR}{m}$ — (1). Магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением $B = \mu\mu_0 H$, но т. к. для воздуха магнитная проницаемость $\mu = 1$, поэтому $B = \mu_0 H$ — (2). Подставляя (2) в (1), находим $\frac{q}{m} = \frac{v}{\mu_0 HR} = 4{,}8 \times$ $\times 10^7$ Кл/кг. Для электрона $\frac{q}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг; для протона $\frac{q}{m} = 9{,}6 \cdot 10^7$ Кл/кг; для α-частицы $\frac{q}{m} = 4{,}8 \cdot 10^7$ Кл/кг.

11.83. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 300$ В, влетает в однородное магнитное поле, направленное от чертежа к нам. Ширина поля $b = 2{,}5$ см. В отсутствие магнитного поля пучок электронов дает пятно в точке A флуоресцирующего экрана, расположенного на расстоянии $l = 5$ см от края полюсов магнита. При включении магнитного поля пятно смещается в точку B. Найти смещение $x = AB$ пучка электронов, если известно, что индукция магнитного поля $B = 14{,}6$ мкТл.

Решение:



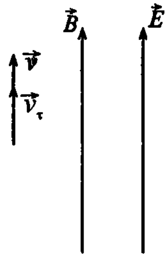
Общее смещение электрона $x = x_1 + x_2$, где x_1 — смещение электрона в магнитном поле. Электрон в магнитном поле движется по окружности радиусом $R = \frac{mv}{eB}$. Смещение x_1 можно найти из соотношения $x_1 = DC = OC - OD$. Но $OC = R$ и $OD = \sqrt{OM^2 - DM^2} = \sqrt{R^2 - b^2}$. Таким образом, $x_1 = R - \sqrt{R^2 - b^2}$. Смещение x_2 может быть найдено из пропорции $\frac{x_2}{l} = \frac{DM}{DO}$, откуда $x_2 = \frac{bl}{\sqrt{R^2 - b^2}}$. Тогда смещение $x = R - \sqrt{R^2 - b^2} + \frac{bl}{\sqrt{R^2 - b^2}}$. Имеем $R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{e}}$. Подставляя числовые данные, получим $R = 4$ см и $x = 4{,}9$ см.

11.84. Магнитное поле напряженностью $H = 8$ кА/м и электрическое поле напряженностью $E = 1$ кВ/м направлены одинаково. Электрон влетает в электромагнитное поле со скоростью $v = 10^5$ м/с. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное a ускорения электрона. Задачу решить, если скорость электрона направлена: а) параллельно направлению электрического поля; б) перпендикулярно к направлению электрического поля.

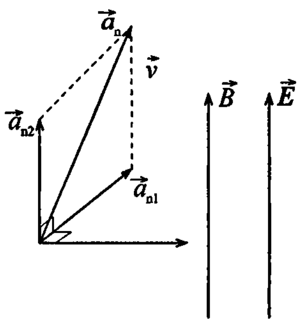
Решение:

а) Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца $F = |e| vB \sin\alpha$. Поскольку $\vec{v}$ параллельна $\vec{H}$, то

$\alpha = 0$, $F = 0$ и, следовательно, направление скорости не меняется, т. е. $a_n = 0$. Под действием сил электрического поля электрон получает тангенциальное ускорение, т. е. $F_{эл} = Ee = m|a_\tau|$, откуда $|a_\tau| = \frac{Ee}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{14}$ м/с². Полное ускорение $a = |a_\tau| = 1{,}76 \cdot 10^{14}$ м/с².

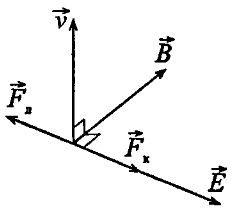


б) Если $\vec{v}$ перпендикулярна $\vec{H}$, то $a_\tau = 0$ и электрон движется по окружности. На него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $F = |e|vB\sin 90° = |e|vB$, которая сообщает ему ускорение a_n. Следовательно, $evB = m - a_{n1}$, откуда $a_{n1} = \frac{evB}{m}$. Электрическое поле действует перпендикулярно движению электрона, т. е. тангенциально не ускоряет его, поэтому $a_\tau = 0$, а нормальное ускорение $a_{n2} = \frac{Ee}{m}$. Векторы $\bar{a}_{n1}$ и $\bar{a}_{n2}$ направлены перпендикулярно друг другу, поэтому результирующее нормальное ускорение $a_n = \sqrt{\left(\frac{eE}{m}\right)^2 + \left(\frac{evB}{m}\right)^2} = \frac{e}{m}\sqrt{E^2 + v^2B^2}$ или $a_n = \frac{e}{m} \times$ $\times \sqrt{E^2 + v^2\mu_0^2H^2} = 2{,}5 \cdot 10^{14}$ м/с².



11.85. Магнитное поле, индукция которого $B = 0{,}5$ мТл, направлено перпендикулярно к электрическому полю, напряженность которого $E = 1$ кВ/м. Пучок электронов влетает в электромагнитное поле, причем скорость $\vec{v}$ электронов перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Найти скорость электронов v, если при одновременном действии обеих полей пучок электронов не испытывает отклонения. Каким будет радиус R траектории движения электронов при условии включения одного магнитного поля?

Решение:

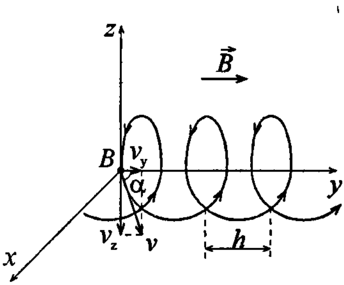


Поскольку векторы $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{E}$ взаимно перпендикулярны, то пучок электронов не будет испытывать отклонения, если силы, действующие на него со стороны магнитного и электрического полей, будут равны по модулю, т. е. сила Лоренца будет уравновешиваться силой Кулона. Имеем $F_Л = F_К$, где $F_Л = evB$, $F_К = eE$. Тогда $Ee = evB$, откуда $v = \frac{E}{B} = 2 \cdot 10^6$ м/с. При включении одного магнитного поля сила Лоренца сообщает электронам центростремительное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$, т. е. $evB = \frac{mv^2}{R}$, откуда $R = \frac{mv}{eB} = 2{,}25$ см.

11.86. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 6$ кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30°$ к направлению поля и движется по винтовой траектории. Индукция магнитного поля $B = 13$ мТл. Найти радиус R и шаг h винтовой траектории.

Решение:

Разложим скорость электрона, влетающего в магнитное поле, по двум направлениям: вдоль линий поля — v_y и параллельно им — v_z. Составим два уравнения. Сила Лоренца создает центростремительное ускорение, т. е. $Bev_z = \frac{mv_z^2}{R}$, откуда $Be = \frac{mv_z}{R}$ — (1). Поскольку $\frac{mv^2}{2} = eU$, а из рисунка $v = \frac{v_z}{\sin\alpha}$, то



$eU = \frac{1}{2}\frac{mv_z^2}{\sin^2\alpha}$. Разделим обе части уравнения (2) на квадраты обеих частей уравнения (1). Получим $\frac{eU}{B^2e^2} = \frac{mv_z^2R^2}{2\sin^2\alpha m^2v_z^2}$; $\frac{U}{B^2e} = \frac{R^2}{2m\sin^2\alpha}$, откуда $R = \frac{\sin\alpha}{B}\times$ $\times\sqrt{\frac{2mU}{e}} = 1$ см. Шаг спирали найдем из соотношений $2\pi R = v_z t$ и $h = v_y t$, откуда $h = 2\pi R\frac{v_y}{v_z}$. Т. к. $\frac{v_y}{v_z} = ctg\alpha = 1{,}73$, то $h = 11$ см.

11.87. Протон влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30°$ к направлению поля и движется по винтовой линии радиусом $R = 1{,}5$ см. Индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ Тл. Найти кинетическую энергию W протона.

Решение:

Разложим скорость протона $\vec{v}$ на две составляющие: $\vec{v}_\tau$, направленную вдоль поля, и $\vec{v}_{II}$, направленную перпендикулярно к полю. Проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную к индукции $\vec{B}$, представляет собой окружность, радиус которой определяется формулой $R = \frac{mv_n}{eB} = \frac{m(v\sin\alpha)}{eB}$ (см. задачу 11.69). Отсюда $v = \frac{eBR}{m\sin\alpha}$. Кинетическая энергия протона $W = \frac{mv^2}{2}$. Подставляя выражение для v, получим $W = \frac{e^2B^2R^2}{2m\sin^2\alpha}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 6{,}9\cdot10^{-17}$ Дж или $W = 431$ эВ.

11.88. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v = 10^7$ м/с. Длина конденсатора $l = 5$ см. Напряженность электрического поля конденсатора $E = 10$ кВ/м. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле, перпендикулярное к электрическому полю. Индукция магнитного поля $B = 10$ мТл. Найти радиус R и шаг h винтовой траектории электрона в магнитном поле.

Решение:

При вылете из конденсатора электрон имеет скорость $v' = \sqrt{v^2 + \left(\frac{eEl}{mv}\right)^2}$ — (1), направление которой определяется углом α, причем $\cos\alpha = \frac{v}{v'}$ — (2) (см. задачу 9.72). Из (1) найдем $v' = 1{,}3\cdot10^7$ м/с. Из (2) найдем $\cos\alpha = 0{,}77$, $\sin\alpha = 0{,}64$, $\alpha \approx 40°$. Разложим скорость $\vec{v}'$ на две составляющие: $\vec{v}'_\tau$, направленную вдоль поля, и $\vec{v}'_n$, направленную перпендикулярно к полю. Проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную к индукции $\vec{B}$, представляет собой окружность, радиус которой равен искомому радиусу винтовой траектории и определяется формулой $R=\frac{mv'_n}{eB}=\frac{m(v'\sin\alpha)}{eB}$ (см. задачу 11.69). Т. к. период обращения электрона $T=\frac{2\pi R}{v'\sin\alpha}=\frac{2\pi m}{eB}$, то шаг винтовой траектории электрона $h=v'_\tau T=\frac{2\pi m(v'\cos\alpha)}{eB}$. Подставляя числовые данные, получим $R=4{,}7\cdot10^{-3}$ м и $h=36\cdot10^{-3}$ м.

11.89. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U=3$ кВ, влетает в магнитное поле соленоида под углом $\alpha=30°$ к его оси. Число ампер-витков соленоида $IN=5000$ А·в. Длина соленоида $l=25$ см. Найти шаг h винтовой траектории электрона в магнитном поле.

Решение:

Имеем $h=\frac{2\pi mv\cos\alpha}{eB}$ — (1), где $v=\sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (2) (см. задачу 11.88). Магнитная индукция соленоида $B=\mu\mu_0\frac{IN}{l}$ — (3). Подставляя (2) в (1), получим $h=\frac{2\pi\sqrt{2eUm}\,l\cos\alpha}{e\mu\mu_0 IN}$. Подставляя числовые данные, получим $h=0{,}04$ м.

11.90. Через сечение $S=ab$ медной пластинки толщиной $a=0{,}5$ мм и высотой $b=10$ мм пропускается ток $I=20$ А. При помещении пластинки в магнитное поле, перпендикулярное к ребру b и направлению тока, возникает поперечная разность потенциалов $U=3{,}1$ мкВ. Индукция магнитного поля $B=1$ Тл. Найти концентрацию n электронов проводимости в меди и их скорость v при этих условиях.

Решение:

При протекании тока I вдоль проводящей пластины, помещенной перпендикулярно магнитному полю, возникает поперечная разность потенциалов $U = \frac{IB}{nea}$, где a — толщина пластины, B — индукция магнитного поля. Отсюда концентрация электронов проводимости $n = \frac{IB}{Uea} = 8{,}1 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$. По определению плотности тока $j = vne$ — (1), с другой стороны, $j = \frac{I}{S}$, где I — сила тока, $S = ab$ — площадь сечения медной пластинки, тогда $j = \frac{I}{ab}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $vne = \frac{I}{ab}$, откуда скорость $v = \frac{I}{abne} = 0{,}31$ мм/с.

11.91. Через сечение $S = ab$ алюминиевой пластинки (a — толщина и b — высота) пропускается ток $I = 5$ А. Пластинка помещена в магнитное поле, перпендикулярное к ребру b и направлению тока. Найти возникающую при этом поперечную разность потенциалов U. Индукция магнитного поля $B = 0{,}5$ Тл. Толщина пластинки $a = 0{,}1$ мм. Концентрацию электронов проводимости считать равной концентрации атомов.

Решение:

Поперечная разность потенциалов $U = \frac{IB}{nea}$ — (1). По условию задачи концентрация электронов проводимости равна концентрации атомов, поэтому $n = \frac{\rho N_A}{\mu}$ — (2), где ρ — плотность алюминия, μ — молярная масса, N_A —

число Авогадро. Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $U = \dfrac{IB\mu}{\rho N_A e a} = 2{,}72$ мкВ.

11.92. Пластинка полупроводника толщиной $a = 0{,}2$ мм помещена в магнитное поле, перпендикулярное к пластинке. Удельное сопротивление полупроводника $\rho = 10$ мкОм·м. Индукция магнитного поля $B = 1$ Тл. Перпендикулярно к направлению поля вдоль пластинки пропускается ток $I = 0{,}1$ А. При этом возникает поперечная разность потенциалов $U = 3{,}25$ мВ. Найти подвижность u носителей тока в полупроводнике.

Решение:

Поперечная разность потенциалов $U = \dfrac{IB}{nea}$ — (1). Удельная проводимость материала $\sigma = \dfrac{1}{\rho} = neu$, где ρ — удельное сопротивление материала, u — подвижность носителей тока. Тогда концентрация носителей тока $n = \dfrac{1}{\rho e u}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $U = \dfrac{IB\rho u}{a}$, откуда подвижность носителей тока в проводнике $u = \dfrac{Ua}{IB\rho} = 0{,}65\ \text{м}^2/(\text{В·с})$.

11.93. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл движется проводник длиной $l = 10$ см. Скорость движения проводника $v = 15$ м/с и направлена перпендикулярно к магнитному полю. Найти индуцированную в проводнике э.д.с. ε.

Решение:

Э.д.с. индукции определяется по закону Фарадея: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt}$. В этом уравнении знак «минус» соответствует правилу Ленца. Поскольку $d\Phi = BdS = Bldx$, то $\varepsilon = Bl\dfrac{dx}{dt} = Blv = 0{,}15\,\text{В}$.

11.94. Катушка диаметром $D = 10\,\text{см}$, состоящая из $N = 500$ витков проволоки, находится в магнитном поле. Найти среднюю э.д.с. индукции $\varepsilon_{\text{ср}}$, возникающую в этой катушке, если индукция магнитного поля увеличивается в течение времени $t = 0{,}1\,\text{с}$ от 0 до 2 Тл.

Решение:

Согласно закону Фарадея $\varepsilon_{\text{ср}} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где изменение потока магнитной индукции через катушку $\Delta\Phi = NS\Delta B$. Следовательно, $\varepsilon_{\text{ср}} = NS\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$, где $\Delta B = B_2 - B_1$. По условию $B_1 = 0$, $B_2 = 2\,\text{Тл}$. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon_{\text{ср}} = 78{,}5\,\text{В}$.

11.95. Скорость самолета с реактивным двигателем $v = 950\,\text{км/ч}$. Найти э.д.с. индукции ε, возникающую на концах крыльев такого самолета, если вертикальная составляющая напряженности земного магнитного поля $H_{\text{в}} = 39{,}8\,\text{А/м}$ и размах крыльев самолета $l = 12{,}5\,\text{м}$.

Решение:

Согласно закону Фарадея $\varepsilon = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1), где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S\sin\alpha$ или, поскольку

$\alpha = 90°$, $\Delta\Phi = B\Delta S$ — (2). Т. к. магнитная индукция $B = \mu\mu_0 H$, а площадь, перекрываемая крыльями самолета за время Δt, равна $\Delta S = vl\Delta t$, то из (2) получим $\Delta\Phi = \mu\mu_0 Hvl\Delta t$. Тогда из (1) $\varepsilon = \frac{\mu\mu_0 Hvl\Delta t}{\Delta t} = \mu\mu_0 Hvl$. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon = 0{,}165$ В.

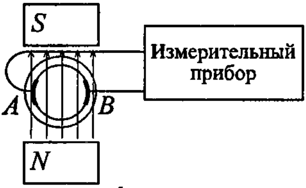
11.96. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}05$ Тл, вращается стержень длиной $l = 1$ м с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна магнитному полю. Найти э.д.с. индукции ε, возникающую на концах стержня.

Решение:

Согласно закону Фарадея $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1), где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S \sin\alpha$ или, поскольку $\alpha = 90°$, $\Delta\Phi = B\Delta S$. За один оборот стержень пересекает площадь $\Delta S = \pi l^2$ за время $\Delta t = t$. Тогда магнитный поток, пересекаемый стержнем за один оборот, $\Phi = B\pi l^2$, а возникающая на концах стержня э.д.с. $\varepsilon = \frac{B\pi \cdot l^2}{t} = B\pi l^2 n = \frac{Bl^2\omega}{2}$. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon = 0{,}5$ В.

11.97. Схема, поясняющая принцип действия электромагнитного расходомера жидкости, изображена на рисунке. Трубопровод с протекающей в нем проводящей жидкостью помещен в магнитное поле. На электродах A и B возникает э.д.с. индукции. Найти скорость v течения жидкости в трубопроводе, если индукция магнитного поля $B = 0{,}01$ Тл, расстояние между электродами (внутренний диаметр трубопровода) $d = 50$ мм и возникающая при этом э.д.с. $\varepsilon = 0{,}25$ мВ.

Решение:



По закону Фарадея э.д.с. электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Считая начальный магнитный поток $\Phi_1 = 0$, получаем $\Delta\Phi = \Phi_2 = BS$, где $S = ld$ — площадь, пронизываемая магнитным потоком, $l = v\Delta t$ — расстояние, которое проходит струя за время Δt. Тогда э.д.с. индукции $\varepsilon_i = Blv$, откуда скорость течения жидкости в трубопроводе $v = \frac{\varepsilon_i}{Bl} = 0{,}5$ м/с.

11.98. Круговой проволочный виток площадью $S = 0{,}01\,\text{м}^2$ находится в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 1$ Тл. Плоскость витка перпендикулярна к направлению магнитного поля. Найти среднюю э.д.с. индукции $\varepsilon_{\text{ср}}$, возникающую в витке при включении поля в течение времени $t = 10$ мс.

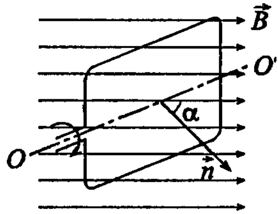
Решение:

Имеем $\varepsilon_{\text{ср}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{S\Delta B}{\Delta t}$. Поскольку индукция B уменьшается от 1Тл до 0, $\Delta B = (0-1) = -1$ Тл. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon_{\text{ср}} = 1$ В.

11.99. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}1$ Тл, равномерно вращается катушка, состоящая из $N = 100$ витков проволоки. Частота вращения катушки $n = 5\,\text{с}^{-1}$; площадь поперечного сечения катушки $S = 0{,}01\,\text{м}^2$. Ось вращения перпендикулярна к оси катушки и направлению магнитного поля. Найти максимальную э.д.с. индукции ε_{max} во вращающейся катушке.

Решение:

Рассмотрим один виток рамки. При равномерном вращении вокруг оси OO' с угловой скоростью ω магнитный поток через его площадь будет меняться по закону $\Phi = BS\cos\alpha$ — (1), где S — площадь рамки; α — угол между нормалью к плоскости и вектором $\vec{B}$.



Считая, что при $t = 0$ $\alpha = 0$, имеем $\alpha = \omega \cdot t$. Индуцируемая в витке э.д.с. индукции $\varepsilon_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right) = -\frac{d\Phi}{dt}$ — (2). Поскольку $\Phi(t) = BS\cos\alpha = BS\cos\omega \cdot t$ (согласно (1)), то, дифференцируя эту функцию и помня, что $\frac{d(\cos\omega \cdot t)}{dt} = -\omega \sin t$, получим $\varepsilon_i = BS\omega \sin\omega \cdot t$ — (3). Индуцируемая в N витках э.д.с. будет в N раз больше: $\varepsilon = N\varepsilon_i = NBS\omega \sin\omega \cdot t = \varepsilon_m \sin\omega \cdot t$, где ε_m — максимальное значение (амплитуда) э.д.с. индукции: $\varepsilon_m = NBS\omega$ — (4). Следовательно, при равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле в ней возникает переменная синусоидальная э.д.с. самоиндукции. Подставляя в (4) значение угловой скорости $\omega = 2\pi n$, где n — частота вращения рамки, получим $\varepsilon_m = 2\pi nNBS \approx 3{,}14$ В.

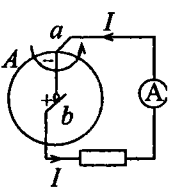
11.100. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}8$ Тл, равномерно вращается рамка с угловой скоростью $\omega = 15$ рад/с. Площадь рамки $S = 150$ см^2. Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет угол $\alpha = 30°$ с направлением магнитного поля. Найти максимальную э.д.с. индукции ε_{max} во вращающейся рамке.

Решение:

Мгновенное значение э.д.с. индукции ε определяется уравнением $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ — (1). При вращении рамки магнитный поток Φ, пронизывающий рамку, изменяется по закону $\Phi = BS \sin\alpha \cos\omega \cdot t$ — (2). Подставив (2) в (1) и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение э.д.с. индукции $\varepsilon = BS\omega \sin\alpha \sin\omega \cdot t$. Максимального значения э.д.с. достигнет при $\sin\omega \cdot t = 1$. Отсюда $\varepsilon_{max} = BS\omega \sin\alpha$; $\varepsilon_{max} = 0{,}09$ В.

11.101. Однородный медный диск A радиусом $R = 5$ см помещен в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля. По цепи aba может идти ток (a и b — скользящие контакты). Диск вращается с частотой $n = 3\,\text{с}^{-1}$. Найти э.д.с. ε такого генератора. Указать направление электрического тока, если магнитное поле направлено от нас к чертежу, а диск вращается против часовой стрелки.

Решение:



По закону Фарадея э.д.с. электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Считая начальный магнитный поток $\Phi_1 = 0$, получаем $\Delta\Phi = -\Phi_2 = -BS$, где $S = \pi R^2$ — площадь диска. В состоянии покоя $\varepsilon_i = 0$, а при вращении диска э.д.с. генератора $\varepsilon_i = \frac{B\pi R^2}{\Delta t}$, где $\Delta t = T$ — период обращения диска, т. е. время одного оборота. Поскольку частота вращения диска $n = \frac{1}{T}$, то окончательно э.д.с. генератора $\varepsilon_i = B\pi R^2 n = 4{,}71$ мВ. На свободные электроны, находящиеся в верхней части диска, со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, направленная вверх. В результате этого воздействия в центре диска накапливается положительный заряд, а на верхнем крае — отрицательный. Поскольку за положительное принято направление тока от «плюса» к «минусу», то ток будет направлен так, как показано на рисунке.

11.102. Горизонтальный стержень длиной $l = 1$ м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Ось вращения параллельна магнитному полю, индукция которого $B = 50$ мкТл. При какой частоте вращения n стержня разность потенциалов на концах этого стержня $U = 1$ мВ?

Решение:

Согласно закону Фарадея $\varepsilon = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1), где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S$ — (2), где площадь, покрываемая сечением стержня за один оборот, равна $\Delta S = \pi l^2$ — (3). Подставив (3) в (2), а затем (2) в (1), получим $\varepsilon = \dfrac{B\pi l^2}{\Delta t}$. Здесь Δt — время одного оборота. Отсюда $n = \dfrac{1}{\Delta t} = \dfrac{\varepsilon}{B\pi l^2}$. Подставляя числовые данные, получим $n = 6{,}4\ \text{с}^{-1}$.

11.103. На соленоид длиной $l = 20$ см и площадью поперечного сечения $S = 30\ \text{см}^2$ надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет $N = 320$ витков, и по нему идет ток $I = 3$ А. Какая средняя э.д.с. $\varepsilon_{\text{ср}}$ индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени $t = 1$ мс?

Решение:

Имеем $\varepsilon_{\text{ср}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta BS}{\Delta t}$. Поскольку $\Delta B = B_2 - B_1$, где $B_2 = 0$, а $B_1 = \frac{\mu\mu_0 NI}{l}$, а $\Delta t = t = 1$ мс, то $\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\mu\mu_0 NS^2}{lt} =$ $= 18$ мВ.

11.104. Какая средняя э.д.с. $\varepsilon_{\text{ср}}$ индуцируется в витке, если соленоид, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет железный сердечник?

Решение:

Напряженность магнитного поля внутри соленоида не зависит от наличия сердечника и равна $H = \frac{NI}{l} = 4800$ А/м.

По графику определим $B = 1{,}7$ Тл. Тогда $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 265$.

Подставляя в выражение для ε из предыдущей задачи значение μ, найдем $\varepsilon = 4{,}8$ В.

11.105. На соленоид длиной $l = 144$ см и диаметром $D = 5$ см надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет $N = 2000$ витков, и по ней течет ток $I = 2$ А. Соленоид имеет железный сердечник. Какая средняя э.д.с. $\varepsilon_{\text{ср}}$ индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени $t = 2$ мс?

Решение:

Изменение магнитного потока в витке достигается изменением тока в соленоиде. При этом индуцируемая э.д.с. $\varepsilon = -L_{12}\frac{\Delta I}{\Delta t}$ — (1), где $L_{12} = \mu_0 \mu n_1 n_2 Sl$ — взаимная индуктивность витка и соленоида. Для соленоида $n_1 = \frac{N}{l}$ —

число витков на единицу длины, $S = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь поперечного сечения, тогда $L_{12} = \mu_0 \mu N \frac{\pi D^2}{4}$ — (2), т. к. для витка $n_2 = 1$. Считая начальное время и конечный ток равными нулю, получаем $\Delta t = -t$ и $\Delta I = I$, тогда, с учетом (2), уравнение (1) можно переписать в виде $\varepsilon_{ср} = \mu_0 \mu N \frac{\pi D^2 I}{4t}$ — (3). Напряженность магнитного поля соленоида $H = In_1 = \frac{IN}{l} = 2{,}77 \cdot 10^3$ А/м, по графику находим значение магнитной индукции $B = 1{,}6$ Тл. Поскольку $B = \mu_0 \mu H$, то $\mu_0 \mu = \frac{B}{H} = 0{,}575$ мГн/м. Подставляя найденное значение в уравнение (3), получим $\varepsilon_{ср} = 1{,}61$ В.

11.106. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}1$ Тл, вращается катушка, состоящая из $N = 200$ витков. Ось вращения катушки перпендикулярна к ее оси и к направлению магнитного поля. Период обращения катушки $T = 0{,}2$ с; площадь поперечного сечения $S = 4$ см^2. Найти максимальную э.д.с. индукции ε_{max} во вращающейся катушке.

Решение:

Мгновенное значение э.д.с. индукции ε определяется уравнением $\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt}$ — (1). Потокосцепление $\Psi = N\Phi$, где N — число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком Φ. Подставив выражение Ψ в (1), получим $\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}$ — (2). При вращении катушки магнитный поток Φ, пронизывающий катушку в момент времени t, изменяется по закону $\Phi = BS\cos\omega t$ — (3), где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — (4) — угловая скорость вращения катушки. Подставив (3) в (2) и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение э.д.с. индукции $\varepsilon = NB\omega\sin\omega t$. Максимального значения э.д.с. достигнет при $\sin\omega t = 1$. Отсюда, подставляя (4), получим $\varepsilon_{max} = NBS\frac{2\pi}{T} = 250$ мВ.

11.107. Катушка длиной $l = 20$ см имеет $N = 400$ витков. Площадь поперечного сечения катушки $S = 9\ \text{см}^2$. Найти индуктивность L_1 катушки. Какова будет индуктивность L_2 катушки, если внутрь катушки введен железный сердечник? Магнитная проницаемость материала сердечника $\mu = 400$.

Решение:
Индуктивность катушки определяется выражением $L = \mu\mu_0\frac{N^2S}{l}$. Учитывая, что магнитная проницаемость воздуха $\mu = 1$, получим $L_1 = 0{,}9 \cdot 10^{-3}$ Гн; $L_2 = 0{,}36$ Гн.

11.108. Обмотка соленоида состоит из N витков медной проволоки, поперечное сечение которой $S = 1\ \text{мм}^2$. Длина соленоида $l = 25$ см; его сопротивление $R = 0{,}2$ Ом. Найти индуктивность L соленоида.

Решение:
Имеем $L = \mu\mu_0\frac{N^2S'}{l}$ — (1), где $S' = \pi r^2$ — (2) — площадь поперечного сечения соленоида. Число витков N найдем из соотношения $N = \frac{l}{d}$. Диаметр проволоки d можно найти, зная, что площадь поперечного сечения проволоки

$S = \pi \dfrac{d^2}{4}$, откуда $d = \sqrt{\dfrac{4S}{\pi}}$. Тогда $N = \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{S}} = 222$. Сопротивление R проволоки определяется по формуле: $R = \rho \dfrac{l'}{S}$, откуда длина проволоки $l' = \dfrac{SR}{\rho} = 11{,}8$ м. Разделив длину всей проволоки на количество витков, мы получим длину окружности одного витка, т. е. $\dfrac{l'}{N} = 2\pi r$, откуда $r = \dfrac{l'}{2\pi N}$. Подставляя это выражение в (2), получим $S' = \dfrac{(l')^2}{4\pi N^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^2. Подставляя числовые данные в (1), получим $L = 54{,}5 \cdot 10^{-6}$ Гн.

11.109. Катушка длиной $l = 20$ см и диаметром $D = 3$ см имеет $N = 400$ витков. По катушке идет ток $I = 2$ А. Найти индуктивность L катушки и магнитный поток Φ, пронизывающий площадь ее поперечного сечения.

Решение:

Имеем $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$, где площадь поперечного сечения катушки $S = \pi \dfrac{D^2}{4}$. Откуда $L = \mu\mu_0 \dfrac{\pi N^2 D^2}{4l} = 0{,}71 \cdot 10^{-3}$ Гн. Магнитный поток, пронизывающий всю катушку, равен $N\Phi = LI$, тогда магнитный поток, пронизывающий плоскость поперечного сечения, равен $\Phi = \dfrac{LI}{N} = 3{,}55 \cdot 10^{-6}$ Вб.

11.110. Сколько витков проволоки диаметром $d = 0{,}6$ см имеет однослойная обмотка катушки, индуктивность которой $L = 1$ мГн и диаметр $D = 4$ см? Витки плотно прилегают друг к другу.

Решение:

Имеем $L = \mu\mu_0 \dfrac{\pi N^2 D^2}{4l}$ (см. задачу 11.109). Здесь длина катушки $l = dN$. Следовательно, $L = \mu\mu_0 \dfrac{\pi N D^2}{4d}$, откуда $N = \dfrac{4dL}{\mu\mu_0 \pi D^2} = 380$.

11.111. Катушка с железным сердечником имеет площадь поперечного сечения $S = 20\,\text{см}^2$ и число витков $N = 500$. Индуктивность катушки с сердечником $L = 0{,}28\,\text{Гн}$ при токе через обмотку $I = 5$ А. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника.

Решение:

Мгновенное значение потокосцепления для катушки определяется выражением $\Psi = LI$ — (1). Кроме того, $\Psi = N\Phi = NBS$ — (2) (см. задачу 11.106). Приравняв правые части уравнений (1) и (2), получим $NBS = LI$, откуда $B = \dfrac{LI}{NS}$; $B = 1{,}4$ Тл. Магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$. Отсюда $\mu = \dfrac{B}{\mu_0 H}$. По графику зависимости индукции $\vec{B}$ от напряженности $\vec{H}$ магнитного поля определим значение H, соответствующее $B = 1{,}4$ Тл: $H = 0{,}8 \cdot 10^3$ А/м. Тогда $\mu = 1400$.

11.112. Соленоид длиной $l = 50$ см и площадью поперечного сечения $S = 2\,\text{см}^2$ имеет индуктивность $L = 0{,}2$ мкГн. При каком токе I объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида $W_0 = 1\,\text{мДж/м}^3$?

Решение:

Объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида определяется по формуле $W_0 = \dfrac{B^2}{2\mu\mu_0}$ — (1). Индукция магнитного поля внутри соленоида равна $B = \dfrac{\mu\mu_0 NI}{l}$ — (2). Число витков N можно найти из выражения для индуктивности соленоида: $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$, откуда $N = \sqrt{\dfrac{lL}{\mu\mu_0 S}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $B = I\sqrt{\dfrac{\mu\mu_0 L}{lS}}$. Тогда из (1) $W_0 = \dfrac{I^2 L}{2lS}$, откуда $I = \sqrt{\dfrac{2lSW_0}{L}} = 1\,\text{А}$.

11.113. Сколько витков имеет катушка, индуктивность которой $L = 1\,\text{мГн}$, если при токе $I = 1\,\text{А}$ магнитный поток сквозь катушку $\Phi = 2\,\text{мкВб}$?

Решение:

Магнитный поток сквозь катушку равен $N\Phi = LI$, откуда $N = \dfrac{LI}{\Phi} = 500$.

11.114. Площадь поперечного сечения соленоида с железным сердечником $S = 10\,\text{см}^2$; длина соленоида $l = 1\,\text{м}$. Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника, если магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида, $\Phi = 1{,}4\,\text{мВб}$. Какому току I, текущему через соленоид, соответствует этот магнитный поток, если известно, что индуктивность соленоида при этих условиях $L = 0{,}44\,\text{Гн}$?

Решение:

Магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида, $\Phi = BS\cos\alpha$, но т. к. $\alpha = 0$, то $\cos\alpha = 1$ и $\Phi = BS$, откуда магнитная индукция $B = \frac{\Phi}{S} = 1{,}4$ Тл. По графику находим напряженность магнитного поля $H = 800$ А/м. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1392{,}6$ – магнитная проницаемость материала сердечника. Магнитный поток через поперечное сечение катушки связан с ее индуктивностью соотношением $N\Phi = LI$, где число витков N может быть получено из выражения дя индуктивности соленоида: $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$, откуда $N = \sqrt{\frac{lL}{\mu\mu_0 S}} =$ $= 500$. Тогда данный магнитный поток соответствует току $I = \frac{N\Phi}{L} = 1{,}6$ А.

11.115. В соленоид длиной $l = 50$ см вставлен сердечник из такого сорта железа, для которого зависимость $B = f(H)$ неизвестна. Число витков на единицу длины соленоида $N_l = 400$ см$^{-1}$; площадь поперечного сечения соленоида $S = 10$ см^2. Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника при токе через обмотку соленоида $I = 5$ А, если известно, что магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида с сердечником, $\Phi = 1{,}6$ мВб. Какова индуктивность L соленоида при этих условиях?

Решение:

По закону Фарадея э.д.с. электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1). Считая начальный магнитный поток $\Phi_0 = 0$, получаем $\Delta\Phi = \Phi_1$. Э.д.с. самоиндукции определяется формулой $\varepsilon_c = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ — (2). Считая начальный ток $I_0 = 0$, получаем $\Delta I = I$, тогда уравнения (1) и (2) можно переписать в следующем виде: $\varepsilon_i = -\frac{\Phi_1}{\Delta t}$ — (3) и $\varepsilon_c = -\frac{LI}{\Delta t}$ — (4). Поскольку в нашем случае $\varepsilon_i = \varepsilon_c$, то, приравнивая правые части уравнений (3) и (4), получаем $\Phi_1 = LI$ — (5). С другой стороны, полный поток, пронизывающий весь соленоид, $\Phi_1 = \Phi nl$ — (6), где n — число витков на единицу длины соленоида, l — длина соленоида. Приравнивая правые части уравнений (5) и (6), получаем $LI = \Phi nl$, откуда индуктивность соленоида $L = \frac{\Phi nl}{I} = 64$ мГн. С другой стороны, $L = \mu\mu_0 n^2 lS$, где μ — магнитная проницаемость сердечника, S — площадь поперечного сечения соленоида. Отсюда магнитная проницаемость сердечника $\mu = \frac{L}{\mu_0 n^2 lS} = 636{,}6$.

11.116. Имеется соленоид с железным сердечником длиной $l = 50$ см, площадью поперечного сечения $S = 10\ \text{см}^2$ и числом витков $N = 1000$. Найти индуктивность L этого соленоида, если по обмотке соленоида течет ток: а) $I = 0{,}1$ А; б) $I = 0{,}2$ А; в) $I = 2$ А.

Решение:

Имеем $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$ — (1). Для того чтобы определить индуктивность L соленоида, нужно найти магнитную проницаемость μ сердечника. Вычислив по формуле $H = \frac{IN}{l}$ напряженность магнитного поля внутри соленоида и воспользовавшись далее способом, описанным в задаче 11.39, найдем значения μ, соответствующие различным значениям тока I. Затем из (1) найдем значение L. Данные запишем в таблицу:

n.	H, А/м	B, Тл	μ	L, Гн
а	200	0,8	3182	8
б	400	1,2	2387	6
в	4000	1,7	338	0,85

11.117. Две катушки намотаны на один общий сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0{,}2$ Гн, второй — $L_2 = 0{,}8$ Гн; сопротивление второй катушки $R_2 = 600$ Ом. Какой ток I_2 потечет во второй катушке, если ток $I_1 = 0{,}3$ А, текущий в первой катушке, выключить в течение времени $t = 1$ мс?

Решение:

Взаимная индуктивность катушек $L_{12} = \mu\mu_0 n_1 n_2 Sl$ — (1). Индуктивность первой катушки $L_1 = \mu\mu_0 n_1^2 lS$ — (2), индуктивность второй катушки $L_2 = \mu\mu_0 n_2^2 lS$ — (3). Умножая (2) на (3), получим $L_1 L_2 = (\mu\mu_0 Sl)^2 n_1^2 n_2^2$, откуда $n_1 n_2 = \dfrac{\sqrt{L_1 L_2}}{\mu\mu_0 lS}$ — (4). Подставляя (4) в (1), найдем $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$. При выключении тока I_1 во второй катушке возникнет э.д.с. равная $\varepsilon_2 = -L_{12}\dfrac{dI_1}{dt}$ — (5). Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{R_2}$ или, с учетом (5), средний ток во второй катушке $I_2 = \dfrac{L_{12}}{R_2}\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} =$

$$= \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R}\frac{I_1}{t} = 0{,}2 \text{ А.}$$

11.118. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}1$ Тл, помещена квадратная рамка из медной проволоки. Площадь поперечного сечения проволоки $s = 1\ \text{мм}^2$, площадь рамки $S = 25\ \text{см}^2$. Нормаль к плоскости рамки параллельна магнитному полю. Какое количество электричества q пройдет по контуру рамки при исчезновении магнитного поля?

Решение:

Количество электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника при возникновении в нем индукционного тока, $dq = -\frac{1}{R}d\Phi$. Отсюда $q = -\frac{1}{R}\int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{1}{R}(\Phi_2 - \Phi_1)$ — (1). По условию $\Phi_2 = 0$, а $\Phi_1 = BS$. Сопротивление рамки $R = \rho\frac{l}{s} = \rho\frac{4a}{s} = \rho\frac{4\sqrt{S}}{s}$, где a — сторона рамки. Тогда из (1) получим $q = \frac{Bs\sqrt{S}}{4\rho} = 74 \cdot 10^{-3}$ Кл.

11.119. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}05$ Тл, помещена катушка, состоящая из $N = 200$ витков проволоки. Сопротивление катушки $R = 40$ Ом; площадь поперечного сечения $S = 12\ \text{см}^2$. Катушка помещена так, что ее ось составляет угол $\alpha = 60°$ с направлением магнитного поля. Какое количество электричества q пройдет по катушке при исчезновении магнитного поля?

Решение:

Количество электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника при возникновении в нем индукционного тока, $dq = -\frac{1}{R}d\Phi$. Элементарный магнитный поток $d\Phi = NS\cos\alpha dB$, где N — число витков катушки, S — площадь поперечного сечения. Тогда количество

электричества, которое пройдет по катушке при исчезновении магнитного поля, $q = -\frac{1}{R}\int_B^0 d\Phi = -\frac{NS\cos\alpha}{R}\int_B^0 dB = $
$$= \frac{BN\cos\alpha}{R} = 0{,}15\ \text{мКл}.$$

11.120. Круговой контур радиусом $r = 2$ см помещен в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 0{,}2$ Тл. Плоскость контура перпендикулярна к направлению магнитного поля. Сопротивление контура $R = 1$ Ом. Какое количество электричества q пройдет через катушку при повороте ее на угол $\alpha = 90°$?

Решение:

Количество электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника при возникновении в нем индукционного тока, $dq = -\frac{1}{R}d\Phi$. Элементарный магнитный поток $d\Phi = BS\sin\alpha d\alpha$, т. к. α — угол между плоскостью контура и направлением вектора магнитной индукции. Тогда количество электричества, которое пройдет через катушку при повороте ее на угол $\alpha = 90°$, $q = -\frac{1}{R}\int_0^\alpha d\Phi =$
$$= -\frac{BS}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha = -\frac{BS}{R}\cos\alpha\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}; \quad q = -\frac{BS}{R}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) =$$
$= \frac{BS}{R}$. Т. к. $S = \pi r^2$, то окончательно $q = \frac{B\pi r^2}{R} = 0{,}25$ мКл.

11.121. На соленоид длиной $l = 21$ см и площадью поперечного сечения $S = 10\ \text{см}^2$ надета катушка, состоящая из $N_1 = 50$ витков. Катушка соединена с баллистическим гальванометром, сопротивление которого $R = 1$ кОм. По обмотке соленоида, состоящей из $N_2 = 200$ витков, идет ток $I = 5$ А. Найти баллистическую постоянную C гальванометра, если известно, что при включении тока в соленоиде гальванометр дает отброс, равный 30 делениям шкалы. Сопротивлением катушки по сравнению с сопротивлением баллистического гальванометра пренебречь.

Решение:

Взаимная индуктивность катушки и соленоида $L_{12} = \mu_0 n_1 n_2 S l$, где $n_1 = \frac{N_1}{l}$ и $n_2 = \frac{N_2}{l}$ — число витков на единицу длины соответственно катушки и соленоида. При этом э.д.с., индуцируемая в катушке, $\varepsilon_i = -L_{12}\frac{dI}{dt}$ — (1) или по закону Фарадея $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{d\Phi}{dt} = L_{12}\frac{dI}{dt}$ или $d\Phi = L_{12} dI = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S dI}{l}$. Количество электричества, прошедшего через гальванометр, $q = -\frac{1}{R}\int_I^0 d\Phi =$

$$= -\frac{1}{R}\frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}\int_I^0 dI = -\frac{1}{R}\frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}(-I) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S I}{Rl};$$

$q = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S I}{Rl}$. Тогда баллистическая постоянная гальванометра $C = \frac{q}{k} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S I}{kRl} = 10^{-8}$ Кл/дел, где k — число делений шкалы, на которое произошел отброс.

11.122. Для измерения индукции магнитного поля между полюсами электромагнита помещена катушка, состоящая из $N = 50$ витков проволоки и соединенная с баллистическим гальванометром. Ось катушки параллельна направлению магнитного поля. Площадь поперечного сечения катушки $S = 2\,см^2$. Сопротивление гальванометра $R = 2$ кОм; его баллистическая постоянная $C = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл/дел. При быстром выдергивании катушки из магнитного поля гальванометр дает отброс, равный 50 делениям шкалы. Найти индукцию B магнитного поля. Сопротивлением катушки по сравнению с сопротивлением баллистического гальванометра пренебречь.

Решение:

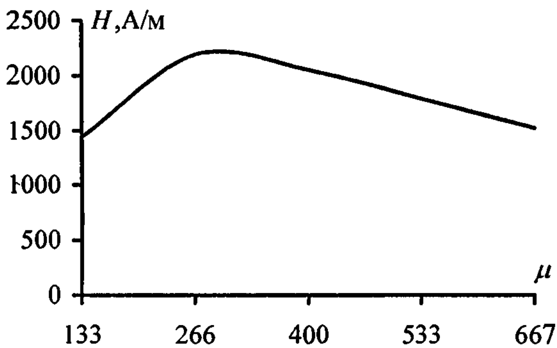
Количество электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника при возникновении в нем индукционного тока, $dq = -\frac{1}{R}d\Phi$. Элементарный магнитный поток $d\Phi = NSdB$, где N — число витков проволоки, S — площадь поперечного сечения катушки. Количество электричества, которое протечет через гальванометр при быстром выдергивании катушки из магнитного поля, $q = -\frac{1}{R}\int_B^0 NSdB = \frac{NBS}{R}$ — (1). С другой стороны, $q = Ck$ — (2), где C — баллистическая постоянная гальванометра, k — число делений отброса гальванометра. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{NBS}{R} = Ck$, откуда индукция магнитного поля электромагнита $B = \frac{RCk}{SN} = 0{,}2$ Тл.

11.123. Зависимость магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля H была впервые исследована А. Г. Столетовым в его работе «Исследование функции намагничения мягкого железа». При исследовании Столетов придал испытуемому образцу железа форму тороида. Железо намагничивалось пропусканием тока I по первичной обмотке тороида. Изменение направления тока в этой первичной катушке вызывало в баллистическом гальванометре отброс на угол α. Гальванометр был включен в цепь вторичной обмотки тороида. Тороид, с которым работал Столетов, имел следующие параметры: площадь поперечного сечения $S = 1{,}45\ \text{см}^2$, длина $l = 60$ см, число витков первичной катушки $N_1 = 800$, число витков вторичной катушки $N_2 = 100$. Баллистическая постоянная гальванометра $C = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Кл/дел и сопротивление вторичной цепи $R = 12$ Ом. Результаты одного из опытов Столетова сведены в таблицу:

I, А	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
α (в дел. шкалы)	48,7	148	208	241	256

По этим данным составить таблицу и построить график зависимости магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля H для железа, с которым работал Столетов.

Решение:



Напряженность магнитного поля в тороиде $H = \dfrac{IN_1}{l}$ — (1). Если изменить направление тока в первичной катушке на противоположное, то через гальванометр пройдет количество электричества $q = \dfrac{2\Phi N_2}{R}$, где Φ — магнитный поток, пронизывающий площадь поперечного сечения тороида. Но $\Phi = BS = \frac{\mu\mu_0 SIN_1}{l}$; следовательно, $q = \frac{2N_2\mu\mu_0 SIN_1}{Rl}$, откуда $\mu = \frac{qRl}{2\mu_0 N_1 N_2 SI}$. Т. к. $q = C\alpha$, то $\mu = \frac{C\alpha Rl}{2\mu_0 N_1 N_2 SI}$ — (2). Подставляя в (1) и (2) различные значения I и соответствующие значения α, данные в условии задачи, получим таблицу:

I, А	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
H, А/м	133	266	400	533	667
μ	1440	2190	2050	1790	1520

11.124. Для измерения магнитной проницаемости железа из него был изготовлен тороид длиной $l = 50$ см и площадью поперечного сечения $S = 4\ \text{см}^2$. Одна из обмоток тороида имела $N_1 = 500$ витков и была присоединена к источнику тока, другая имела $N_2 = 1000$ витков и была присоединена к гальванометру. Переключая направление тока в первичной обмотке на обратное, мы вызываем во вторичной обмотке индукционный ток. Найти магнитную проницаемость железа μ, если известно, что при переключении в первичной обмотке направления тока $I = 1$ А через гальванометр прошло количество электричества $q = 0{,}06$ Кл. Сопротивление вторичной обмотки $R = 20$ Ом.

Решение:

Магнитный поток через катушку изменяется за время t от $\Phi = NBS$ до нуля. В катушке индуцируется э.д.с. Значения э.д.с. в различные моменты времени различны. По закону электромагнитной индукции э.д.с. в некоторый момент времени определяется по формуле $\varepsilon_и = \frac{d\Phi}{dt}$. Изменение магнитного потока за время t можно определить как:

$\Phi = \int_0^t \varepsilon\, dt = \varepsilon t$. Э.д.с. в свою очередь связана с силой тока: $\varepsilon = IR$, откуда изменение магнитного потока за время t равно $\Phi = R(I \cdot t)$. Выражение в скобках определяет полный заряд, протекший по цепи за время t, т. е. $\Phi = qR$ — (1), но $\Phi = N_2BS$ — (2), где $B = \frac{\mu\mu_0 IN_1}{l/2}$ — (3). Из (2) и (3) получим $\Phi = \frac{2N_1N_2\mu\mu_0 IS}{l}$ — (4). Приравнивая (1) и (4), найдем $\mu = \frac{qRl}{2N_1N_2\mu_0 IS} = 1200$.

11.125. Электрическая лампочка, сопротивление которой в горячем состоянии $R = 10$ Ом, подключается через дроссель к 12-вольтовому аккумулятору. Индуктивность дросселя $L = 2$ Гн, сопротивление $r = 1$ Ом. Через какое время t после включения лампочка загорится, если она начинает заметно светиться при напряжении на ней $U = 6$ В?

Решение:

Вследствие явления самоиндукции при включении э.д.с. сила тока в лампочке нарастает по закону $I = I_0\left(1 - exp\left(-\frac{R+r}{L}t\right)\right)$ — (1). По закону Ома для участка цепи начальный и конечный токи соответственно равны $I_0 = \frac{\varepsilon}{R+r}$ и $I = \frac{U}{R+r}$, тогда уравнение (1) можно переписать в виде $U = \varepsilon\left(1 - exp\left(-\frac{R+r}{L}t\right)\right)$ или $1 - \frac{U}{\varepsilon} = exp\left(-\frac{R+r}{L}t\right)$ — (2). Прологарифмируем уравнение (2), тогда $ln\left(1 - \frac{U}{\varepsilon}\right) = -\frac{R+r}{L}t$, откуда время, через которое загорится лампочка после включения, $t = -\frac{L}{R+r} ln\left(1 - \frac{U}{\varepsilon}\right) = 126$ мс.

11.126. Имеется катушка длиной $l = 20$ см и диаметром $D = 2$ см. Обмотка катушки состоит из $N = 200$ витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $S = 1\,\text{мм}^2$. Катушка включена в цепь с некоторой э.д.с. При помощи переключателя э.д.с. выключается, и катушка замыкается накоротко. Через какое время t после выключения э.д.с. ток в цепи уменьшится в 2 раза?

Решение:

Магнитный поток, создаваемый током I в катушке, связан с ее индуктивностью соотношением: $\Phi = LI$. При изменении тока на величину ΔI магнитный поток изменяется на $\Delta\Phi = L\Delta I$. По условию задачи $\Delta I = I - \frac{I}{2} = \frac{I}{2}$, т. е. $\Delta\Phi = \frac{LI}{2}$. С другой стороны, $\Delta\Phi = RI\Delta t$ (см. задачу 11.124), тогда $\frac{LI}{2} = RI\Delta t$, откуда $\Delta t = \frac{L}{2R}$ — (1). Найдем индуктивность катушки и ее сопротивление. Имеем $L = \frac{\mu\mu_0 SN^2}{l}$, где площадь поперечного сечения катушки $S = \pi\frac{D^2}{4}$. Откуда $L = \frac{\mu\mu_0 \pi D^2 N^2}{4l}$ — (2). Сопротивление катушки $R = \rho\frac{l'}{s}$, где длина проволоки $l' = \pi DN$. Отсюда $R = \rho\frac{\pi DN}{s}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $\Delta t = \frac{\mu\mu_0 DNS}{8l\rho}$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta t = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ с.

11.127. Катушка имеет индуктивность $L = 0{,}2$ Гн и сопротивление $R = 1{,}64$ Ом. Во сколько раз уменьшится ток в катушке через время $t = 0{,}05$ с после того, как э.д.с. выключена и катушка замкнута накоротко?

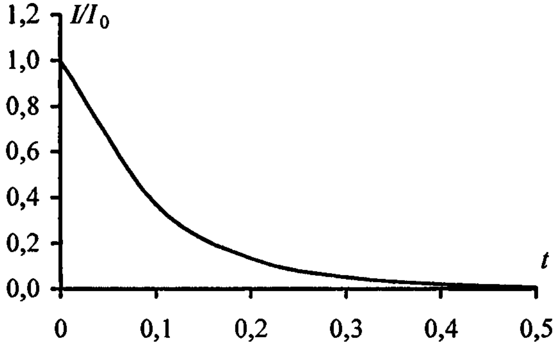
Решение:
Магнитный поток, создаваемый током I в катушке, связан с ее индуктивностью соотношением: $\Phi = LI$. При изменении тока на величину ΔI магнитный поток изменяется на $\Delta\Phi = L\Delta I$. По условию задачи $\Delta I = I - \frac{I}{n} = I\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, т. е. $\Delta\Phi = LI\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. С другой стороны, $\Delta\Phi = RI\Delta t$ (см. задачу 11.124), тогда $LI\left(1 - \frac{1}{n}\right) = RI\Delta t$ или, учитывая, что $\Delta t = t$, и преобразуя последнее выражение, $L - Rt = \frac{L}{n}$, откуда $n = \frac{L}{L - Rt} = 1{,}6$. Т. е. ток в катушке уменьшится в 1,6 раза.

11.128. Катушка имеет индуктивность $L = 0{,}144$ Гн и сопротивление $R = 10$ Ом. Через какое время t после включения в катушке потечет ток, равный половине установившегося?

Решение:
Имеем $t = \frac{L}{2R}$ (см. задачу 11.126). Подставляя числовые данные, получим $t = 7{,}2 \cdot 10^{-3}$ с.

11.129. Контур имеет сопротивление $R = 2$ Ом и индуктивность $L = 0{,}2$ Гн. Построить график зависимости тока I в контуре от времени t, прошедшего с момента включения в цепь э.д.с., для интервала $0 \le t \le 0{,}5$ с через каждую 0,1 с. По оси ординат откладывать отношение нарастающего тока I к конечному току I_0.

Решение:



Изменение потока магнитной индукции $d\Phi$ связано с изменением тока dI в цепи соотношением $d\Phi = LdI$. С другой стороны, $d\Phi = RIdt$ (см. задачу 11.124). Отсюда $LdI = RIdt$ или $\frac{dI}{I} = \frac{R}{L}dt$. Интегрируя полученное выражение, получим $\int\limits_{I}^{I_0} \frac{dI}{I} = \int\limits_{0}^{t} \frac{R}{L}dt$; $ln\frac{I_0}{I} = \frac{R}{L}t$. Отсюда $\frac{I_0}{I} = exp\left(\frac{R}{L}t\right)$ или $\frac{I}{I_0} = exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$. Подставляя числовые данные, получим $\frac{I}{I_0} = exp(-10t)$. Для заданного интервала t составим таблицу и построим график зависимости $\frac{I}{I_0}(t)$:

t, с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
I/I_0	1,000	0,368	0,135	0,050	0,018	0,007

11.130. Квадратная рамка из медной проволоки сечением $s = 1\,мм^2$ помещена в магнитное поле, индукция которого меняется по закону $B = B_0 \sin\omega t$, где $B_0 = 0{,}01$ Тл, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $T = 0{,}02$ с. Площадь рамки $S = 25\,см^2$. Плоскость рамки перпендикулярна к направлению магнитного поля. Найти зависимость от времени t и наибольшее значение: а) магнитного потока Φ, пронизывающего рамку; б) э.д.с. индукции ε, возникающей в рамке; в) тока I, текущего по рамке.

Решение:

Найдем угловую скорость вращения рамки. Имеем $\omega = \frac{2\pi}{T}$, подставляя числовое значение периода T, получим $\omega = 100\pi$. Магнитный поток, пронизывающий рамку, равен $\Phi = BS = B_0 S \sin\omega t$. Подставляя числовые данные, получим $\Phi = 25 \cdot 10^{-6} \sin 100\pi t$. Максимальное значение магнитного потока равно амплитуде и равно $\Phi_{max} = 25 \cdot 10^{-6}$ Вб. Э.д.с. индукции, возникающей в рамке равна $\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$. Дифференцируя магнитный поток Φ по времени t, получим $\varepsilon = 7{,}85 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$. Максимального значения э.д.с. достигнет при $\cos 100\pi t = 1$, т. е. $\varepsilon_{max} = 7{,}85 \cdot 10^{-3}$ В. Силу тока, текущего в рамке, можно найти по закону Ома $I = \frac{\varepsilon}{R}$. Найдем сопротивление R рамки. Имеем $R = \rho\frac{l}{s}$, где длина проволоки $l = 2\pi r = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi S}$. Отсюда $R = \rho\frac{2\sqrt{\pi S}}{s} = 3{,}1 \cdot 10^{-3}$ Ом. Тогда $I = 2{,}5 \cos 100\pi t$, а $I_{max} = 2{,}5$ А.

11.131. Через катушку, индуктивность которой $L = 21$ мГн, течет ток, изменяющийся со временем по закону $I = I_0 \sin\omega t$, где $I_0 = 5$ А, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $T = 0{,}02$ с. Найти зависимость от времени t: а) э.д.с. ε самоиндукции, возникающей в катушке; б) энергии W магнитного поля катушки.

Решение:

а) Э.д.с. самоиндукции определяется формулой $\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}$ — (1). По условию ток изменяется со временем по закону $I = I_0 \sin\omega t$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\varepsilon_c = -L\frac{d}{dt}(I_0 \sin\omega t) = -LI_0\omega\cos\omega t$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, тогда $\varepsilon_c = -33\cos 100\pi t$.

б) Магнитная энергия контура с током $W = \frac{LI^2}{2}$ или, с учетом (2), $W = \frac{LI_0^2 \sin^2\omega t}{2} = 0{,}263\sin^2 100\pi t$.

11.132. Две катушки имеют взаимную индуктивность $L_{12} = 5$ мГн. В первой катушке ток изменяется по закону $I = I_0 \sin\omega t$, где $I_0 = 10$ А, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $T = 0{,}02$ с. Найти зависимость от времени t э.д.с. ε_2, индуцируемой во второй катушке, и наибольшее значение ε_{2max} этой э.д.с.

Решение:

Зависимость э.д.с., индуцируемой во второй катушке, от времени (см. задачу 11.131): $\varepsilon_2 = -L_{12}\frac{dI}{dt} = -L_{12}I_0\omega\cos\omega t = -15{,}7\cos 100\pi t$. Э.д.с. индукции будет максимальной в том случае, когда $\cos\omega t = -1$, тогда $\varepsilon_{2max} = 15{,}7$ В.

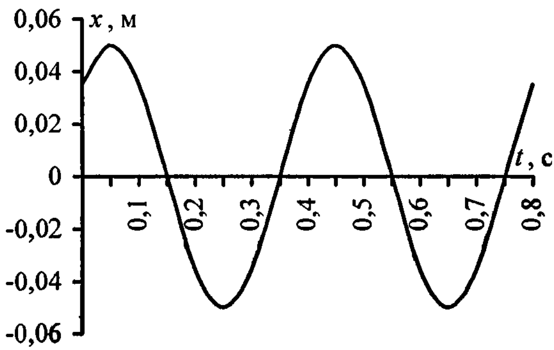
Глава IV
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§ 12. Гармоническое колебательное движение и волны

В задачах 12.43, 12.55 дан авторский вариант решения.

12.1. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 5\,\text{см}$, если за время $t = 1\,\text{мин}$ совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Начертить график этого движения.

Решение:



Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = 2\pi n = 2\pi \dfrac{N}{t}$. По условию $N = 150$, отсюда $\omega = 5\pi$. Подставляя числовые данные, получим уравнение данного колебания $x = 0{,}05\sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

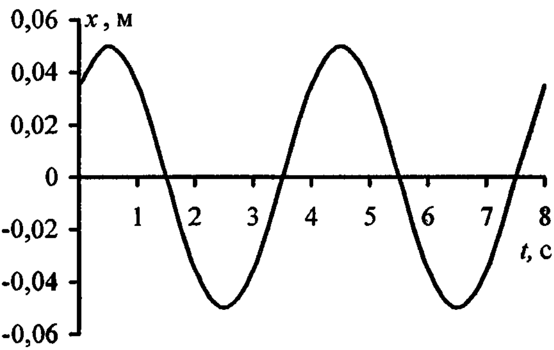
12.2. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 0{,}1$ м, периодом $T = 4$ с и начальной фазой $\varphi = 0$.

Решение:

Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Подставляя числовые данные, получим $x = 0{,}1\sin\dfrac{\pi}{2}t$.

12.3. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 50$ мм, периодом $T = 4$ с и начальной фазой $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Найти смещение x колеблющейся точки от положения равновесия при $t = 0$ и $t = 1{,}5$ с. Начертить график этого движения.

Решение:



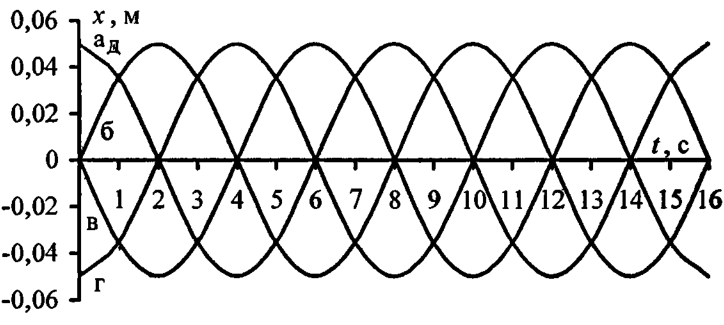
Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид: $x = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. В данных условиях

$x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда $x_1 = 0{,}05\,sin\frac{\pi}{4} = 0{,}035$; $x_2 = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1{,}5 + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

t, с	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x, м	0,035	0,050	0,035	0	–0,035	–0,050	–0,035	0,000	0,035

12.4. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 5$ см и периодом $T = 8$ с, если начальная фаза φ колебаний равна: а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) $\frac{3\pi}{2}$; д) 2π. Начертить график этого движения во всех случаях.

Решение:



Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\,sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Подставим числовые данные. Уравнение гармонического колебательного движения будет иметь вид:

а) $x = 0{,}05\,sin\frac{\pi}{4}t$;

б) $x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}05\,cos\frac{\pi}{4}t$;

в) $x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi\right) = -0{,}05\,sin\frac{\pi}{4}t$;

г) $x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{3\pi}{2}\right) = -0{,}05\,cos\frac{\pi}{4}t$;

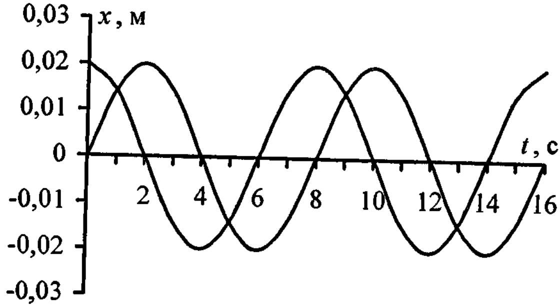
д) $x = 0{,}05\,sin\frac{\pi}{4}t$.

12.5. Начертить на одном графике два гармонических колебания с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2 = 2$ см и одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 8$ с, но имеющие разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$, равную: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) 2π.

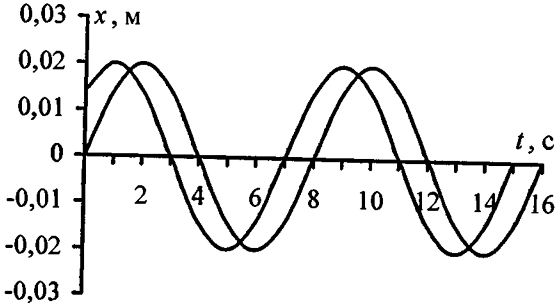
Решение:

Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\,sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Пусть начальная фаза первого колебания $\varphi_1 = 0$, тогда его уравнение будет иметь вид: $x = 0{,}02\,sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$. Подставляя числовые данные, для второго колебания получим:

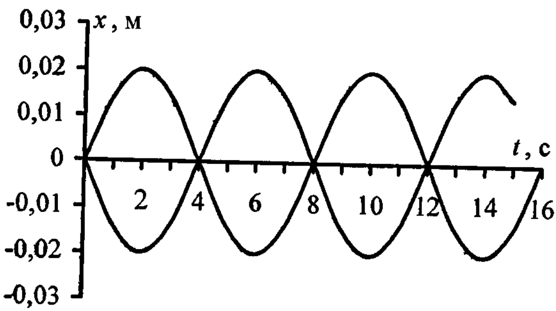
а) $x = 0{,}02\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$;



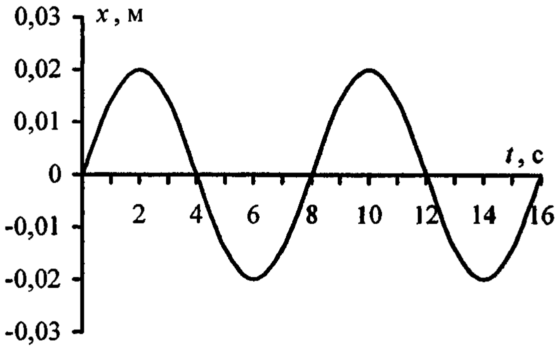
б) $x = 0{,}02\,sin\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{2}\right)$;



в) $x = 0{,}02\,sin\left(\dfrac{\pi}{4}t + \pi\right)$;



г) $x = 0{,}02\,sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$.



12.6. Через какое время от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний $T = 24$ с, начальная фаза $\varphi = 0$.

Решение:

Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид: $x = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Подставляя числовое значение периода T и начальной фазы φ, получим $x = A\,sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. По условию $x = \frac{A}{2}$, отсюда $0{,}5 = sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, $\frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{6}$ или $t = 2$ с.

12.7. Начальная фаза гармонического колебания $\varphi = 0$. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости?

Решение:

Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Скорость точки, совершающей колебания, $v = \frac{dx}{dt}$; $v = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Максимальной скорости точка достигнет при $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 1$. Т. е. $v_{max} = \frac{2\pi}{T}A$.

По условию $v = \frac{v_{max}}{2}$, тогда $\frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{\pi}{T}A$;

$\cos\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}$; $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{3}$; $t = \frac{T}{6}$.

12.8. Через какое время от начала движения точка, совершающая колебательное движение по уравнению $x = 7\sin\frac{\pi}{2}t$, проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

Решение:

По условию точка совершает гармоническое колебательное движение по закону $x = 7\sin\frac{\pi}{2}t$. Сопоставляя это уравнение с общим уравнением гармонических колебаний $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$, находим, что период колебаний $T = 4$ с. За время равное периоду колебаний точка совершает одно полное колебание, а прохождение пути от положения равновесия до максимального смещения составляет время $t = \frac{T}{4} = 1$ с.

12.9. Амплитуда гармонического колебания $A = 5$ см, период $T = 4$ с. Найти максимальную скорость v_{max} колеблющейся точки и ее максимальное ускорение a_{max}.

Решение:

Скорость и ускорение точки, совершающей колебания, определяется соотношениями $v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ и $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Они имеют максимальные значения соответственно при равенстве синуса и косинуса ± 1, т. е. $v_{max} = \frac{2\pi}{T} A = 7{,}85 \cdot 10^{-2}$ м/с и $a_{max} = \left| -\frac{4\pi^2}{T^2} A \right| = 0{,}12$ м/с^2.

12.10. Уравнение движения точки дано в виде $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Найти период колебаний T, максимальную скорость v_{max} и максимальное ускорение a_{max} точки.

Решение:

Сопоставим уравнение движения точки $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ с общим уравнением гармонических колебаний $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Тогда амплитуда колебаний $A = 2$ см, а период колебаний $T = 4$ с. Максимальная скорость и максимальное ускорение (см. задачу 12.9) $v_{max} = \frac{2\pi}{T} A = 3{,}14 \cdot 10^{-2}$ м/с и $a_{max} = \frac{4\pi^2}{T^2} A = 4{,}93 \cdot 10^{-2}$ м/с.

12.11. Уравнение движения точки дано в виде $x = \sin\frac{\pi}{6}t$. Найти моменты времени t, в которые достигаются максимальная скорость и максимальное ускорение.

Решение:

Скорость точки $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t$. Максимального значения она достигает при $\cos\frac{\pi}{6}t = \pm 1$ или $\frac{\pi}{6}t = n\pi$, где $n = 0$, 1, 2, 3... Соответствующие моменты времени $t = 0$, 6, 12, 18 с ... Ускорение точки $a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{36}\sin\frac{\pi}{6}t$ будет максимальным при $\sin\frac{\pi}{6}t = 1$ или $\frac{\pi}{6}t = \frac{(2n+1)\pi}{2}$. Отсюда найдем моменты времени t, соответствующие максимальному ускорению: $t = 3$, 9, 15 с ...

12.12. Точка совершает гармоническое колебание. Период колебаний $T = 2$ с, амплитуда $A = 50$ мм, начальная фаза $\varphi = 0$. Найти скорость v точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия $x = 25$ мм.

Решение:

Уравнение колебания точки имеет вид: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, откуда $t = \frac{\arcsin(x/A)}{2\pi/T} = \frac{1}{6}$ с. Скорость точки $v = \frac{dx}{dt}$; $v = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Подставив полученное значение t, получим $v = 13{,}6$ см/с.

12.13. Написать уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки $a_{max} = 49{,}3$ см/с^2, период колебаний $T = 2$ с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени $x_0 = 25$ мм.

Решение:

Из уравнения для максимального ускорения (см. задачу 12.9) $a_{max} = \frac{4\pi^2 A}{T^2}$ найдем амплитуду колебаний $A = \frac{a_{max} T^2}{4\pi^2} = 5$ см. Подставив значения амплитуды и периода в уравнение гармонических колебаний, получим $x = 5\,sin(\pi t + \varphi_0)$ — (1). Начальную фазу колебаний найдем из условия, что при $t = 0$ $x = x_0$. Тогда уравнение (1) примет вид: $x_0 = 5\,sin\,\varphi_0$, откуда $sin\,\varphi_0 = \frac{x_0}{5}$ и $\varphi_0 = arcsin\frac{x_0}{5} = \frac{\pi}{6}$. Подставляя начальную фазу в уравнение (1), окончательно получаем $x = 5\,sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

12.14. Начальная фаза гармонического колебания $\varphi = 0$. При смещении точки от положения равновесия $x_1 = 2{,}4$ см скорость точки $v_1 = 3$ см/с, а при смещении $x_2 = 2{,}8$ см ее скорость $v_2 = 2$ см/с. Найти амплитуду A и период T этого колебания.

Решение:

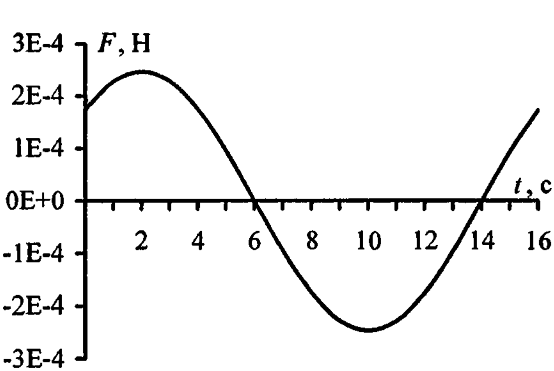
Т. к. по условию начальная фаза $\varphi = 0$, то уравнения для смещения и скорости будут иметь следующий вид: $x = A\,sin\frac{2\pi}{T}t$ — (1) и $v = \frac{2\pi}{T}A\,cos\frac{2\pi}{T}t$ — (2). Из уравнения (1) находим $sin\frac{2\pi}{T}t = \frac{x}{A}$ или $cos\frac{2\pi}{T}t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$ —

(3). Подставляя (3) в (2), получаем $v = \frac{2\pi}{T} A\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$ или $v^2 = \frac{4\pi^2 A^2}{T^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(A^2 - x^2\right)$. Для заданных значений смещения и скорости получаем $v_1^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(A^2 - x_1^2\right)$ — (4) и $v_2^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(A^2 - x_2^2\right)$ — (5). Разделим (4) на (5), тогда $\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{A^2 - x_1^2}{A^2 - x_2^2}$ или $v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2 = \left(v_1^2 - v_2^2\right)A^2$. Отсюда $A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 3{,}1$ см.

Из уравнения (4) период колебаний $T = \frac{2\pi}{v_1}\sqrt{A^2 - x_1^2} = 4{,}1$ с.

12.15. Уравнение колебания материальной точки массой $m = 16$ г имеет вид $x = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$ м. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) силы F, действующей на точку. Найти максимальную силу F_{max}.

Решение:



Т. к. уравнение колебания имеет вид $x = 0{,}1 sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$, то ускорение при колебательном движении $a = \frac{d^2x}{dt^2} = $ $= 0{,}1\frac{\pi^2}{64} sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Сила, под действием которой точка массой m совершает гармоническое колебание, $F = ma = 0{,}1m\frac{\pi^2}{64} sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Эта сила будет максимальной, когда $sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда $t_{max} = 2$ с. Тогда $F_{max} = 0{,}1m\frac{\pi^2}{64} = 246$ мкН. Для построения графика необходимо также найти пересечение с осью абсцисс $sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, откуда $t_0 = 6$ с. Подставляя числовые данные, построим график зависимости в пределах одного периода.

12.16. Уравнение колебаний материальной точки массой $m = 10$ г имеет вид $x = 5 sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Найти максимальную силу F_{max}, действующую на точку, и полную энергию W колеблющейся точки.

Решение:

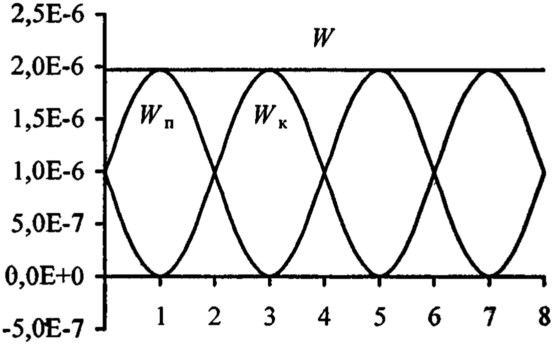
Т. к. уравнение колебаний имеет вид $x = 5 sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$ — (1), то ускорение при колебательном движении $a = \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{\pi^2}{25} sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда максимальная сила, действующая на точку (см. задачу 12.15),

$F_{max} = m\dfrac{\pi^2}{5} = 197$ мкН. Кинетическая энергия материальной точки равна $W_к = \dfrac{mv_x^2}{2} = \dfrac{kA^2\omega^2 cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$. Потенциальная энергия материальной точки равна $W_п = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{kA^2 sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$, а т. к. $k = m\omega^2$, то $W_п = \dfrac{m\omega^2 A^2 sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$. При этом за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбирается положение равновесия ($x = 0$). Полная энергия колеблющейся точки $W_0 = W_k + W_n = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}$ или, с учетом $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, имеем $W = \dfrac{2\pi^2 m}{T^2}A^2$ — (2). Из уравнения (1) амплитуда $A = 5$ см и период $T = 10$ с, подставляя их в уравнение (2), получаем $W = 4{,}93$ мкДж.

12.17. Уравнение колебания материальной точки массой $m = 16$ г имеет вид $x = 2 sin\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ см. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергии точки.

Решение:

Уравнения для кинетической и потенциальной энергии колеблющейся точки имеют следующий вид: $W_к = \dfrac{\omega^2 m}{2} \times$ $\times A^2 cos^2(\omega t + \varphi)$ и $W_п = \dfrac{\omega^2 m}{2} A^2 sin^2(\omega t + \varphi)$. Полная энергия колеблющейся точки $W = \dfrac{\omega^2 m}{2} A^2$ (см. задачу 12.16).



По условию $A = 2$ см, $\omega = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Подставляя числовые данные, получим $W_к = 2\pi^2 \cdot 10^{-7} \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ Дж; $W_п = 2\pi^2 \cdot 10^{-7} \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ Дж; $W = 2\pi^2 \cdot 10^{-7}$ Дж.

12.18. Найти отношение кинетической $W_к$ энергии точки, совершающей гармоническое колебание, к ее потенциальной энергии $W_п$ для моментов времени: а) $t = \dfrac{T}{12}$; б) $t = \dfrac{T}{8}$; в) $t = \dfrac{T}{6}$. Начальная фаза колебаний $\varphi = 0$.

Решение:

Т. к. по условию начальная фаза колебаний $\varphi = 0$, то уравнения для кинетической и потенциальной энергии колеблющейся точки имеют следующий вид: $W_к = \dfrac{2\pi^2 m}{T^2} A^2 \cos^2 \dfrac{2\pi}{T} t$ и $W_п = \dfrac{2\pi^2 m}{T^2} A^2 \sin^2 \dfrac{2\pi}{T} t$. Тогда отношение энергии $\dfrac{W_к}{W_п} = \dfrac{\cos^2(2\pi t / T)}{\sin^2(2\pi t / T)} = ctg^2(2\pi t / T)$.

а) Если $t=\frac{T}{12}$, то $\frac{W_к}{W_п}=ctg^2\frac{\pi}{6}=3$. б) Если $t=\frac{T}{8}$, то $\frac{W_к}{W_п}=ctg^2\frac{\pi}{4}=1$. в) Если $t=\frac{T}{6}$, то $\frac{W_к}{W_п}=ctg^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}$.

12.19. Найти отношение кинетической энергии $W_к$ точки, совершающей гармоническое колебание, к ее потенциальной энергии $W_п$ для моментов, когда смещение точки от положения равновесия составляет: а) $x=\frac{A}{4}$; б) $x=\frac{A}{2}$; в) $x=A$, где A — амплитуда колебаний.

Решение:

Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид $x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$. Отсюда $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)=\frac{x}{A}$, или из основного тригонометрического тождества $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)=\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$. Тогда отношение кинетической энергии к потенциальной (см. задачу 12.18) $\frac{W_к}{W_п}=\frac{\cos^2((2\pi t/T)+\varphi)}{\sin^2((2\pi t/T)+\varphi)}=\frac{A^2-x^2}{x^2}$. а) Если $x=\frac{A}{4}$, то $\frac{W_к}{W_п}=15$. б) Если $x=\frac{A}{2}$, то $\frac{W_к}{W_п}=3$. в) Если $x=A$, то $\frac{W_к}{W_п}=0$.

12.20. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W=30$ мкДж; максимальная сила, действующая на тело, $F_{max}=1{,}5$ мН. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний $T=2$ с и начальная фаза $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Решение:

Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W=\frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2$ — (1), а максимальная сила, действующая на тело, $F_{max}=\frac{4\pi^2 m}{T^2}A$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{W}{F_{max}}=\frac{A}{2}$, отсюда амплитуда колебаний $A=\frac{2W}{F_{max}}=0{,}04$ м. Подставляя амплитуду колебаний, период колебаний и начальную фазу в общее уравнение гармонических колебаний $x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$, окончательно получаем $x=0{,}04\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$.

12.21. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A=2$ см, полная энергия колебаний $W=0{,}3$ мкДж. При каком смещении x от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F=22{,}5$ мкН?

Решение:

Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W=\frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2$ — (1), а сила, действующая на тело, $F=\frac{4\pi^2 m}{T^2}x$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{W}{F}=\frac{A^2}{2x}$, отсюда смещение точки от положения равновесия $x=\frac{A^2F}{2W}=1{,}5$ см.

12.22. Шарик, подвешенный на нити длиной $l = 2$ м, отклоняют на угол $\alpha = 4°$ и наблюдают его колебания. Полагая колебания незатухающими гармоническими, найти скорость шарика при прохождении им положения равновесия. Проверить полученное решение, найдя скорость шарика при прохождении им положения равновесия из уравнений механики.

Решение:

Уравнение колебательного движения шарика имеет вид: $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$ — (1). При малых отклонениях шарика от положения равновесия его амплитуда $A = l\sin\alpha \approx 0{,}14$ м. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}8$ с. Тогда уравнение (1) примет вид: $x = 0{,}14\sin\frac{2\pi}{2{,}8}t$ м. Момент времени $t = 0$ соответствует положению равновесия. Скорость шарика $v = \frac{dx}{dt} = \frac{0{,}14 \cdot 2\pi}{2{,}8}\cos\frac{2\pi}{2{,}8}t$ м/с. Максимального значения скорость достигает при прохождении шариком положения равновесия, т. е. $v_{max} = \frac{0{,}14 \cdot 2\pi}{2{,}8} = 0{,}31$ м/с. Решая данную задачу по законам механики, имеем $v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$ (см. задачу 2.108). Подставляя числовые данные, получим $v = 0{,}31$ м/с.

12.23. К пружине подвешен груз массой $m = 10$ кг. Зная, что пружина под влиянием силы $F = 9{,}8$ Н растягивается на $l = 1{,}5$ см, найти период T вертикальных колебаний груза.

Решение:

По закону Гука сила упругости $F = -kx$ (знак «минус» говорит о том, что F — возвращающая сила), откуда $k = \frac{|F|}{x}$ — (1) — коэффициент жесткости пружины.

Уравнение второго закона Ньютона для груза имеет вид $m\ddot{x} = -kx$ — (2). Введя обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, преобразуем уравнение (2) следующим образом: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Величина $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ — циклическая частота колебаний, отсюда период колебаний вертикального пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (3). Подставляя (1) в (3), окончательно получим $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F}} = 0{,}78$ с.

12.24. К пружине подвешен груз. Максимальная кинетическая энергия колебаний груза $W_{\text{к}max} = 1$ Дж. Амплитуда колебаний $A = 5$ см. Найти жесткость k пружины.

Решение:

Кинетическая энергия колебаний груза $W_{\text{к}} = \frac{2\pi^2 m}{T^2} \times A^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ имеет максимальное значение, когда $\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 1$, т. е. $W_{\text{к}max} = \frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2$ — (1). Период колебаний груза на пружине $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (2). Возведя (2) в квадрат и подставив в (1), получим $W_{\text{к}max} = \frac{2\pi^2 m}{4\pi^2 m} \times A^2 k = \frac{1}{2}A^2 k$. Откуда найдем жесткость пружины $k = \frac{2W_{\text{к}max}}{A^2} = 800$ Н/м.

12.25. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному их соединению?

Решение:

Сила упругости пружины по закону Гука $F = kx$. Если к пружине подвесить груз массой m, то в положении равновесия $mg = kx$, отсюда удлинение пружины $x = \frac{mg}{k}$. Если две пружины соединить последовательно, то их удлинения будут равны, а общее удлинение составит $x_2 = 2x = \frac{2mg}{k}$ — (1). С другой стороны, $x_2 = \frac{mg}{k_1}$ — (2), отсюда, приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{2mg}{k} = \frac{mg}{k_1}$ или $k_1 = \frac{k}{2}$. При параллельном соединении пружин общая жесткость системы $k_2 = 2k$. Таким образом, периоды колебаний при последовательном и параллельном соединении пружин соответственно равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$, а их отношение $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{4} = 2$.

12.26. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить вместо медного шарика алюминиевый такого же радиуса?

Решение:

Периоды колебаний медного и алюминиевого шариков соответственно равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$, а их отношение $\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$. Т. к. по условию радиусы шариков равны, то равны и их объемы, а значит, $\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$, где $\rho_1=8{,}6\cdot10^3\,кг/м^3$ и $\rho_2=2{,}6\cdot10^3\,кг/м^3$ — плотности меди и алюминия, тогда $\frac{T_1}{T_2}=1{,}82$.

12.27. К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период вертикальных колебаний $T_1=0{,}5\,с$. После того как на чашку весов положили еще добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равным $T_2=0{,}6\,с$. На сколько удлинилась пружина от прибавления этого добавочного груза?

Решение:

Имеем $T_1=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (1); $T_2=2\pi\sqrt{\frac{(m+\Delta m)}{k}}$ — (2). Возведя (1) и (2) в квадрат, а затем вычтя (1) из (2), получим $T_2^2-T_1^2=4\pi^2\frac{\Delta m}{k}$. Жесткость пружины $k=\frac{F}{\Delta l}=\frac{\Delta mg}{\Delta l}$. Тогда $T_2^2-T_1^2=4\pi^2\frac{\Delta l}{g}$, откуда $\Delta l=\frac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2-T_1^2\right)=0{,}027\,м$.

12.28. К резиновому шнуру длиной $l=40\,см$ и радиусом $r=1\,мм$ подвешена гиря массой $m=0{,}5\,кг$. Зная, что модуль Юнга резины $E=3\,МН/м^2$, найти период T вертикальных колебаний гири. Указание: учесть, что жесткость k резины связана с модулем Юнга E соотношением $k=\frac{SE}{l}$, где S — площадь поперечного сечения резины, l — ее длина.

Решение:

Жесткость пружины связана с модулем Юнга соотношением $k = \frac{SE}{l}$ — (1). Период колебаний гири $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{SE}}$ — (3). Площадь поперечного сечения шнура $S = \pi r^2$ — (4), тогда, подставляя (4) в (3), окончательно находим $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\pi r^2 E}} = 0{,}93$ с.

12.29. Ареометр массой $m = 0{,}2$ кг плавает в жидкости. Если погрузить его немного в жидкость и отпустить, то он начнет совершать колебания с периодом $T = 3{,}4$ с. Считая колебания незатухающими, найти плотность жидкости ρ, в которой плавает ареометр. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра $d = 1$ см.

Решение:

На плавающий ареометр действуют сила Архимеда $\bar{F}_А$, направленная вверх, и сила тяжести $\bar{P}$, направленная вниз. Условие равновесия имеет вид: $\bar{P} + \bar{F}_А = 0$ или в скалярном виде $P = F_А$ — (1). Имеем $P = mg$; $F_А = \rho g(V + Sh)$, где V — объем ареометра (без трубки), S — площадь поперечного сечения трубки ареометра, h — длина трубки. Тогда $mg = \rho g(V + Sh)$. При погружении ареометра на глубину x результирующая выталкивающая сила $F = \rho g(V + S(h + x)) - mg$; $F = \rho g(V + S(h + x)) - \rho g(V + Sh)$; $F = \rho gSx$. Эта сила и вызывает колебания ареометра, т. е. можно записать $F = -kx$, где $k = \rho gS = \rho g\frac{\pi d^2}{4}$ — (2).

Уравнение второго закона Ньютона для ареометра имеет вид $m\ddot{x} = -kx$ — (3). Введя обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, преобразуем уравнение (3) следующим образом: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Величина $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ — циклическая частота колебаний, отсюда период данных колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (4). Подставляя (2) в (4), получим $T = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$, откуда $\rho = \frac{16\pi m}{T^2 d^2 g} = 0{,}89 \cdot 10^3$ кг/м^3.

12.30. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебательных движений с одинаковым периодом $T = 8$ с и одинаковой амплитудой $A = 0{,}02$ м. Разность фаз между этими колебаниями $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.

Решение:

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ и с начальной фазой, определяемой уравнением $tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$, где A_1 и A_2 — амплитуды слагаемых колебаний, φ_1 и φ_2 — их начальные фазы. Подставляя числовые данные, получим $A = \sqrt{2\cdot(0{,}02)^2 + 2(0{,}02)^2\cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}037$ м;

$\varphi = arctg\dfrac{sin(\pi/4)}{1+cos(\pi/4)} = \dfrac{\pi}{8}$; $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{4}$. Отсюда уравнение результирующего движения $x = 0{,}037\,cos\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

12.31. Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1 = 0{,}02 \times \times sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ м и $x_2 = 0{,}03\,sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ м.

Решение:

Из уравнений колебаний $x_1 = 0{,}02\,sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $x_2 = 0{,}03\,sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ находим амплитуды колебаний $A_1 = 0{,}02$ м и $A_2 = 0{,}03$ м и их начальные фазы $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$. При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 1A_1A_2\,cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0{,}045$ м. Начальная фаза колебания определяется из уравнения $tg\varphi = \dfrac{A_1\,sin\,\varphi_1 + A_2\,sin\,\varphi_2}{A_1\,cos\,\varphi_1 + A_2\,cos\,\varphi_2} = 1{,}94$. Тогда $\varphi = arctg1{,}94 = 62{,}75°$.

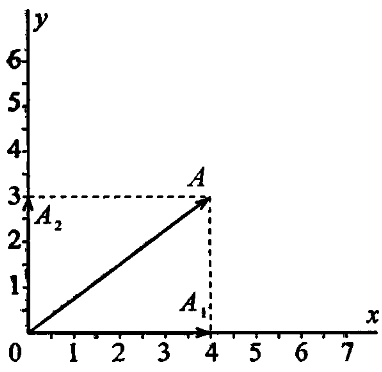
12.32. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний.

Решение:

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+1A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$ — (1). Т. к. по условию $A_1=A_2=A$, то уравнение (1), возведенное в квадрат, примет вид $A^2=A^2+A^2+2A^2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$, откуда $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-\frac{1}{2}$. Тогда разность фаз складываемых колебаний $\varphi_2-\varphi_1=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=120°=\frac{2\pi}{3}$.

12.33. Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1=4\sin\pi t$ см и $x_2=\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$ см. Написать уравнение результирующего колебания. Дать векторную диаграмму сложения амплитуд.

Решение:



Из уравнения колебаний $x_1=4\sin\pi t$ и $x_2=3\times$ $\times\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$ находим амплитуды колебаний $A_1=$ $=4$ см и $A_2=3$ см и их начальные фазы $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$. Амплитуда и фаза результирующего колебания (см. задачу 12.31)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 5 \text{ см},$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = 0{,}73, \text{ следовательно,}$$

$\varphi = arctg 0{,}73 = \frac{\pi}{5}$. Тогда уравнение результирующего колебания будет иметь вид $x = 5\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$. Для построения векторной диаграммы отложим от начала отсчета векторы, длины которых равны амплитудам A_1 и A_2. Т. к. $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, то оба вектора лежат на осях координат. Сложив векторы по правилу параллелограмма, получим вектор амплитуды результирующего колебания.

12.34. На рис. 1 дан спектр результирующего колебания. Пользуясь данными этого рисунка, написать уравнения колебаний, из которых составлено результирующее колебание. Начертить график этих колебаний. Принять, что в момент $t = 0$ разность фаз между этими колебаниями $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Начертить график результирующего колебания.

Решение:

По спектру сложного колебания найдем амплитуду и частоту каждого из составляющих колебаний. Имеем: $A_1 = 0{,}03$ м; $\nu_1 = 0{,}2$ Гц; $A_2 = 0{,}02$ м; $\nu_2 = 0{,}5$ Гц; $A_3 = 0{,}01$ м; $\nu_3 = 1$ Гц.

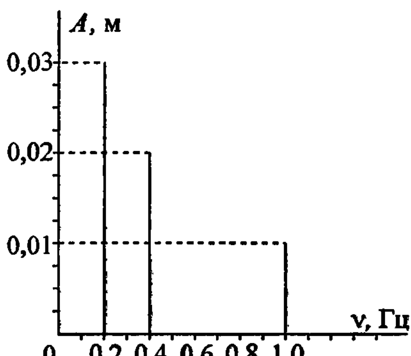


Рис. 1

Тогда уравнения этих колебаний будут иметь вид $x = 0{,}03\sin\frac{2\pi}{5}t$ м ; $x = 0{,}02\sin\pi t$ м ; $x = 0{,}01\sin 2\pi t$ м. Составим таблицу значений $x = f(t)$ для данных колебаний и построим их графики (рис.2). Затем, сложив значения x, соответствующие одним и тем же значениям t, получим график результирующего колебания (рис.3).

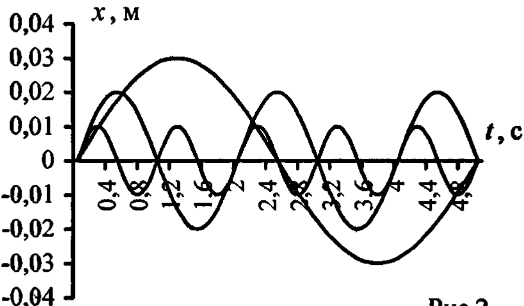


Рис.2

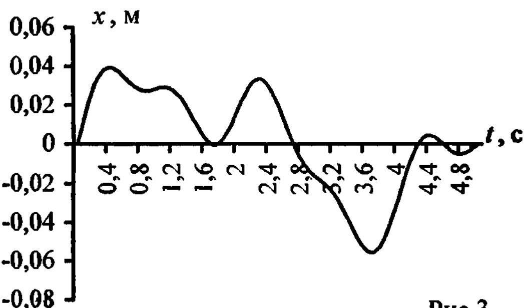


Рис.3

t, с	0	0,5	1	1,5	2	2,5
x_1, см	0,000	1,763	2,853	2,854	1,766	0,005
x_2, см	0,000	2,000	0,003	–2,000	–0,006	2,000
x_3, см	0,000	0,002	–0,003	0,005	–0,006	0,008
x, см	0,000	3,764	2,853	0,859	1,754	2,013

t, с	3	3,5	4	4,5	5
x_1, см	–1,759	–2,851	–2,856	–1,770	–0,010
x_2, см	0,010	–2,000	–0,013	2,000	0,016
x_3, см	–0,010	0,011	–0,013	0,014	–0,016
x, см	–1,759	–4,840	–2,881	0,244	–0,010

12.35. Уравнения двух гармонических колебаний имеют вид $x_1 = 3\sin 4\pi t$ см и $x_2 = 6\sin 10\pi t$ см. Построить график этих колебаний. Сложив графически эти колебания, построить график результирующего колебания. Начертить спектр результирующего колебания.

Решение:

Составим таблицу значений $x = f(t)$ для данных колебаний и построим их графики (рис.1). Затем, сложив значения x, соответствующие одним и тем же значениям t, получим график результирующего колебания (рис.2). Из уравнений колебаний найдем амплитуду и частоту каждого из них. Имеем: $A_1 = 0{,}03$ м ; $\nu_1 = 2$ Гц ; $A_2 = 0{,}06$ м ;

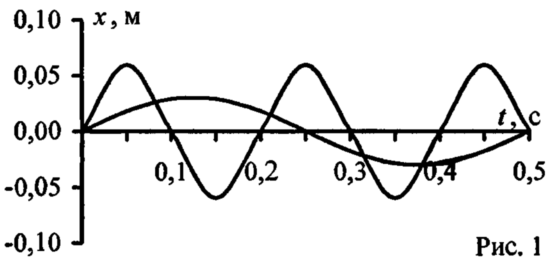


Рис. 1

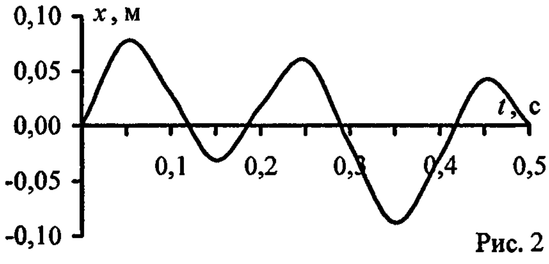


Рис. 2

$\nu_2 = 5$ Гц. По этим данным начертим спектр результирующего колебания (рис.3).

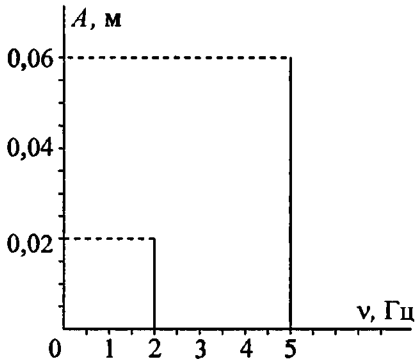


Рис. 3

12.36. Уравнение колебаний имеет вид $x = A\sin 2\pi\nu_1 t$, причем амплитуда A изменяется со временем по закону $A = A_0(1 + \cos 2\pi\nu_2 t)$. Из каких гармонических колебаний состоит колебание? Построить график слагаемых и результирующего колебаний для $A_0 = 4$ см, $\nu_1 = 2$ Гц, $\nu_2 = 1$ Гц. Начертить спектр результирующего колебания.

Решение:

По условию $x = A\sin 2\pi\nu_1 t$ — (1); $A = A_0(1 + \cos 2\pi\nu_2 t)$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим

$x = A_0(1 + \cos 2\pi\nu_2 t)\sin 2\pi\nu_1 t$;

$x = A_0 \sin 2\pi\nu_1 t + A_0 \cos 2\pi\nu_2 t \sin 2\pi\nu_1 t$;

$x = A_0 \sin 2\pi\nu_1 t + A_0 / 2 \sin(2\pi(\nu_1 - \nu_2)t) +$

$+ A_0 / 2 \sin(2\pi(\nu_1 + \nu_2)t)$. Т. е. данное колебание состоит из трех гармонических колебаний. Подставляя числовые данные, построим график слагаемых (рис.1), график результирующего колебания (рис.2) и начертим спектр результирующего колебания (рис.3).

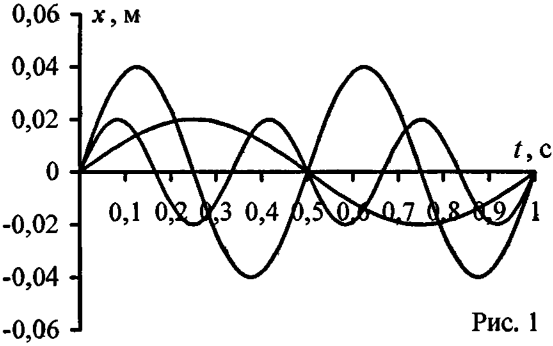


Рис. 1

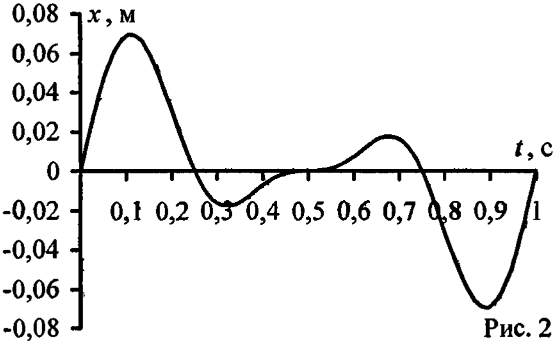


Рис. 2

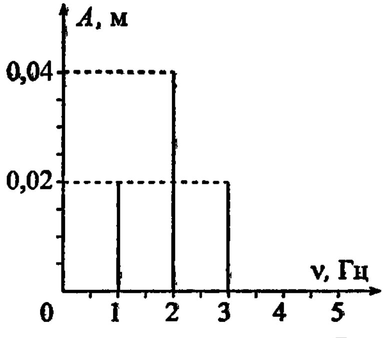


Рис. 3

12.37. Написать уравнение результирующего колебания, получающегося в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковой частотой $\nu_1 = \nu_2 = 5\,Гц$ и одинаковой начальной фазой $\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 0{,}10$ м и $A_2 = 0{,}05$ м.

Решение:

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинакового периода уравнение траектории результирующего колебания имеет вид $\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} - \dfrac{2xy}{A_1 A_2} \times$ $\times \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$ — (1). Т. к. у нас $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, то уравнение (1) примет вид $\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} - \dfrac{2xy}{A_1 A_2} = 0$, или $\left(\dfrac{x}{A_1} - \dfrac{y}{A_2}\right)^2 = 0$, откуда $y = \dfrac{A_2}{A_1}x$ — уравнение прямой линии. Таким образом, результирующее колебание будет происходить по прямой линии. Угол наклона прямой найдется из уравнения $tg\alpha = \dfrac{A_2}{A_1} = 0{,}5$, т. е. $\alpha = 26°34'$. Период результирующего колебания равен периоду слагаемых колебаний, а амплитуда результирующего колебания $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 11{,}2$ см. Следовательно, уравнение результирующего колебания имеет вид: $s = 11{,}2 \sin\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ см.

12.38. Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Найти амплитуду A результирующего колебания, если колебания совершаются: а) в одном направлении; б) в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Решение:

а) В случае сложения одинаково направленных колебаний амплитуда результирующего колебания $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$. Учитывая, что $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1$, найдем $A=0{,}07$ м. б) В случае сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний амплитуда результирующего колебания $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$; $A=0{,}05$ м.

12.39. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x=2\sin\omega t$ м и $y=2\cos\omega t$ м. Найти траекторию результирующего движения точки.

Решение:

Из уравнений колебаний $x=2\sin\omega t$ – (1) и $y=2\cos\omega t$ – (2) исключим время. Из уравнения (1) $\sin\omega t=\frac{x}{2}$, из основного тригонометрического тождества $\cos\omega t=$ $=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ — (3). Подставив (3) в (2), получаем $y=2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ или $y^2=4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=4-x^2$. Отсюда после преобразования получим уравнение окружности радиусом $R=2$ м, которое имеет вид $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$.

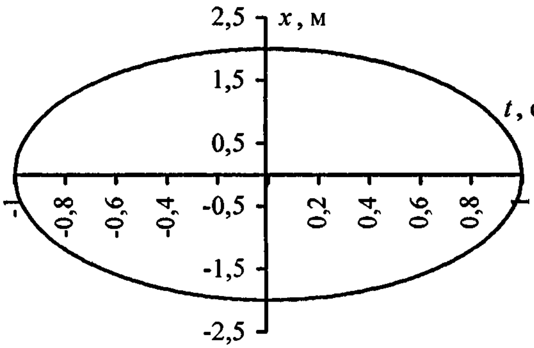
12.40. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x=\cos\pi t$ и $y=\cos\frac{\pi}{2}t$. Найти траекторию результирующего движения точки и начертить ее с нанесением масштаба.

Решение:

Имеем $y = cos\frac{\pi}{2}t = \sqrt{\frac{1+cos\,\pi\,t}{2}}$, откуда $2y^2 - 1 = cos\,\pi\,t$. По условию $x = cos\,\pi t$, отсюда $\frac{2y^2-1}{x} = 1$ или $2y^2 - x = 1$ — уравнение параболы.

12.41. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = sin\,\pi\,t$ и $y = 2\,sin\left(\pi\,t + \frac{\pi}{2}\right)$. Найти траекторию результирующего движения точки.

Решение:

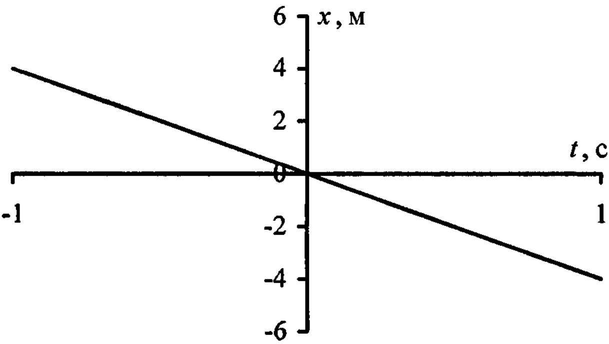


При сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движений материальной точки, описываемых уравнениями $x = a\,cos(\omega_0 t + \varphi_{01})$ и $y = b\,cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$, траектория результирующего движения материальной точки описывается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}cos\,\alpha = sin^2\alpha$, где разность фаз складываемых колебаний $\alpha = \varphi_{01} - \varphi_{02}$. У нас $a = 1$, $b = 2$ и $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

Подставляя числовые данные, получим $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$, т. е. траектория точки — эллипс.

12.42. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x=\sin\pi t$ и $y=4\sin(\pi t+\pi)$. Найти траекторию результирующего движения точки и начертить ее с нанесением масштаба.

Решение:

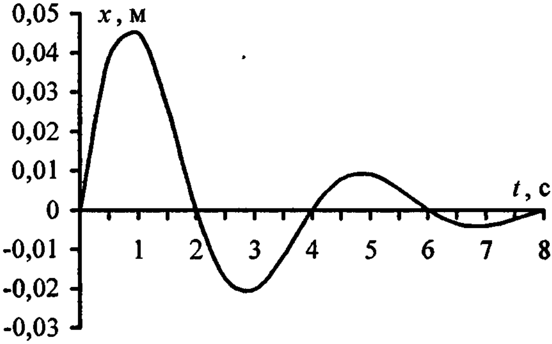


Из уравнений колебаний $x=\sin\pi t$ — (1); $y=4\sin(\pi t+\pi)$ — (2) исключим время. Для этого преобразуем уравнение (2), используя формулу синуса суммы: $\sin(\pi t+\pi)=\sin\pi t\cos\pi+$ $+\cos\pi t\sin\pi=-\sin\pi t$, т. к. $\cos\pi=-1$ и $\sin\pi=0$. Тогда уравнение (2) примет вид $y=-4\sin\pi t$ — (3). Подставляя (1) в (3), получаем уравнение траектории $y=-4x$, т. е. траекторией является прямая.

12.43. Период затухающих колебаний $T=4$ с; логарифмический декремент затухания $\aleph=1{,}6$; начальная фаза $\varphi=0$. При $t=\frac{T}{4}$ смещение точки $x=4{,}5$ см. Написать уравнение движения этого колебания. Построить график этого колебания в пределах двух периодов.

Решение:

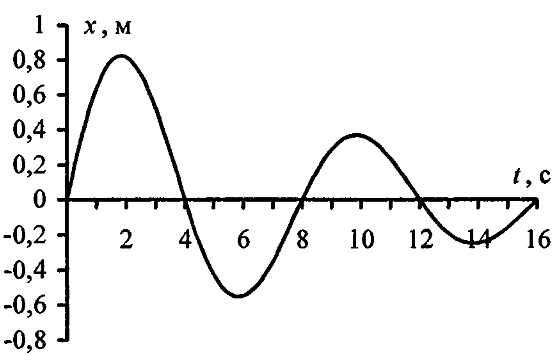
Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид $x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ — (1). Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$, откуда $\delta = \frac{\aleph}{T} = 0{,}4\ \text{с}^{-1}$. По условию $t = \frac{T}{4}$, т. е. $t = 1$ с. Зная значение x в этот момент времени, найдем амплитуду. Подставляя числовые данные, получим $A = 6{,}7$ м. Тогда уравнение движения имеет вид $x = 6{,}7e^{-0.4t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ — (2). Для построения графиков колебания найдем моменты времени t_1, t_2, t_3... соответствующие максимальным значениям смещения x. Максимум x найдется из условия $v = \frac{dx}{dt} = 0$. Из уравнения (1) находим (при $\varphi = 0$) $v = A\omega e^{-\delta t}\cos\omega t - A\delta e^{-\delta t}\sin\omega t = 0$, отсюда $tg\omega t = \frac{\omega}{\delta} = \frac{2\pi}{\aleph}$ — (3). Из уравнения (3) видно, что при незатухающих колебаниях, когда $\aleph = 0$, величина $tg\omega t = \infty$ или $\omega t = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{2}$, или $t = \frac{T}{4}$. В нашем же случае $tg\omega t = \frac{2\pi}{\aleph} = 3{,}925$, т. е. $\omega t = 75°42' \approx 0{,}421\pi$, откуда $t = 0{,}421\frac{\pi}{\omega} = 0{,}842$ с. Таким образом, $x = x_{max}$ при $t_1 = 0{,}842$ с; $t_2 = t_1 + \frac{T}{2} = 2{,}842$ с, $t_3 = t_1 + T = 4{,}842$ с и $t_4 = t_1 + \frac{3T}{2} = 6{,}842$ с и т.д. Подставляя соответствующие числовые значения в (2), получим $x_1 = 0{,}1$ см; $x_2 = 0{,}17$ см; $x_3 = 0{,}12$ см; $x_4 = 0{,}08$ см. По полученным данным построим график.



12.44. Построить график затухающего колебания, данного уравнением $x = 5e^{-0,1t}\,sin\dfrac{\pi}{4}t$ м.

Решение:

Подставляя значения t в интервале от 0 до $2T$, построим график данного колебания (см. задачу 12.43).



12.45. Уравнение затухающих колебаний дано в виде $x = 5e^{-0,25t}\sin\frac{\pi}{2}t$ м. Найти скорость v колеблющейся точки в моменты времени t, равные: 0, T, $2T$, $3T$ и $4T$.

Решение:

Скорость точки, совершающей колебания, в том числе затухающие, определяется соотношением $v = \frac{dx}{dt}$ — (1). По условию смещение $x = 5e^{-0,25t}\sin\frac{\pi}{2}t$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $v = \frac{d}{dt}\left(5e^{-0,25t}\sin\frac{\pi}{2}t\right)$; $v = 5e^{-0,25t}\times$ $\times\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t - 0,25\sin\frac{\pi}{2}t\right)$. Подставляя числовые данные, составим таблицу:

t, с	0	T	$2T$	$3T$	$4T$
v, м/с	7,85	2,89	1,06	0,39	0,15

12.46. Логарифмический декремент затухания математического маятника $\aleph = 0,2$. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника?

Решение:

По формулам для затухающих колебаний имеем $A_1 = A_0\exp\left(-\aleph\frac{t}{T}\right)$; $A_2 = A_0\exp\left(-\aleph\frac{t+T}{T}\right)$, откуда $\frac{A_1}{A_2} =$ $= e^{\aleph} = 1,22$.

12.47. Найти логарифмический декремент затухания $\aleph$ математического маятника, если за время $t = 1$ мин амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Длина маятника $l = 1$ м.

Решение:

По формулам для затухающих колебаний имеем $A_1 = A_0 \times \times exp\left(-\aleph \frac{t}{T}\right)$ — (1). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — (2). Из уравнения (1) с учетом (2) получаем $\frac{A_0}{A_1} = exp\left(\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (3). По условию $\frac{A_0}{A_1} = 2$, тогда из уравнения (3) получим $exp\left(\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right) = 2$ — (4). Прологарифмируем уравнение (4), тогда $\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = ln 2$, откуда логарифмический декремент затухания $\aleph = \frac{2\pi}{t}\sqrt{\frac{l}{g}} ln 2 = 0{,}023$.

12.48. Математический маятник длиной $l = 24{,}7$ см совершает затухающие колебания. Через какое время t энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента затухания: а) $\aleph = 0{,}01$; б) $\aleph = 1$.

Решение:

Для затухающих колебаний имеем $A_1 = A_0 exp\left(-\aleph \frac{t}{T}\right)$ или $\frac{A_0}{A_1} = exp\left(\frac{\aleph t}{T}\right)$ — (1). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\frac{A_0}{A_1} = exp\left(\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (3). Полная энергия колебаний

$W = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2$, и по условию $\frac{W_0}{W_1} = k$, где $k = 9{,}4$ раза, тогда $k = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2$ или, с учетом (3), $k = exp\left(\frac{\aleph t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (4). Прологарифмируем уравнение (4), тогда $ln\, k = \frac{\aleph t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$. Отсюда время, за которое энергия колебаний уменьшится в k раз, $t = \frac{\pi}{\aleph}\sqrt{\frac{l}{g}}\, ln\, k$ — (5). Подставляя в (5) значение логарифмического декремента затухания, находим: а) для $\aleph_1 = 0{,}01$ время $t_1 = 144$ с; б) для $\aleph_2 = 1$ время $t_2 = 1{,}14$ с.

12.49. Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания $\aleph = 0{,}2$. Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?

Решение:

Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид $x = Ae^{-\delta t} sin(\omega t + \varphi)$ — (1). Для нахождения ускорения маятника продифференцируем дважды по времени уравнение (1). Имеем: $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Ae^{-\delta t} sin(\omega t + \varphi)\right]$; $v = Ae^{-\delta t}\left[-\delta\, sin(\omega t + \varphi) + \omega\, cos(\omega t + \varphi)\right]$ — (2) — скорость колебаний маятника. Тогда $v = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \times$
$\times \left[Ae^{-\delta t}\left(-\delta\, sin(\omega t + \varphi) + \omega\, cos(\omega t + \varphi)\right)\right]$;
$v = Ae^{-\delta t}\left(\left(\delta^2 + \omega^2\right) sin(\omega t + \varphi) + \delta\omega\, cos(\omega t + \varphi)\right)$ — (3). Из уравнения (3) находим

$$\frac{a_0}{a} = \frac{-Ae^0\left[\left(\delta^2 + \omega^2\right) sin\,\varphi + \delta\,\omega\, cos\,\varphi\right]}{-Ae^{-\delta T}\left[\left(\delta^2 + \omega^2\right) sin(2\pi + \varphi) + \delta\,\omega\, cos(2\pi + \varphi)\right]};$$

$\frac{a_0}{a}=\frac{e^0}{e^{-\delta T}}=e^{\delta T}$ — (4). По определению логарифмический декремент затухания $\aleph=\delta T$ — (5), тогда, подставляя (5) в (4), окончательно получаем $\frac{a_0}{a}=e^{\aleph}=1{,}22$.

12.50. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $t=1$ мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время $t=3$ мин?

Решеине:

Отношение начальной и конечной амплитуд колебаний (см. задачу 12.48) $\frac{A_0}{A_1}=exp\left(\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (1).

Прологарифмируем уравнение $ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right)=\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$, отсюда время уменьшения амплитуды $t=\frac{2\pi}{\aleph}\sqrt{\frac{l}{g}}\,ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right)$.

Следовательно, $\frac{t_1}{t_2}=\frac{ln(A_0/A_1)}{ln(A_0/A_2)}$, отсюда $ln\frac{A_0}{A_2}=\frac{t_2}{t_1}ln\frac{A_0}{A_1}$, следовательно, $\frac{A_0}{A_2}=exp\left(\frac{t_2}{t_1}ln\frac{A_0}{A_1}\right)=8$.

12.51. Математический маятник длиной $l=0{,}5$ м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на $x_1=5$ см, а при втором (в ту же сторону) — на $x_2=4$ см. Найти время релаксации t, т. е. время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в e раз, где e — основание натуральных логарифмов.

Решение:

Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид $x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ — (1). Из уравнения (1) находим $\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^0 \sin\varphi}{Ae^{-\delta T}\sin(2\pi + \varphi)} = \frac{e^0}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$ — (2). По условию $e^{\delta t} = e$ — (3). Прологарифмировав уравнения (2) и (3), получаем $\delta T = \ln\frac{x_1}{x_2}$ — (4) и $\delta t = 1$ — (5). Разделив (4) на (5), имеем $\frac{T}{t} = \ln\frac{x_1}{x_2}$ или $t = \frac{T}{\ln(x_1/x_2)}$ — (6). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ — (7). Подставляя (7) в (6), находим время релаксации $t = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\ln(x_1/x_2)} = 6{,}44$ с.

12.52. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на $\Delta l = 9{,}8$ см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Каким должен быть коэффициент затухания δ, чтобы: а) колебания прекратились через время $t = 10$ с (считать условно, что колебания прекратились, если их амплитуда упала до 1% от начальной); б) груз возвращается в положение равновесия апериодически; в) логарифмический декремент затухания колебаний был равным $\aleph = 6$?

Решение:

а) По условию $\frac{A_1}{A_0} = 0{,}01 = 1\%$ — (1), где $A_0 = Ae^0$ — (2) и $A_1 = Ae^{-\delta t}$ — (3) — соответственно начальная и конечная амплитуда колебания груза на пружине. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $\frac{e^{-\delta t}}{e^0} = 0{,}01$ или $e^{\delta t} = 100$ — (4).

Логарифмируя уравнение (4), получаем $\delta t = ln100$, откуда коэффициент затухания $\delta = \dfrac{ln100}{t} = 0{,}46\,\text{с}^{-1}$.

б) В случае апериодического возвращения системы в положение равновесия коэффициент затухания $\delta = \omega_0$ — (1), где ω_0 — начальная циклическая частота колебаний. Поскольку (см. пункт в) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l}}$ — (2), то, подставляя (2) в (1), получаем $\delta = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l}} = 10\,\text{с}^{-1}$.

в) По определению логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (1), где $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ — (2) — период затухающих колебаний. Из (1) с учетом (2) коэффициент затухания $\delta = \dfrac{\aleph\omega}{2\pi}$ — (3). Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\delta = \dfrac{\aleph\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi}$ — (5). Поскольку колебания груза на пружине совершаются под действием двух сил: силы тяжести mg и силы упругости $F = k\Delta l$, где k — жесткость пружины, то в состоянии покоя $mg = k\Delta l$, откуда $\dfrac{m}{k} = \dfrac{\Delta l}{g}$ — (6). Начальный период колебания груза $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ или, с учетом (6), $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta l}{g}}$ — (7). Из формулы (2) начальная циклическая частота $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ или, с учетом (7), $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l}}$, тогда $\omega_0^2 = \dfrac{g}{\Delta l}$ — (8). Подставляя

(8) в (5), получаем $\delta = \dfrac{\aleph\sqrt{\dfrac{g}{\Delta l} - \delta^2}}{2\pi}$ — (9) и, возведя обе части уравнения (9) в квадрат, окончательно находим $\delta = \dfrac{\aleph}{\sqrt{4\pi^2 + \aleph^2}}\sqrt{\dfrac{g}{\Delta l}} = 6{,}98\ \text{с}^{-1}$.

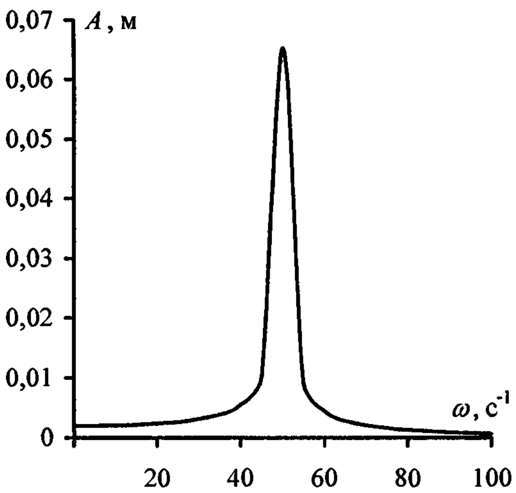
12.53. Тело массой $m = 10$ г совершает затухающие колебания с максимальной амплитудой $A_{max} = 7$ см, начальной фазой $\varphi = 0$ и коэффициентом затухания $\delta = 1{,}6\ \text{с}^{-1}$. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила F, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид $x = 5\sin\left(10\pi t - \dfrac{3\pi}{4}\right)$ см. Найти (с числовыми коэффициентами) уравнение собственых колебаний и уравнение внешней периодической силы.

Решение:

В случае, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону, колебания описываются дифференциальным уравнением $\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$, где δ — коэффициент затухания, ω_0 — собственная частота системы, ω — частота силы. Общее решение данного уравнения является уравнением собственных колебаний и имеет вид $x = A_0 e^{-\delta t}\sin\omega_0 t$. По условию сдвиг фаз между собственными и вынужденными колебаниями равен $-\dfrac{3\pi}{4}$, следовательно, $tg\varphi = \dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = tg\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$, отсюда $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\delta\omega}$. Подставляя числовые данные, получим $\omega_0 = 10{,}5\pi$. Тогда уравнение собственных колебаний примет вид $x = 0{,}07e^{-1{,}6t}\sin 10{,}5\pi t$ м. Уравнение внешней периодической силы имеет вид $F = F_0 \sin\omega t$. Максимальное значение внешней периодической силы $F_0 = Am\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2} = 72$ мН. Тогда уравнение внешней периодической силы будет иметь вид $F = 72\sin 10\pi t$ мН.

12.54. Гиря массой $m = 0{,}2$ кг, висящая на вертикальной пружине, совершает затухающие колебания с коэффициентом затухания $\delta = 0{,}75\ \text{с}^{-1}$. Жесткость пружины $k = 0{,}5$ кН/м. Начертить зависимость амплитуды A вынужденных колебаний гирьки от частоты внешней периодической силы, если известно, что максимальное значение внешней силы $F_0 = 0{,}98$ Н. Для построения графика найти значение A для частот: $\omega = 0$, $\omega = 0{,}5$, $\omega = 0{,}75$, $\omega = \omega_0$, $\omega = 1{,}5\omega_0$ и $\omega = 2\omega_0$, где ω_0 — частота собственных колебаний подвешенной гири.

Решение:



Период колебаний гири, висящей на вертикальной пружине, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (1). С другой стороны, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{\omega_0}$, тогда $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 50\,\text{c}^{-1}$ — (3). Амплитуда вынужденных колебаний $A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ — (4). Произведя расчет значений амплитуды по формуле (4), с учетом (3), строим график.

ω, c^{-1}	0	25	37.5	50	75	100
A, м	0,0020	0,0026	0,0045	0,0653	0,0016	0,0007

12.55. По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. По этой дороге покатили детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на $x_0 = 2$ см под действием груза массой $m_0 = 1$ кг. С какой скоростью v катили коляску, если от толчков на углублениях она, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Масса коляски $M = 10$ кг.

Решение:

Коляска начнет сильно раскачиваться, если промежуток между двумя последовательными толчками на углублениях будет равен периоду собственных колебаний коляски, который можно найти по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. На каждую рессору приходится масса $m = \frac{M}{2} = 5$ кг. Коэффициент упругости $k = \frac{m_0 g}{x_0} = 490$ Н/м. Подставляя числовые данные, получим $T = 0{,}63$ с. Кроме того, $T = \frac{l}{v}$, откуда $v = \frac{l}{T} = 0{,}48$ м/с.

12.56. Найти длину волны λ колебания, период которого $T = 10^{-14}$ с. Скорость распространения колебаний $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение:

По определению длина волны колебания $\lambda = cT = 3$ мкм.

12.57. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500$ Гц и амплитуду $A = 0{,}25$ мм, распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти скорость c распространения колебаний и максимальную скорость v_{max} частиц воздуха.

Решение:

По определению длина волны колебания $\lambda = cT$ — (1). Т. к. частота колебаний ν есть величина, обратная периоду, т. е. $\nu = \frac{1}{T}$ — (2), тогда, подставляя (2) в (1), получаем $\lambda = \frac{c}{\nu}$, откуда скорость распространения колебаний $c = \lambda\nu = 350$ м/с. Рассматривая частицы воздуха как материальные точки, запишем для скорости уравнение $v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Поскольку $v = v_{max}$, когда $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 1$, то $v_{max} = \frac{2\pi}{T} A$ или, с учетом (2), окончательно получим $v_{max} = 2\pi\nu A = 0{,}785$ м/с.

12.58. Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = 10 \sin\frac{\pi}{2}t$ см. Найти уравнение волны, если скорость распространения колебаний $c = 300$ м/с. Написать и изобразить графически уравнение колебания для точки, отстоящей на расстоянии

$l = 600$ м от источника колебаний. Написать и изобразить графически уравнение колебания для точек волны в момент времени $t = 4$ с после начала колебаний.

Решение:

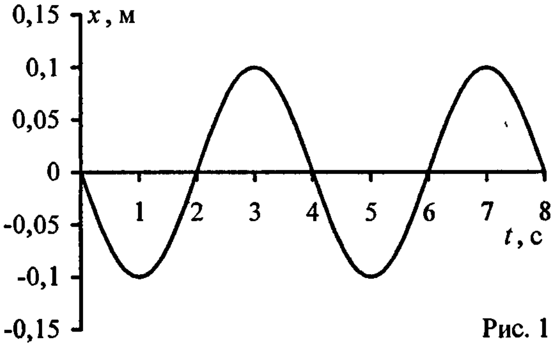


Рис. 1

При распространении незатухающих колебаний со скоростью c вдоль некоторого направления, называемого лучом, смещение любой точки, лежащей на луче и отстоящей от источника колебаний на расстоянии x, определяется выражением: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$ — (1), где A — амплитуда колеблющихся точек, $\lambda = cT$ — (2) — длина волны.

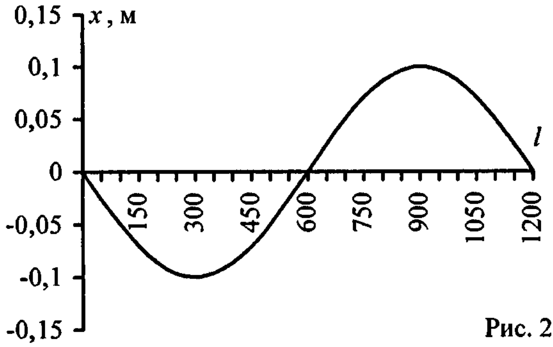


Рис. 2

Подставляя числовые данные в (1), с учетом (2), получим уравнение волны: $x = 0{,}1\,sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi l}{600}\right)$ м — (3). При $l = 600$ м уравнение (3) примет вид $x = 0{,}1\,sin\left(\frac{\pi}{2}t - \pi\right)$ м (рис.1), т. е. при $l = const$ получим $x = f(t)$ — смещение фиксированной точки, лежащей на луче, меняется со временем. При $t = 4$ с уравнение (3) примет вид $x = 0{,}1\,sin\left(2\pi - \frac{\pi l}{600}\right)$ м (рис.2), т. е. при $t = const$ получим $x = f(l)$ — различные точки, лежащие на луче, имеют различные смещения в данный момент времени.

12.59. Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = 4\,sin\,600\pi\,t$ см. Найти смещение x от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $l = 75$ см от источника колебаний, для момента времени $t = 0{,}01$ с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний $c = 300$ м/с.

Решение:

Имеем $x = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$ — (1) (см. задачу 12.58), где A — амплитуда колеблющихся точек, $\lambda = cT$ — (2) — длина волны. Т. к. по условию уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = 4\,sin\,600\pi\,t$ — (3), то, сопоставляя (1) и (3) и учитывая (2), окончательно получаем $x = 4\,sin\left(600\pi t - \frac{2\pi l}{cT}\right) = 4\,sin\left(600\pi t - 600\pi\frac{l}{c}\right) = 4$ см.

12.60. Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = sin\,2{,}5\pi\,t$ см. Найти смещение x от положения равновесия, скорость v и ускорение a точки, находящейся на расстоянии

$l = 20$ м от источника колебаний, для момента времени $t = 1$ с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний $c = 100$ м/с.

Решение:

Смещение точки от положения равновесия (см. задачу 12.59) определяется соотношением

$x = sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right) = 0$. Тогда скорость точки можно определить как $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right)\right]$;

$v = 2{,}5\,cos\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right)$; $v = 7{,}85$ см/с, а ее ускорение

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[2{,}5\,cos\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right)\right]$;

$a = -6{,}25\pi^2\,sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right) = 0$.

12.61. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, отстоящих от источника колебаний на расстояниях $l_1 = 10$ м и $l_2 = 16$ м. Период колебаний $T = 0{,}04$ с; скорость распространения $c = 300$ м/с.

Решение:

Две точки, лежащие на луче на расстояниях l_1 и l_2 от источника колебаний, имеют разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{l_2 - l_1}{\lambda}$ (1). Поскольку длина волны λ связана с периодом колебаний T и скоростью их распространения соотношением $\lambda = cT$ — (2), то, подставляя (2) в (1), окончательно получаем $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{l_2 - l_1}{cT} = \pi$, т. е. точки колеблются в противоположных фазах.

12.62. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих на расстоянии $l = 2$ м друг от друга, если длина волны $\lambda = 1$ м.

Решение:

Две точки, лежащие на луче на расстояниях l_1 и l_2 от источника колебаний, имеют разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{l_2 - l_1}{\lambda}$ — (1). В нашем случае $l = l_2 - l_1$ — (2), поэтому, подставляя (2) в (1), окончательно получаем $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{l}{\lambda} = 4\pi$, т. е. точки колеблются в одинаковых фазах.

12.63. Найти смещение x от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = \frac{\lambda}{12}$, для момента времени $t = \frac{T}{6}$. Амплитуда колебаний $A = 0{,}05$ м.

Решение:

При распространении незатухающих колебаний вдоль некоторого направления, называемого лучом, смещение любой точки, лежащей на луче и отстоящей от источника колебаний на расстоянии l, дается уравнением $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$. Подставляя исходные данные, получим $x = 0{,}05\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2{,}5$ см.

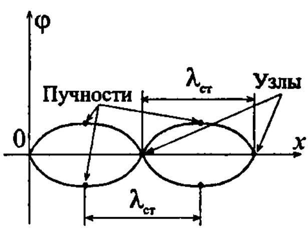
12.64. Смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = 4$ см, в момент времени $t = \frac{T}{6}$ равно половине амплитуды. Найти длину λ бегущей волны.

Решенне:

Смещение точки от положения равновесия (см. задачу 12.63) дается уравнением $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$. Подставляя исходные данные, получим $x = A\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda}\right) = \frac{A}{2}$, отсюда $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}$, следовательно, $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ или $\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Тогда окончательно $\lambda = 12l =$ $= 0{,}48$ м.

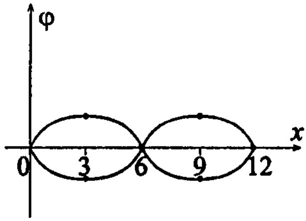
12.65. Найти положение узлов и пучностей и начертить график стоячей волны, если: а) отражение происходит от менее плотной среды; б) отражение происходит от более плотной среды. Длина бегущей волны $\lambda = 12$ см.

Решение:

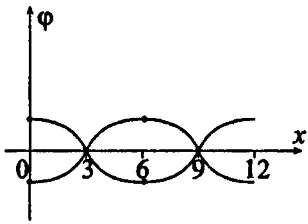


Стоячей называется волна, которая образуется в результате наложения двух бегущих синусоидальных когерентных волн, распространяющихся навстречу друг другу. В отличие от бегущей волны она состоит из узлов и пучностей, причем расстояние между двумя соседними узлами или пучностями есть величина постоянная, называемая длиной стоячей волны, $\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}$ — (1), где λ — длина бегущей волны. Подставляя значение λ в (1), получим $\lambda_{ст} = 6$ см.

а) Если отражение происходит от менее плотной среды, то положение узлов будет определяться из условия $x = (2n+1)\frac{\lambda_{ст}}{2}$ (2), где $n = 0,\ 1,\ 2...$ Подставляя в (2) значение n и $\lambda_{ст}$, получаем $x = 3,\ 9,\ 15$ см ... Положение пучностей будет определяться из условия $x = 2n\frac{\lambda_{ст}}{2} = n\lambda_{ст}$ — (3). Подставляя в (3) значение n и $\lambda_{ст}$, получаем $x = 0,\ 6,\ 12,\ 18$ см...



б) Если отражение происходит от более плотной среды, то узлы и пучности поменяются местами и положение узлов будет определяться из условия (3), т. е. $x = 0,\ 6,\ 12,\ 18$ см, а положение пучностей — из условия (2), т. е. $x = 3,\ 9,\ 15$ см...



12.66. Найти длину волны λ колебаний, если расстояние между первой и четвертой пучностями стоячей волны $l = 15$ см.

Решение:

Длина стоячей волны (см. задачу 12.65) $\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}$ — (1), где λ — длина волны колебаний. С другой стороны, $\lambda_{ст} = \frac{l}{n_1 - n_2}$ — (2), где n_1 и n_2 — порядковые номера пучностей. По условию $n_1 = 1$ и $n_2 = 4$, тогда, приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{\lambda}{2} = \frac{l}{3}$, откуда длина волны колебаний $\lambda = \frac{2l}{3} = 10\text{ см} = 0{,}1\text{ м}$.

§ 13. Акустика

В задачах данного раздела используются данные таблиц 11 и 12 приложения.

13.1. Найти длину волны λ основного тона ля (частота $\nu = 435$ Гц). Скорость распространения звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Решение:

Длина волны основного тона ля $\lambda = cT$ — (1), где T — период колебаний воздуха. Поскольку частота колебаний $\nu = \dfrac{1}{T}$ — (2), то, подставляя (2) в (1), получаем $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 0{,}78$ м.

13.2. Человеческое ухо может воспринимать звуки частотой приблизительно от $\nu_1 = 20$ Гц до $\nu_2 = 20000$ Гц. Между какими длинами волн лежит интервал слышимости звуковых колебаний? Скорость распространения звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Решение:

Длина волны звуковых колебаний (см. задачу 13.1) $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$. Интервал слышимости звуковых колебаний лежит между длинами волн $\lambda_1 = \dfrac{c}{\nu_1} = 17$ м и $\lambda_2 = \dfrac{c}{\nu_2} = 0{,}017$ м $= 17$ мм.

13.3. Найти скорость c распространения звука в стали.

Решение:

Скорость распространения акустических колебаний в некоторой среде определяется формулой $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, где E —

модуль Юнга среды, ρ — плотность среды. Для стали $E = 216$ ГПа и $\rho = 7{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, тогда скорость звука в стали $c_c = 5296$ м/с.

13.4. Найти скорость c распространения звука в меди.

Решенне:

Скорость распространения акустических колебаний в некоторой среде определяется формулой $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, где E — модуль Юнга среды, ρ — плотность среды. Для меди $E = 118$ ГПа и $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, тогда скорость звука в меди $c = 3704$ м/с.

13.5. Скорость распространения звука в керосине $c = 1330$ м/с. Найти сжимаемость β керосина.

Решение:

Модуль Юнга E связан со сжимаемостью β соотношением $\beta = \dfrac{1}{E}$, где $E = \rho c^2$. Отсюда $\beta = \dfrac{1}{\rho c^2} = 7{,}1 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$.

13.6. При помощи эхолота измерялась глубина моря. Какова была глубина моря, если промежуток времени между возникновением звука и его приемом оказался равным $t = 2{,}5$ с? Сжимаемость воды $\beta = 4{,}6 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, плотность морской воды $\rho = 1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:
Скорость распространения акустических колебаний в некоторой среде определяется формулой $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — (1). Модуль Юнга связан со сжимаемостью соотношением $E=\frac{1}{\beta}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $c_e=\sqrt{\frac{1}{\rho\beta}}$, тогда глубина моря $h=\frac{c_e t}{2}=\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{\rho\beta}}=1815\text{ м}$.

13.7. Найти скорость c распространения звука в воздухе при температурах t, равных: -20, 0 и $20°$ С.

Решение:
Скорость распространения акустических колебаний в газах $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$, где μ — молярная масса газа, T — абсолютная температура газа, $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная, γ — показатель адиабаты газа. Воздух в первом приближении можно считать двухатомным газом, поэтому $\mu=0{,}029\text{ кг/м}^3$, $\gamma=\frac{i+2}{i}$, где i — число степеней свободы, причем для двухатомных газов $i=5$, тогда $\gamma=1{,}4$. Подставляя числовые данные, составим таблицу:

T, К	253	273	293
c, м/с	321	333	345

13.8. Во сколько раз скорость c_1 распространения звука в воздухе летом ($t=27°$ С) больше скорости c_2 распространения звука зимой ($t=-33°$ С)?

Решение:

Скорость распространения акустических колебаний в газах (см. задачу 13.7) $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$, откуда следует $\frac{c_1}{c_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$.

Подставляя числовые данные, получим $\frac{c_1}{c_2}=1{,}12$.

13.9. Зная, что средняя квадратичная скорость молекул двухатомного газа в условиях опыта $v=461$ м/с, найти скорость c распространения звука в газе.

Решение:

Скорость распространения звука в газе (см. задачу 13.7) $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ — (1), а средняя квадратичная скорость молекул газа $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ — (2). Разделив (1) на (2), получаем $\frac{c}{\sqrt{\overline{v^2}}}=\sqrt{\frac{\gamma}{3}}$, откуда скорость распространения звука в газе $c=\sqrt{\overline{v^2}}\sqrt{\frac{\gamma}{3}}$ — (3). По условию газ двухатомный, следовательно (см. задачу 13.7), показатель адиабаты $\gamma=1{,}4$ и, подставляя его в формулу (3), получаем $c=315$ м/с.

13.10. Найти скорость c распространения звука в двухатомном газе, если известно, что при давлении $p=1{,}01\cdot10^5$ Па плотность газа $\rho=1{,}29$ кг/м^3.

Решение:

Скорость распространения звука в газе (см. задачу 13.7) $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ — (1). Из уравнения Менделеева — Клапейрона

$pV = \frac{m}{\mu}RT$ давление $p = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{\rho RT}{\mu}$ или $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$ — (2).

Подставляя (2) в (1), получаем $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ — (3). По условию газ двухатомный, следовательно (см. задачу 13.7), показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$ и, подставляя его в формулу (3), получаем $c = 331$ м/с.

13.11. Зная, что средняя молярная кинетическая энергия поступательного движения молекул азота $W_{\text{к}\mu} = 3{,}4$ кДж/моль, найти скорость c распространения звука в азоте при этих условиях.

Решение:

Скорость распространения звука в газе (см. задачу 13.7) $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ — (1), а средняя молярная кинетическая энергия поступательного движения молекул $W_{\text{к}\mu} = \frac{3}{2}RT$ — (2). Из уравнения (2) абсолютная температура $T = \frac{2W_{\text{к}\mu}}{3R}$ — (3). Подставляя (3) в (1), получаем $c = \sqrt{\frac{2\gamma RW_{\text{к}\mu}}{3R\mu}} = \sqrt{\frac{2\gamma W_{\text{к}\mu}}{3\mu}}$ — (4). Поскольку азот — газ двухатомный, следовательно (см. задачу 13.7), показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$ и, подставляя его в формулу (4), получаем $c = 337$ м/с.

13.12. Для определения температуры верхних слоев атмосферы нельзя пользоваться термометром, т. к. вследствие малой плотности газа термометр не придет в тепловое равновесие с окружающей средой. Для этой цели пускают ракету с гранатами, взрываемыми при достижении определенной высоты. Найти температуру t на высоте $h = 20$ км от поверхности Земли, если известно, что звук от взрыва, произведенного на высоте $h_1 = 21$ км, пришел позже на $\Delta t = 6{,}75$ с звука от взрыва, произведенного на высоте $h_2 = 19$ км.

Решение:

Скорость распространения звука в газе (см. задачу 13.7) $c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{\mu}}$ — (1). По условию звук проходит расстояние $\Delta h = h_1 - h_2$ за время Δt, поэтому, с другой стороны, $c = \dfrac{h_2 - h_1}{\Delta t}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2) и возводя обе части равенства в квадрат, получаем $\dfrac{\gamma RT}{\mu} = \dfrac{(h_2 - h_1)^2}{(\Delta t)^2}$, откуда абсолютная температура воздуха на высоте h равна $T = \dfrac{\mu}{\gamma R}\dfrac{(h_1 - h_2)^2}{(\Delta t)^2}$ — (3). Воздух в первом приближении можно считать азотом, для которого $\mu = 0{,}028$ кг/м^3 и $\gamma = 1{,}4$. Подставляя значения в формулу (3), получаем $T = 216$ К или $t = T - 273 = -57°$ С.

13.13. Найти показатель преломления n звуковых волн на границе воздух — стекло. Модуль Юнга для стекла $E = 6{,}9 \cdot 10^{10}$ Па, плотность стекла $\rho = 2{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, температура воздуха $t = 20°$ С.

Решение:

Скорость распространения акустических колебаний в твердой и жидкой средах (см. задачи 13.3 и 13.4) $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ — (1), а в газах (см. задачу 13.7) $c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{\mu}}$ — (2). По определению показателя преломления $n=\frac{c_1}{c_2}$ — (3), где c_1 и c_2 — скорости звука в воздухе и в стекле, которые могут быть найдены соответственно из формул (2) и (1). Подставляя (2) и (1) в (3) и учитывая, что абсолютная температура $T=t+273$, получаем $n=\sqrt{\frac{\gamma RT\rho}{\mu E}}=$ $=\sqrt{\frac{\gamma R\rho(t+273)}{\mu E}}$ — (4). Воздух в первом приближении можно считать двухатомным газом, для которого $\mu=0{,}029$ кг/м^3 и $\gamma=1{,}4$. Подставляя значения в формулу (4), получаем $n=0{,}067$.

13.14. Найти предельный угол α полного внутреннего отражения звуковых волн на границе воздух — стекло. Воспользоваться необходимыми данными из предыдущей задачи.

Решение:

Согласно закону преломления волн показатель преломления $n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ — (1), где α — угол падения, β — угол преломления. При определенном значении угла падения α_0 преломленная волна скользит вдоль границы двух сред. В этом случае $\beta=\frac{\pi}{2}$ и $\sin\beta=1$ (2). Это явление называется полным внутренним отражением, а угол α_0 — предельным углом. Из (1), с учетом (2), получаем $n=\sin\alpha_0$ — (3) и, с другой стороны (см. задачу 13.13), показатель преломления $n=\sqrt{\frac{\gamma R\rho(t+273)}{\mu E}}$ — (4). Приравнивая правые части уравнений (3) и (4), получаем

$sin\alpha_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma R\rho(t+273)}{\mu E}}$, откуда предельный угол полного внутреннего отражения звуковых волн $\alpha_0 = arcsin\left(\sqrt{\dfrac{\gamma R\rho(t+273)}{\mu E}}\right)$. Считая воздух в первом приближении двухатомным газом, для которого $\mu = 0{,}029$ кг/м^3 и $\gamma = 1{,}4$, получаем $\alpha = 3{,}84°$.

13.15. Два звука отличаются по уровню громкости на $\Delta L_I = 1$ фон. Найти отношение $\dfrac{I_2}{I_1}$ интенсивностей этих звуков.

Решение:

Уровень громкости в фонах L_I связан с интенсивностью звука соотношением $L_I = 10lg\dfrac{I}{I_0}$ — (1), где I_0 — порог слышимости звука. Условно принимается, что $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2. Для первого и второго звука из (1) соответственно имеем $L_{I1} = 10lg\dfrac{I_1}{I_0}$ и $L_{I2} = 10lg\dfrac{I_2}{I_0}$, тогда

$\Delta L_I = L_{I2} - L_{I1} = 10\left(lg\dfrac{I_2}{I_0} - lg\dfrac{I_1}{I_0}\right) = 10lg\dfrac{I_2}{I_1}$ или

$lg\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{\Delta L_I}{10}$. Отсюда $\dfrac{I_2}{I_1} = 10^{\left(\frac{\Delta L_I}{10}\right)} = 1{,}26$.

13.16. Два звука отличаются по уровню звукового давления на $\Delta L_p = 1$ Дб. Найти отношение $\dfrac{p_2}{p_1}$ амплитуд их звукового давления.

Решение:
Уровень звукового давления в децибелах связан с амплитудой звукового давления соотношением $L_p = 20 lg\frac{p}{p_0}$ — (1), где p_0 — амплитуда звукового давления при нулевом уровне громкости. Условно принимается, что $p_0 = 2\times$ $\times 10^{-5}$ Па. Для первого и второго звука из (1) соответственно $L_{p1} = 20 \cdot lg\frac{p_1}{p_0}$ и $L_{p2} = 20 \cdot lg\frac{p_2}{p_0}$, тогда

$$\Delta L_p = L_{p2} - L_{p1} = 20\left(lg\frac{p_2}{p_1} - lg\frac{p_1}{p_0}\right); \quad \Delta L_p = 20 lg\frac{p_2}{p_1}$$ или

$lg\frac{p_2}{p_1} = \frac{\Delta L_p}{20}$. Отсюда $\frac{p_2}{p_1} = 10^{\left(\frac{\Delta L_p}{20}\right)} = 1{,}12$.

13.17. Шум на улице с уровнем громкости $L_{I1} = 70$ фон слышен в комнате так, как шум с уровнем громкости $L_{I2} = 40$ фон. Найти отношение $\frac{I_1}{I_2}$ интенсивностей звуков на улице и в комнате.

Решение:
Отношение интенсивностей звуков на улице и в комнате (см. задачу 13.15) будет определяться как $\frac{I_2}{I_1} = 10^{\left(\frac{L_{I2}-L_{I1}}{10}\right)}$ или $\frac{I_1}{I_2} = 10^{\left(\frac{L_{I1}-L_{I2}}{10}\right)} = 1000$.

13.18. Интенсивность звука увеличилась в 1000 раз. На сколько увеличилась амплитуда звукового давления?

Решение:

Уровень звукового давления (см. задачи 13.15 и 13.16) увеличился на $\Delta L_p = \Delta L_I = 10\lg\frac{I_2}{I_1} = 30$ Дб. С другой стороны, $\Delta L_p = 20\cdot\lg\frac{p_2}{p_1}$, откуда отношение амплитуд звукового давления $\frac{p_2}{p_1} = 10^{\left(\frac{\Delta L_p}{20}\right)} = 31{,}6$.

13.19. Интенсивность звука $I = 10$ мВт/м^2. Найти уровень громкости L_I и амплитуду p звукового давления.

Решение:

Уровень громкости в фонах L_I (см. задачу 13.15) связан с интенсивностью звука соотношением $L_I = 10\lg\frac{I}{I_0}$, где $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2, тогда $L_I = 100$ фон. Поскольку $L_I = L_p = 20\cdot\lg\frac{p}{p_0}$, то $\lg\frac{p}{p_0} = \frac{L_I}{20}$, значит, $\frac{p}{p_0} = 10^{\left(\frac{L_I}{20}\right)}$, отсюда амплитуда звукового давления $p = p_0 10^{\left(\frac{L_I}{20}\right)}$, где $p_0 = 2\cdot10^{-5}$ Па, тогда $p = 2$ Па.

13.20. На сколько увеличился уровень громкости L_I звука, если интенсивность звука возросла: а) в 3000 раз; б) в 30000 раз?

Решение:

Уровень громкости (см. задачу 13.15) увеличивается на $\Delta L_I = 10\cdot\lg\frac{I_2}{I_1}$. а) Если $\frac{I_2}{I_1} = 3000$, то $\Delta L_I = 34{,}77$ фон.

б) Если $\frac{I_2}{I_1} = 30000$, то $\Delta L_I = 44{,}77$ фон.

13.21. Найти расстояние l между соседними зубцами звуковой бороздки на граммофонной пластинке для тона ля (частота $\nu = 435$ Гц): а) в начале записи на расстоянии $r = 12$ см от центра; б) в конце записи на расстоянии $r = 4$ см от центра. Частота вращения пластинки $n = 78$ мин$^{-1}$.

Решение:

Имеем $l = \dfrac{\omega r}{\nu}$, где $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость вращения пластинки, отсюда $l = \dfrac{2\pi n r}{\nu}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $l = 2{,}25$ мм ; б) $l = 0{,}75$ мм.

13.22. Найти расстояние l между соседними зубцами звуковой бороздки на граммофонной пластинке для: а) $\nu = 100$ Гц; б) $\nu = 2000$ Гц. Среднее расстояние от центра пластинки $r = 10$ см. Частота вращения пластинкн $n = 78$ мин$^{-1}$.

Решение:

Расстояние между соседними зубцами звуковой бороздки на граммофонной пластинке найдем по формуле $l = \dfrac{\omega r}{\nu}$, где $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость вращения пластинки, отсюда $l = \dfrac{2\pi n r}{\nu}$. а) Если $\nu_1 = 100$ Гц, то $l_1 = 8{,}15$ мм. б) Если $\nu_1 = 2000$ Гц, то $l_1 = 0{,}41$ мм.

13.23. При образовании стоячей волны в трубке Кундта в воздушном столбе наблюдалось $n = 6$ пучностей. Какова была длина l_2 воздушного столба, если стальной стержень закреплен: а) посередине; б) в конце? Длина стержня $l_1 = 1$ м. Скорость распространения звука в стали $c_1 = 5250$ м/с, в воздухе $c_2 = 343$ м/с.

Решение:

При возбуждении колебаний в стальном стержне установится стоячая волна с узлами в точках зажима и пучностями на свободных концах. В стоячей волне воздушного столба расстояние между соседними пучностями равно половине длины возбужденной звуковой волны. Имеем $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{c_1}{c_2}$ — (1). Длина l_2 воздушного столба на основании сказанного найдется из условия $\frac{n\lambda_{21}}{2}=l_2$ — (2). Из (1) и (2) имеем $l_2=\frac{n\lambda_1 c_2}{2c_1}$. Тогда: а) $\lambda=2l_1$, $l_2=0{,}392$ м; б) $\lambda=4l_1$, $l_2=0{,}784$ м.

13.24. Какова длина l_1 стеклянного стержня в трубке Кундта, если при закреплении его посередине в воздушном столбе наблюдалось $n=5$ пучностей? Длина воздушного столба $l_2=0{,}25$ м. Модуль Юнга для стекла $E=6{,}9\cdot10^{10}$ Па; плотность стекла $\rho=2{,}5\cdot10^3$ кг/м^3. Скорость распространения звука в воздухе $c=340$ м/с.

Решение:

Имеем $l_2=\frac{n\lambda_1 c_2}{2c_1}$ — (1) (см. задачу 13.23). По условию $\lambda_1=2l_1$ — (2). Скорость распространения акустических колебаний в стекле $c_1=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $l_2=\frac{2n_2lc_2}{2\cdot\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$, откуда длина стеклянного стержня $l_1=\frac{l_2}{nc_2}\sqrt{\frac{R}{\rho}}=0{,}772$ м.

13.25. Для каких наибольших частот применим метод Кундта определения скорости звука, если считать, что наименьшее различимое расстояние между пучностями $l \approx 4$ мм? Скорость распространения звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Решение:

Имеем $l = \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{c}{2\nu}$ (см. задачу 13.23), отсюда максимальная частота $\nu = \dfrac{c}{2l} \approx 43$ кГц.

13.26. Два поезда идут навстречу друг другу со скоростями $u_1 = 72$ км/ч и $u_2 = 54$ км/ч. Первый поезд дает свисток с частотой $\nu = 600$ Гц. Найти частоту ν' колебаний звука, который слышит пассажир второго поезда: а) перед встречей поездов; б) после встречи поездов. Скорость распространения звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Решение:

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \dfrac{c + u_2}{c - u_1}\nu$ — (1), где ν — частота звука, посылаемая источником звука, u_1 — скорость движения источника звука, u_2 — скорость движения наблюдателя, c — скорость распространения звука. Скорость $u_2 > 0$, если наблюдатель движется по направлению к источнику звука; скорость $u_1 > 0$, если источник движется к наблюдателю. а) Перед встречей поездов $\nu_1' = \dfrac{c + u_2}{c - u_1}\nu = 666$ Гц. б) После встречи поездов

$\nu_2' = \dfrac{c - u_2}{c + u_1}\nu = 542$ Гц.

13.27. Когда поезд проходит мимо неподвижного наблюдателя, частота тона гудка паровоза меняется скачком. Какой процент от истинной частоты тона составляет скачок частоты, если поезд движется со скоростью $c = 60$ км/ч?

Решение:

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \dfrac{c + u_2}{c - u_1}\nu$ — (1). Поскольку наблюдатель покоится, то $u_2 = 0$, тогда (см. задачу 13.26) при движении поезда к наблюдателю и от него соответственно имеем из формулы (1) частоты звука $\nu_1' = \dfrac{c}{c - u}\nu$ — (2) и $\nu_2' = \dfrac{c}{c + u}\nu$ — (3). Величина скачка частоты $\Delta\nu = \nu_1' - \nu_2'$ — (4). Подставляя (2) и (3) в (4), получаем $\Delta\nu = c\nu\left[\dfrac{1}{c - u} - \dfrac{1}{c + u}\right] = 9{,}8\%$.

13.28. Наблюдатель на берегу моря слышит звук пароходного гудка. Когда наблюдатель и пароход находятся в покое, частота воспринимаемого наблюдателем звука $\nu = 420$ Гц. При движении парохода воспринимаемая частота $\nu_1 = 430$ Гц, если пароход приближается к наблюдателю, и $\nu_2 = 415$ Гц, если пароход удаляется от него. Найти скорость v парохода в первом и втором случаях, если скорость распространения звука в воздухе $c = 338$ м/с.

Решение:

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \dfrac{c + u_2}{c - u_1}\nu$ — (1). Поскольку наблюдатель покоится, то $\nu_2 = 0$. Если пароход приближается к наблюдателю (см. задачу 13.26), то из формулы (1) имеем $\nu_1' = \frac{c}{c-u}\nu$, откуда скорость парохода $u = c\left[1 - \frac{\nu_1'}{\nu}\right] = 8{,}05$ м/с. Аналогично при удалении парохода от наблюдателя $\nu_2' = \frac{c}{c+u}\nu$, следовательно, $u = c\left[\frac{\nu_2'}{\nu} + 1\right] = 4{,}07$ м/с.

13.29. Ружейная пуля летит со скоростью $u = 200$ м/с. Во сколько раз изменится частота тона свиста пули для неподвижного наблюдателя, мимо которого пролетает пуля? Скорость распространения звука в воздухе $c = 333$ м/с.

Решение:

Частоты звука при движении пули к неподвижному наблюдателю и от него (см. задачу 13.27) соответственно равны $\nu_1' = \frac{c}{c-u}\nu$ и $\nu_2' = \frac{c}{c+u}\nu$, тогда $\frac{\nu_1'}{\nu_2'} = \frac{c+u}{c-u} = 4$.

13.30. Два поезда идут навстречу друг другу с одинаковой скоростью. Какова должна быть их скорость u, чтобы частота свистка одного из них, слышимого на другом, изменялась в 9/8 раза? Скорость распространения звука в воздухе $c = 335$ м/с.

Решенне:

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \frac{c+u_2}{c-u_1}\nu$ — (1).

По условию $u_1 = u_2 = u$ — (2) и $\dfrac{\nu'}{\nu} = \dfrac{c+u}{c-u} = \dfrac{9}{8}$, отсюда скорость поездов $u = \dfrac{c}{17} = 19{,}7$ м/с.

13.31. Летучая мышь летит перпендикулярно к стене со скоростью 6,0 м/с, издавая ультразвук частотой $\nu = 45$ кГц. Какие две частоты звука ν_1 и ν_2 слышит летучая мышь? Скорость распространения звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Решение:

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \dfrac{c+u_2}{c-u_1}\nu$ — (1). По условию $u_1 = u_2 = u$ — (2) — скорость летучей мыши. Летучая мышь будет слышать прямой звук и отраженный от стены. Для прямого звука из формулы (1) имеем $\nu_1 = \dfrac{c+u}{c+u}\nu = \nu = 45$ кГц. Аналогично для отраженного звука $\nu_2 = \dfrac{c+u}{c-u}\nu = 46{,}6$ кГц.

13.32. Какую длину l должна иметь стальная струна радиусом $r = 0{,}05$ см, чтобы при силе натяжения $F = 0{,}49$ кН она издавала тон частотой $\nu = 320$ Гц?

Решение:

Частота основного тона струны определяется формулой $\nu = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{F}{\rho S}}$ — (1), где l — длина струны, F — сила ее натяжения, $S = \pi r^2$ — (2) — площадь ее поперечного сечения, ρ — плотность материала среды. Подставляя (2) в (1), получаем $\nu = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{F}{\rho \pi r^2}}$, откуда длина струны $l = \dfrac{1}{2\nu}\sqrt{\dfrac{F}{\rho \pi r^2}} = 0{,}45\,\text{м}$.

13.33. С какой силой F надо натянуть стальную струну длиной $l = 20\,\text{см}$ и диаметром $d = 0{,}2\,\text{мм}$, чтобы она издавала тон ля (частота $\nu = 435\,\text{Гц}$)?

Решение:

Частота основного тона струны определяется формулой $\nu = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{F}{\rho S}}$ — (1) (см. задачу 13.32), где $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ — (2).

Тогда, подставляя (2) в (1), получим $\nu = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{4F}{\rho \pi d^2}}$ — (3).

Возведя обе части уравнения (3) в квадрат, имеем $\nu^2 = \dfrac{1}{4l^2}\dfrac{4F}{\rho \pi d^2} = \dfrac{F}{\rho \pi d^2 l^2}$, откуда сила натяжения струны $F = \rho \pi \nu^2 d^2 l^2 = 7{,}32\,\text{Н}$.

13.34. Зная предел прочности для стали, найти наибольшую частоту ν, на которую можно настроить струну длиной $l = 1\,\text{м}$.

Решение:

Частота основного тона струны определяется формулой $\nu = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{F}{\rho S}}$ — (1). По определению предел прочности

$p_{max} = \dfrac{F_{max}}{S}$, откуда максимальная сила, с которой можно натянуть струну, равна $F_{max} = P_{max}S$ — (2). Подставляя (2) в (1), находим наибольшую частоту, на которую можно настроить струну, $\nu_{max} = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{p_{max}}{\rho}} = 159$ Гц.

13.35. Струна, натянутая с силой $F_1 = 147$ Н, дает с камертоном частоту биений $\nu_б = 8$ Гц. После того как эту струну натянули с силой $F_2 = 156{,}8$ Н, она стала настроена с камертоном в унисон. Найти частоту ν_2 колебаний камертона.

Решение:

Имеем $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\dfrac{F_1}{F_2}} = 0{,}97$; $\nu_б = \nu_2 - \nu_1 = 8$ Гц. Решая эти уравнения совместно, получим $\nu_2 = 252$ Гц.

13.36. Камертон предыдущей задачи дает с другим камертоном частоту биений $\nu_б = 2$ Гц. Найти частоту колебаний второго камертона.

Решенне:

Частота биений $\nu_б = \nu_2 - \nu_1$ — (1). Из предыдущей задачи частота одного камертона $\nu_2 = 252$ Гц, тогда из формулы (1) получим $\nu_1 = \nu_2 - \nu_б = 250$ Гц. Однако следует обратить внимание, что камертон из предыдущей задачи может быть как вторым, так и первым, т. е. $\nu_1 = 252$ Гц, тогда $\nu_2 = \nu_б + \nu_1 = 254$ Гц.

13.37. Найти частоту ν основного тона струны, натянутой с силой $F = 6$ кН. Длина струны $l = 0{,}8$ м, ее масса $m = 30$ г.

Решение:

Частота основного тона струны определяется формулой $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}$ — (1). Масса струны $m = \rho V$ — (2), где $V = lS$ — (3) — ее объем. Из (2) и (3) имеем $m = \rho l S$, откуда плотность материала струны $\rho = \frac{m}{lS}$ — (4). Подставляя (4) в (1), находим частоту основного тона струны $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Fl}{m}} = 250$ Гц.

13.38. Найти частоту ν основного тона: а) открытой трубы; б) закрытой трубы.

Решение:

а) В открытой трубе образуется стоячая звуковая волна с пучностями на обоих концах. На длине трубы l может поместиться n полуволн, где $n = 1, 2, 3$ ... т. е. $l = \frac{n\lambda}{2}$ и $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2l}$. Частота основного тона $\nu = \frac{c}{2l}$. б) В закрытой трубе стоячая волна имеет на одном конце узел, а на другом — пучность. В этом случае $l = \frac{n\lambda}{4}$ и $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{4l}$. Частота основного тона $\nu = \frac{c}{4l}$.

13.39. Закрытая труба издает основной тон до (частота $\nu_1 = 130{,}5$ Гц). Трубу открыли. Какую частоту ν_2 имеет основной тон теперь? Какова длина l трубы? Скорость распространения звука в воздухе $v = 340$ м/с.

Решение:

В закрытой трубе стоячая волна имеет узел на одном конце и пучность на другом. В этом случае $l = \frac{n\lambda_1}{4}$ — (1) и $\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{nc}{4l}$ — (2). При $n = 1$ из формулы (2) частота основного тона $\nu_1 = \frac{c}{4l}$, откуда длина трубы $l = \frac{c}{4\nu_1} = 0{,}65$ м. Когда трубу открыли, в ней возникла стоячая волна с пучностями на обоих концах. Тогда $l = \frac{n\lambda_2}{2}$ — (3) и $\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{nc}{2l}$ — (4). Приравнивая правые части уравнений (1) и (3), получаем $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$ — (5). Из (2) и (4) следует, что $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, откуда, с учетом (5), частота основного тона открытой трубы $\nu_2 = 2\nu_1 = 261$ Гц.

§ 14. Электромагнитные колебания и волны

В задачах данного раздела используются данные таблиц 3 и 15 приложения. Если в задаче приведена графическая зависимость нескольких величин от какой-либо одной и при этом все кривые изображены на одном графике, то по оси y задаются условные единицы.

14.1. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 888$ пФ и катушки с индуктивностью $L = 2$ мГн. На какую длину волны λ настроен контур?

Решение:

По формуле Томсона период электромагнитных колебаний в контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (1). Длина волны, на которую настроен контур, $\lambda = cT$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 2512$ м.

14.2. На какой диапазон длин волн можно настроить колебательный контур, если его индуктивность $L = 2$ мГн, а емкость может меняться от $C_1 = 69$ пФ до $C_2 = 533$ пФ?

Решение:

Длина волны, на которую можно настроить контур (см. задачу 14.1), $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$ — (1). Подставляя в (1) значения емкостей C_1 и C_2, получаем диапазон длин волн от $\lambda_1 = 700$ м до $\lambda_2 = 1946$ м.

14.3. Какую индуктивность L надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости $C = 2$ мкФ получить частоту $\nu = 1000$ Гц?

Решение:

По формуле Томсона период электромагнитных колебаний в контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (1), а частота $\nu = \frac{1}{T}$ — (2). Из (1) и (2) следует, что $\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$ — (3). Возводя обе части уравнения (3) в квадрат, получаем $\nu^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$, откуда индуктивность контура $L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 12{,}66$ мГн.

14.4. Катушка с индуктивностью $L = 30$ мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S = 0{,}01\,\text{м}^2$ и расстоянием между ними $d = 0{,}1$ мм. Найти диэлектрическую проницаемость ε среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны $\lambda = 750$ м.

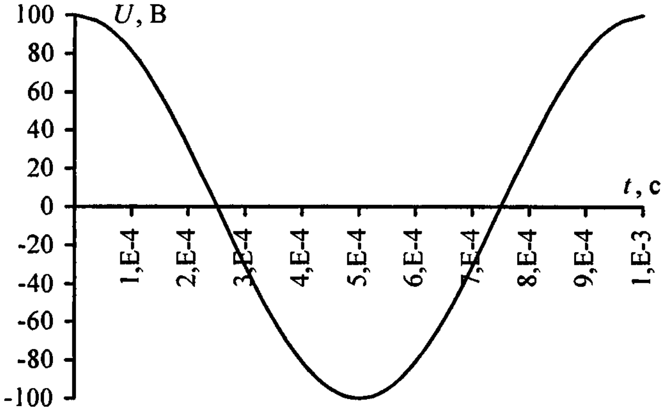
Решение:

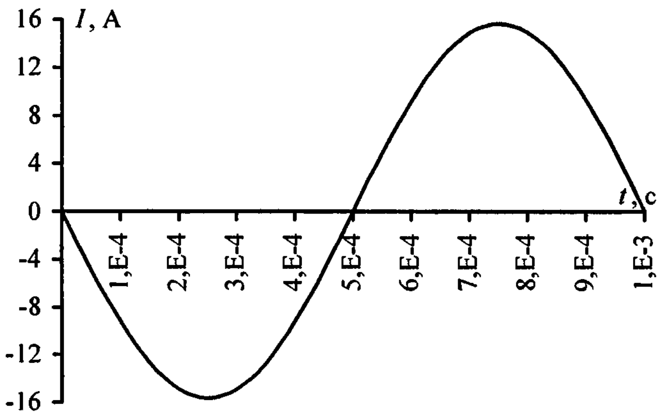
Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ — (1), где ε — диэлектрическая проницаемость среды, S — площадь пластин конденсатора, d — расстояние между ними. Длина волны, на которую настроен контур (см. задачу 14.1), $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}}$ — (3). Возведя уравнение (3) в квадрат, получим $\lambda^2 = \frac{4\pi^2 c^2 \varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}$, откуда диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора, $\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 SL} = 5{,}96$.

14.5. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 25$ нФ и катушки с индуктивностью $L = 1{,}015$ Гн. Обкладки конденсатора имеют заряд $q = 2{,}5$ мкКл. Написать уравнение (с числовыми коэффициентами) изменения разности потенциалов U на обкладках конденсатора и тока I в цепи. Найти разность потенциалов на обкладках конденсатора и ток в цепи в моменты времени $T/8$, $T/4$ и $T/2$. Построить графики этих зависимостей в пределах одного периода.

Решенне:

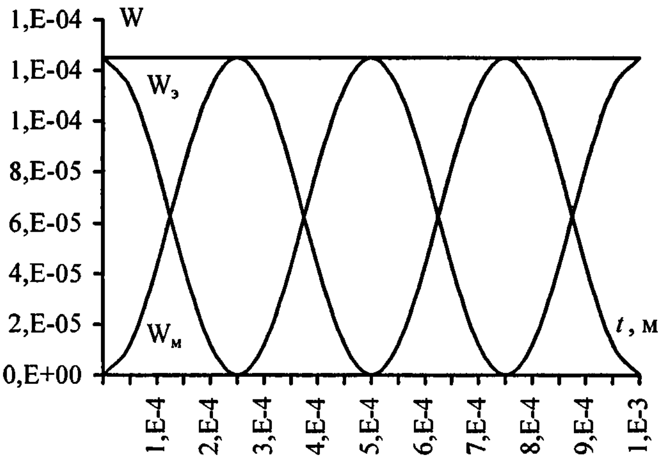
Разность потенциалов на обкладках конденсатора $U = U_0 \cos \omega t$ — (1). Начальное значение разности потенциалов $U_0 = \frac{q}{C}$ — (2), а циклическая частота колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — (3), где $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (4) — период колебаний. Подставляя (4) в (3), находим $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — (5). Подставляя (2) и (5) в (1), получим $U = \frac{q}{C}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$ — (6). Подставляя числовые данные в (6), получим $U = 100\cos\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$. Ток в цепи контура $I = C\frac{dU}{dt} = -CU_0\omega \sin \omega t$ — (7). Подставляя числовые данные в (7) и учитывая (2) и (5), получим $I = -15{,}7 \sin\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$. Если $t_1 = \frac{T}{8}$, то $U_1 = 70{,}7$ В и $I_1 = -11{,}1$ мА. Если $t_2 = \frac{T}{4}$, то $U_2 = 0$ В и $I_2 = -15{,}7$ мА. Если $t_3 = \frac{T}{2}$, то $U_3 = -100$ В и $I_3 = 0$. Для заданного интервала значений t построим графики.





14.6. Для колебательного контура предыдущей задачи написать уравнение (с числовыми коэффициентами) изменения со временем t энергии электрического поля $W_э$, энергии магнитного поля $W_м$ и полной энергии поля W. Найти энергию электрического поля, энергию магнитного поля и полную энергию поля в моменты времени $\frac{T}{8}$, $\frac{T}{4}$ и $\frac{T}{2}$. Построить графики этих зависимостей в пределах одного периода.

Решение:



Запишем выражение для энергии магнитного и электрических полей катушки $W_м = \frac{LI^2}{2}$ — (1) и конденсатора $W_э = \frac{cU^2}{2}$ — (2). В предыдущей задаче мы нашли: $U = 100 cos\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$B — (3); $I = -15{,}7 \cdot 10^{-3}\left(2\pi \cdot 10^3\right)$A — (4). Подставляя (3) в (2) и (4) в (1), а также числовые значения индуктивности L и емкости C из предыдущей задачи, получим $W_м = 125 \cdot 10^{-6} sin^2\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$Дж и $W_э = 125 \cdot 10^{-6} cos^2\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$Дж. Полная энергия поля $W = W_м + W_э = 125 \cdot 10^{-6}\left(sin^2\left(2\pi \cdot 10^3 t\right) + cos^2\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)\right)$;

$W = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж. При $t = \frac{T}{8} = \frac{\pi}{4\omega}$ имеем $\omega t = \frac{\pi}{4}$, тогда

$$W_м = 125 \cdot 10^{-6} sin^2 \frac{\pi}{4} = 62{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж};$$

$W_э = 125 \cdot 10^{-6} cos^2 \frac{\pi}{4} = 62{,}5 \cdot 10^{-6}$ Дж; $W = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж. При

$t = \dfrac{T}{4}$ имеем $\omega t = \dfrac{\pi}{2}$, тогда $W_м = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж; $W_э = 0$; $W = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж. При $t = \dfrac{T}{2}$ имеем $\omega t = \pi$, тогда $W_м = 0$; $W_э = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж; $W = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж.

14.7. Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид $U = 50 cos 10^4 \pi t$ В. Емкость конденсатора $C = 0{,}1$ мкФ. Найти период T колебаний, индуктивность L контура, закон изменения со временем t тока I в цепи и длину волны λ, соответствующую этому контуру.

Решение:

По условию уравнение изменения со временем разности потенциалов $U = 50 cos 10^4 \pi t$ — (1). Общий вид уравнения $U = U_0 cos \omega t$ — (2). Сопоставляя (1) и (2), находим $\omega = 10^4 \pi$ и учитывая, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, находим $T = 0{,}2$ мс. Поскольку период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (3), то, возведя обе части уравнения (3) в квадрат, находим $T^2 = 4\pi^2 LC$, откуда индуктивность контура $L = \dfrac{T}{4\pi^2 C} = 10{,}13$ мГн. Закон изменения со временем тока в цепи $I = C\dfrac{dU}{dt} = -CU_0\omega sin \omega t$ — (4). Подставляя в (4) числовые значения, получаем $I = -157 sin 10^4 \pi t$. Длина волны, соответствующая контуру, $\lambda = cT = 60$ км.

14.8. Уравнение изменения со временем тока в колебательном контуре имеет вид $I = -0{,}02 sin 400\pi t$ А. Индуктивность контура $L = 1$ Гн. Найти период T колебаний, емкость C контура, максимальную энергию $W_м$ магнитного поля и максимальную энергию $W_{эл}$ электрического поля.

Решение:

По условию уравнение изменения тока со временем $I=-0{,}02\,sin\,400\pi t$ — (1). Закон изменения со временем тока в цепи (см. задачу 14.7) $I=-CU_0\omega\,sin\,\omega t$ — (2). Сопоставляя (1) и (2), находим период колебаний $T=5$ мс. С другой стороны, по формуле Томсона $T=2\pi\sqrt{LC}$ — (3), откуда после возведения (3) в квадрат емкость конденсатора $C=\dfrac{T^2}{4\pi^2L}=0{,}63$ мкФ. Ток максимален, когда $sin\,400\pi t=-1$, т. е. $I_{max}=0{,}02$ А. Тогда максимальная энергия магнитного поля $W_м=\dfrac{LI^2}{2}=0{,}2$ мДж. Поскольку колебания в контуре не затухают, то по закону сохранения энергии максимальная энергия электрического поля $W_{эл}=W_м=0{,}2$ мДж.

14.9. Найти отношение энергии $\dfrac{W_м}{W_{эл}}$ магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $T/8$.

Решение:

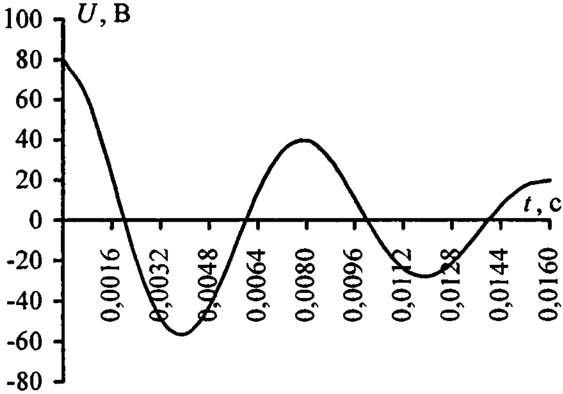
Запишем выражение для энергии магнитного и электрических полей катушки $W_м=\dfrac{LI^2}{2}$ и конденсатора $W_э=\dfrac{cU^2}{2}$. Напряжение в колебательном контуре изменяется по следующему закону: $U=U_0\,cos\,\omega t$, а сила тока в цепи $I=C\dfrac{dU}{dt}$, где C — электроемкость конденсатора. $I=-CU_0\omega\,sin\,\omega t$. Тогда выражения для $W_м$ и $W_э$ можно записать в виде $W_м=\dfrac{LC^2U_0\omega^2\,sin^2\,\omega t}{2}$,

$W_э = \dfrac{CU_0^2 \cos^2 \omega t}{2}$, а их отношение

$\dfrac{W_м}{W_э} = \dfrac{LC^2U_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t \cdot 2}{2CU_0^2 \cos^2 \omega t} = LC\omega^2 tg^2 \omega t$. Циклическая частота и период колебаний связаны следующим соотношением: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. При $t = \dfrac{T}{8}$, $\omega t = \dfrac{\pi}{4}$. Кроме того, $\dfrac{W_м}{W_э} = tg^2 \dfrac{\pi}{4} = 1$.

14.10. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 7$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 0{,}23$ Гн и сопротивлением $R = 40$ Ом. Обкладки конденсатора имеют заряд $q = 0{,}56$ мКл. Найти период T колебаний контура и логарифмический декремент затухания $\aleph$ колебаний. Написать уравнение изменения со временем t разности потенциалов U на обкладках конденсатора. Найти разность потенциалов в моменты времени, равные: $\dfrac{T}{2}$, T, $\dfrac{3T}{2}$ и $2T$. Построить график $U = f(t)$ в пределах двух периодов.

Решение:



Период электромагнитных колебаний в контуре, состоящем из емкости C, индуктивности L и сопротивления R, определяется формулой $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}} = 8$ мс.

Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (1), где $\delta = \frac{R}{2L}$ — (2) — коэффициент затухания. Подставляя (2) в (1), находим $\aleph = \frac{RT}{2L} = 0{,}7$. Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону $U = U_0 e^{-\delta t} \cos\omega t$ — (3), где $\omega = \frac{2\pi}{T} = 250\pi$ — (4), $U_o = \frac{q}{C} = 80$ В — (5). Подставляя (4) и (5) в (3), получаем $U = 80e^{-87.5t} \cos 250\pi t$. Если $t_1 = \frac{T}{2}$, то $U_1 = -56{,}5$ В. Если $t_2 = T$, то $U_2 = 40$ В. Если $t_3 = \frac{3T}{2}$, то $U_3 = -28$ В. Если $t_4 = 2T$, то $U_1 = 20$ В. Характер зависимости $U = f(t)$ показан на графике.

14.11. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0{,}2$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 5{,}07$ мГн. При каком логарифмическом декременте затухания $\aleph$ разность потенциалов на обкладках конденсатора за время $t = 1$ мс уменьшится в три раза? Каково при этом сопротивление R контура?

Решение:

Период электромагнитных колебаний в контуре равен $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}$. Предположим, что R достаточно мало, тогда период колебаний найдем по формуле $T = 2\pi\sqrt{LC} = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ с. Разность потенциалов на обкладках конденсатора изменяется со временем по закону $U = U_0 \exp\left(-\frac{\aleph t}{T}\right)$, откуда $\aleph = \frac{T \ln(U_0 / U)}{t}$. Подставляя числовые данные, получим $\aleph = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3} \ln 3}{10^{-3}} = 0{,}22$. Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T = \frac{R}{2L} T$, откуда $R = \frac{2\aleph L}{T} = 11{,}1$ Ом. Величина $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \approx 10^3$ намного меньше величины $\frac{1}{LC} \approx 10^9$, следовательно, мы действительно могли применять формулу $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

14.12. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 405$ нФ, катушки с индуктивностью $L = 10$ мГн и сопротивления $R = 2$ Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за один период колебаний?

Решенне:

Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону $U = U_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$, следовательно, за время $t = T$ отношение $\frac{U_0}{U} = e^{\delta t}$ — (1), где $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}$ — (2) — период электромагнитных колебаний в контуре, $\delta = \frac{R}{2L}$ — (3) — коэффициент затухания. Подставляя (2) и (3) в (1), окончательно получаем $\frac{U_0}{U} = \exp\left(\frac{\pi R}{\sqrt{L/C - R^2/4}}\right) = 1{,}02$.

14.13. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2{,}22$ нФ и катушки длиной $l = 20$ см из медной проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм. Найти логарифмический декремент затухания $\aleph$ колебаний.

Решение:

Пусть D — диаметр катушки, тогда ее площадь поперечного сечения равна $S_к = \dfrac{\pi D^2}{4}$ — (1). Число витков катушки $N = \dfrac{l}{d}$ — (2), где l — длина катушки, d — диаметр проволоки. Индуктивность катушки $L = \mu\mu_0 n^2 l S_к$ — (3), где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость среды, $n = \dfrac{N}{l} = \dfrac{1}{d}$ — (4) — число витков на единицу длины. Подставляя (1) и (4) в (3), получаем $L = \dfrac{\mu\mu_0 l \pi D^2}{4d^2}$ — (5). Длина одного витка катушки составляет $l_1 = \pi D$, а всей проволоки, намотанной на катушку, $l_{пр} = N l_1 = \dfrac{\pi D l}{d}$ — (6). Активное сопротивление проволоки $R = \rho \dfrac{l_{пр}}{S_{пр}}$, где ρ — удельное сопротивление меди, $S_{пр} = \dfrac{\pi d^2}{4}$ — (8) — площадь поперечного сечения проволоки. Подставляя (6) и (8) в (7), получаем $R = \dfrac{4\rho D l}{d^3}$ — (9). Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (10), где $\delta = \dfrac{R}{2L}$ — (11) — коэффициент затухания, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (12) — период электромагнитных колебаний в контуре. Подставляя (5) в (12), находим

$T = \frac{\pi D}{d}\sqrt{\mu\mu_0 \pi l C}$ — (14), затем, подставляя (13) и (14) в (10), окончательно получаем $\aleph = \frac{8\rho}{d}\sqrt{\frac{\pi l C}{\mu\mu_0}} = 0{,}018$.

14.14. Колебательный контур имеет емкость $C = 1{,}1$ нФ и индуктивность $L = 5$ мГн. Логарифмический декремент затухания $\aleph = 0{,}005$. За какое время вследствие затухания потеряется 99% энергии контура?

Решение:

Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону $U = U_0 e^{-\delta t} \cos\omega t$ — (1). Из формулы (1) следует, что $\frac{U_0}{U} = e^{\delta t}$ — (2). По условию $\frac{U_0 - U}{U_0} = 0{,}99$, следовательно, $\frac{U_0}{U} = 100$ — (3). Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $e^{\delta t} = 100$ — (4). Логарифмируя уравнение (4), находим $\delta t = \ln 100$ — (5). Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$, откуда $\delta = \frac{\aleph}{T}$ — (6). Подставляя (6) в (5), получаем $\frac{\aleph t}{T} = \ln 100$ или $t = \frac{T \ln 100}{\aleph}$ — (7). По формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (8). Подставляя (8) в (7), окончательно находим $t = \frac{2\pi\sqrt{LC}\ln 100}{\aleph} = 13{,}6$ м/с.

14.15. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки длиной $l = 40$ см из медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $s = 0{,}1\ \text{мм}^2$. Найти емкость конденсатора C, если, вычисляя период колебаний контура по приближенной формуле $T = 2\pi\sqrt{LC}$, мы допускаем ошибку $\varepsilon = 1\%$.

Указание: учесть, что ошибка $\varepsilon = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$, где T_1 — период колебаний, найденный по приближенной формуле, а T_2 — период колебаний, найденный по точной формуле.

Решение:

Индуктивность катушки (см. задачу 14.13) $L = \frac{\mu\mu_0 l\pi D^2}{4d^2}$ — (1), где D — диаметр катушки, d — диаметр проволоки. Поскольку $S = \frac{\pi d^2}{4}$, то $d^2 = \frac{4S}{\pi}$ — (2) и $d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ — (3). Подставляя (2) в (1), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 l\pi^2 D^2}{16S}$ — (4). Активное сопротивление проволоки $R = \frac{4\rho Dl}{d^3}$ — (5), где ρ — удельное сопротивление меди. Подставляя (3) в (5), получаем $R = \frac{\rho Dl}{2}\left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{3}{2}}$ — (6). По формуле Томсона $T_1 = 2\pi\sqrt{LC}$ — (7). Подставляя (4) в (7), получаем $T_1 = \frac{\pi^2 D}{2}\sqrt{\frac{\mu\mu_0 lC}{S}}$ — (8). По точной формуле, с учетом активного сопротивления проволоки, намотанной на катушку, $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}$ — (9). Подставляя (4) и (6) в (9), получаем $T_2 = \frac{\pi^2\mu\mu_0 D}{2}\sqrt{\frac{lC}{S(\mu\mu_0 - \rho^2 lC\pi^2)}}$ — (10). По условию $\varepsilon = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ — (11). Подставляя (8) и (10) в (11), находим $\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2 lC\pi}{\mu\mu_0}}$ — (12). Возводя обе части уравнения (12) в квадрат, получаем $\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 = 1 - \frac{\rho^2 lC\pi}{\mu\mu_0}$, откуда окончательно находим $C = \frac{(2-\varepsilon)\varepsilon\mu\mu_0}{\pi\rho^2 l} = 0{,}68$ мкФ.

14.16. Катушка длиной $l = 50$ см и площадью поперечного сечения $S = 10\ см^2$ включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Число витков катушки $N = 3000$. Найти сопротивление R катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение:

Сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой $tg\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ — (1). Поскольку цепь не содержит конденсатора, то формула (1) примет упрощенный вид $tg\varphi = \frac{\omega L}{R}$ — (2). Циклическая частота колебаний связана с обычной соотношением $\omega = 2\pi\nu$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $tg\varphi = \frac{2\pi\nu L}{R}$ — (4). Индуктивность катушки $L = \mu\mu_0 n^2 lS$ — (5), где $n = \frac{N}{l}$ — (6) — число витков на единицу длины. Подставляя (6) в (5), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}$ — (7), затем, подставляя (7) в (4), находим $tg\varphi = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 N^2 S}{Rl}$, откуда активное сопротивление катушки $R = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 N^2 S}{l\,tg\varphi} = 4{,}1$ Ом.

14.17. Обмотка катушки состоит из $N = 500$ витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $s = 1\ мм^2$.

Длина катушки $l = 50$ см, ее диаметр $D = 5$ см. При какой частоте ν переменного тока полное сопротивление Z катушки вдвое больше ее активного сопротивления R ?

Решение:

Активное сопротивление катушки (см. задачу 14.15) $R = \frac{\rho D l}{2}\left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{3}{2}}$ — (1), а ее полиое сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ — (2). Индуктивность катушки (см. задачу 14.16) $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S_к}{l}$ — (3), где $S_к = \frac{\pi D^2}{4}$ — (4) — площадь поперечного сечения катушки. Подставляя (4) в (3), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 \pi D^2}{4l}$ — (5). Поскольку $\omega = 2\pi\nu$ — (6), то, подставляя (1), (5) и (6) в (2), получаем $Z = \frac{D}{2l}\left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\rho^2 l^4 + \pi\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^4 D^2 S^3}$ — (7). По условию $Z = 2R$. Подставляя (1) и (7) в (8), получаем $\frac{1}{l}\sqrt{\rho^2 l^4 + \pi\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^4 D^2 S^3} = 2\rho l$ — (9). Возведя обе части уравнения (9) в квадрат, имеем $\rho^2 l^4 + \pi\nu^2\mu^2\mu_0^2 \times$ $\times N^4 D^2 S^3 = 4\rho^2 l^4$, отсюда $\nu^2 = \frac{3\rho^2 l^4}{\pi\mu^2\mu_0^2 N^4 D^2 S^3}$ или окончательно $\nu = \frac{\rho l^2}{\mu\mu_0 N^2 D}\sqrt{\frac{3}{\pi S^3}} = 265$ Гц.

14.18. Два конденсатора с емкостями $C_1 = 0{,}2$ мкФ и $C_2 = 0{,}1$ мкФ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Найти ток I

в цепи и падения потенциала U_{C1} и U_{C2} на первом и втором конденсаторах.

Решение:

Емкостное сопротивление конденсатора выражается формулой $x_c = \frac{1}{\omega C}$ — (1), где $\omega = 2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний. Подставляя (2) в (1), найдем сопротивления конденсаторов: $x_{c1} = \frac{1}{2\pi\nu C_1}$ и $x_{c2} = \frac{1}{2\pi\nu C_2}$. Поскольку конденсаторы соединены последовательно, то их общее сопротивление $x_c = x_{c1} + x_{c2} = \frac{C_1 + C_2}{2\pi\nu C_1 C_2}$ — (3).

По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{X_c}$ — (4), где $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (5) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (6) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (3) в (4), с учетом (5) и (6), находим ток в цепи $I = \frac{2\pi\nu C_1 C_2 U}{C_1 + C_2} = 4{,}6\,\text{мА}$. Падения потенциала на первом и втором конденсаторах будут соответственно равны $U_1 = IX_{c1} = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 73{,}34\,\text{В}$ и $U_2 = IX_{c2} = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 146{,}6\,\text{В}$.

14.19. Катушка длиной $l = 25\,\text{см}$ и радиусом $r = 2\,\text{см}$ имеет обмотку из $N = 1000$ витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $s = 1\,\text{мм}^2$. Катушка включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50\,\text{Гц}$. Какую часть полного сопротивления Z катушки составляет активное сопротивление R и индуктивное сопротивление X_L?

Решение:

Индуктивность катушки выражается формулой $L = \mu\mu_0 \times \times n^2 l S_к$ — (1), где $n = \frac{N}{l}$ — (2) — число витков на единицу длины и $S_к = \pi r^2$ — (3) — площадь поперечного сечения катушки. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 \pi r^2}{l}$ — (4). Индуктивное сопротивление катушки выражается формулой $X_L = \omega L$ — (5), где $\omega = 2\pi\nu$ — (6) — циклическая частота колебаний. Подставляя (4) и (6) в (5), получаем $X_L = \frac{2\pi^2 \nu\mu\mu_0 N^2 r^2}{l}$ — (7). Активное сопротивление проволоки выражается формулой $R = \rho\frac{l_{пр}}{S}$ — (8), где $l_{пр} = 2\pi r N$ — (9) — длина проволоки, намотанной на катушку. Подставляя (9) в (8), получаем $R = \frac{2\pi r N\rho}{S}$ — (10). Полное сопротивление цепи $Z = \frac{2\pi r N}{Sl}\sqrt{l^2\rho^2 + \pi^2\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S^2}$ — (11). Из формул (7), (10) и (11) следует, что доли активного и емкостного сопротивлений от полного соответственно равны

$$\frac{R}{Z} = \frac{\rho l}{\sqrt{l^2\rho^2 + \pi^2\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S^2}} = 0{,}74 \cdot 100\% = 74\% \text{ и}$$

$$\frac{X_L}{Z} = \frac{\pi\nu\mu\mu_0 N r S}{\sqrt{l^2\rho^2 + \pi^2\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S^2}} = 0{,}68 \cdot 100\% = 68\%.$$

14.20. Конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и резистор, сопротивление которого $R = 150$ Ом, включены последовательно в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Какую часть напряжения U, приложенного к этой цепи, составляют падения напряжения на конденсаторе U_C и на резисторе U_R?

Решение:

Емкостное сопротивление конденсатора (см. задачу 14.18) $X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}$ — (1). Полное сопротивление цепи $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4\pi^2\nu^2C^2}}$ — (3). По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z}$ — (4), где $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (5) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (6) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (3) и (4), с учетом (5) и (6), находим ток в цепи $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}}$ — (7). Токи через резистор и конденсатор соответственно равны $I_R = \frac{U_R}{R}$ — (8) и $I_C = 2\pi\nu C U_C$ — (9), где U_R и U_C — падения напряжения на резисторе и конденсаторе. Поскольку резистор и конденсатор соединены последовательно, то $I = I_C = I_R$ — (10). Подставляя (7), (8) и (9) в (10), получаем

$$\frac{U}{\sqrt{R^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}} = 2\pi\nu C U_C \quad \text{и} \quad \frac{U}{\sqrt{R^2 + 1/4\pi^2\nu^2C^2}} = \frac{U_R}{R},$$

откуда $\frac{U_C}{U} = \frac{1}{2\pi\nu C\sqrt{R^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}} = 0{,}727 \cdot 100\% = 72{,}7\%$

и $\frac{U_R}{U} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}} = 0{,}685 \cdot 100\% = 68{,}5\%$.

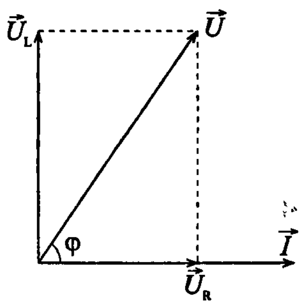
14.21. Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением $U = 440$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Какую емкость C должен иметь конденсатор для того, чтобы через лампочку протекал ток $I = 0{,}5$ А и падение потенциала на ней было равным $U_л = 110$ В?

Решение:

Ток, протекающий через лампочку (см. задачу 14.20), $I = \frac{U_л}{R_л}$ — (1), где $R_л$ — сопротивление лампочки. С другой стороны, $I = \frac{U}{\sqrt{R_л^2 + 1/(4\pi^2\nu^2 C^2)}}$ — (2). Из (1) имеем $R_л = \frac{U_л}{I}$ — (3). Возведя (3) в квадрат и подставляя в (2), получим $I = \frac{U}{\sqrt{U_л^2 / I^2 + 1/(4\pi^2\nu^2 C^2)}}$, откуда после преобразований находим емкость конденсатора $C = \frac{I}{2\pi\nu\sqrt{U^2 - U_л^2}} = 3{,}74$ мкФ.

14.22. Катушка с активным сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью L включена в цепь переменного тока напряжением $U = 127$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Найти индуктивность L катушки, если известно, что катушка поглощает мощность $P = 400$ Вт и сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение:



Изобразим векторную диаграмму напряжений. Катушка обладает индуктивностью L и активным сопротивлением R. Напряжение на R будет иметь такую же фазу, что и ток I, а напряжение на индуктивности U_L опередит ток на $\frac{\pi}{2}$. Полное напряжение можно изобразить (см. рисунок) векторной суммой $\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L$. Индуктивное сопротивление катушки (см. задачу 14.19) $X_L = 2\pi\nu L$ — (1), а ее полное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $Z = \sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2}$ — (3). По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z}$ — (4), где $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (5) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (6) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (3) и (4), с учетом (5) и (6), находим ток в цепи $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2 L^2\right)}}$ — (7). Мощность, поглощаемая катушкой, $P = I_{эф} U_{эф} \cos\varphi$ — (8). Подставляя (7) в (8), получаем $P = \frac{U^2 \cos\varphi}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2}}$, откуда после преобразований находим индуктивность катушки $L = \frac{\sqrt{U^4 \cos^2\varphi - P^2 R^2}}{2\pi\nu P} = 55$ мГн.

14.23. Найти формулы для полного сопротивления цепи Z и сдвига фаз φ между напряжением и током при различных способах включения сопротивления R, емкости C и индуктивности L. Рассмотреть случаи: а) R и C включены последовательно; б) R и C включены параллельно; в) R и L включены последовательно; г) R и L включены параллельно; д) R, L и C включены последовательно.

Решение:

Если цепь содержит сопротивление R, емкость C и индуктивность L, соединенные последовательно, то полное сопротивление цепи равно $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ —

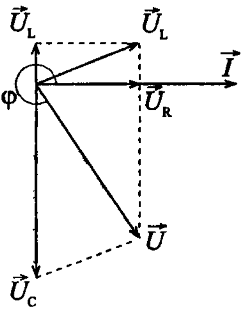
(1), а сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой $tg\varphi = \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ — (2).

а) Если R и C включены последовательно, то $L = 0$, следовательно, формулы (1) и (2) примут вид $Z = \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ и $tg\varphi = \dfrac{1}{\omega C R}$.

б) Если R и C включены параллельно, то $L = 0$. Тогда $\dfrac{1}{Z} = \sqrt{\dfrac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$, откуда $Z = \dfrac{R}{\sqrt{1 + R^2\omega^2 C^2}}$ и $tg\varphi = -\omega C R$.

в) Если R и L включены последовательно, то $C = 0$, следовательно, формулы (1) и (2) примут вид $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ и $tg\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$.

г) Если R и L включены параллельно, то $C = 0$. Тогда $\dfrac{1}{Z} = \sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{\omega L}\right)^2}$, откуда $Z = \dfrac{R\omega L}{\sqrt{1 + (\omega L)^2}}$ и $tg\varphi = \dfrac{R}{\omega L}$.



д) Если R, L и C включены последовательно, то формулы для Z и $tg\varphi$ будут иметь начальный вид (1) и (2). В качестве примера построим векторную диаграмму для данного случая. Векторы $\vec{U}_R$ и $\vec{I}$ будут параллельны, вектор $\vec{U}_L$ повернут на $\dfrac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, а $\vec{U}_C$ — по часовой стрелке относительно $\vec{I}$ (см. рисунок).

14.24. Конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 3$ кОм включены в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Найти полное сопротивление Z цепи, если конденсатор и резистор включены: а) последовательно; б) параллельно.

Решение:

а) Если конденсатор и резистор включены в цепь последовательно, то полное сопротивление цепи (см. задачу 14.23) равно $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — (1), где $\omega = 2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний. Подставляя (2) в (1), получим $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4\pi^2\nu^2C^2}} = 4{,}37$ кОм. б) Если конденсатор и резистор включены в цепь параллельно, тогда $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2\omega^2C^2}}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получим $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2\nu^2C^2R^2}} = 2{,}18$ кОм.

14.25. В цепь переменного тока напряжением $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно емкость $C = 35{,}4$ мкФ, сопротивление $R = 100$ Ом и индуктивность $L = 0{,}7$ Гн. Найти ток I в цепи и падения напряжения U_C, U_R и U_L на емкости, сопротивлении и индуктивности.

Решенне:

По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z}$ — (1), где $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — (2) — полное сопротивление цепи, $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (3) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (4) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (2) в (1), с учетом (3) и (4), и учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота колебаний, находим ток в цепи $I = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - 1/2\pi\nu C\right)^2}} = 1{,}34$ А. Падение напряжения на емкости равно $U_C = IX_C = \dfrac{I}{2\pi\nu C} = 120{,}49$ В. Падение напряжения на резисторе $U_R = IR = 134$ В. Падение напряжения на индуктивности равно $U_L = IX_L = 2\pi\nu LI = 294{,}68$ В.

14.26. Индуктивность $L = 22{,}6$ мГн и сопротивление R включены параллельно в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Найти сопротивление R, если известно. что сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение:

Если индуктивность и сопротивление включены параллельно в цепь переменного тока, то сдвиг фаз между напряжением и током (см. задачу 14.23) определяется формулой $tg\varphi = \dfrac{R}{\omega L}$ — (1), где $\omega = 2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний. Подставляя (2) в (1), получаем $tg\varphi = \dfrac{R}{2\pi\nu L}$, откуда сопротивление $R = 2\pi\nu L tg\varphi = 12{,}3$ Ом.

14.27. Активное сопротивление R и индуктивность L соединены параллельно и включены в цепь переменного тока напряжением $U = 127$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Найти сопротивление R и индуктивность L, если известно, что цепь поглощает мощность $P = 404$ Вт и сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение:

Если активное сопротивление и индуктивность включены параллельно в цепь переменного тока, то полное сопротивление цепи (см. задачу 14.23) определяется формулой $Z=\frac{R\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$ — (1), где $\omega=2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний, а сдвиг фаз между напряжением и током (см. задачу 14.26) равен $tg\varphi=\frac{R}{2\pi\nu L}$ — (3). Подставляя (2) в (1), получаем $Z=\frac{2\pi\nu RL}{\sqrt{R^2+(2\pi\nu L)^2}}$ — (4). По закону Ома для переменного тока $I_{эф}=\frac{U_{эф}}{Z}$ — (5), где $I_{эф}=\frac{I}{\sqrt{2}}$ — (6) и $U_{эф}=\frac{U}{\sqrt{2}}$ — (7) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (4) в (5), с учетом (6) и (7), получим $I=\frac{U\sqrt{R^2+(2\pi\nu L)^2}}{2\pi\nu RL}$ — (8), а мощность переменного тока $P=I_{эф}U_{эф}\cos\varphi$ — (9). Подставляя (8) в (9), получаем $P=\frac{U^2\sqrt{R^2+(2\pi\nu L)^2}}{4\pi\nu RL}$ — (10). Решая совместно (3), (4) и (10), находим $R=\frac{U^2\sqrt{tg^2\varphi+1}}{2P}=40$ Ом и

$$L=\frac{U^2\sqrt{tg^2\varphi+1}}{4\pi\nu P tg\varphi}=74\text{ мГн}.$$

14.28. В цепь переменного тока напряжением $U=220$ В включены последовательно емкость C, сопротивление R и индуктивность L. Найти падение напряжения U_R на сопротивлении, если известно, что падение напряжения на конденсаторе $U_C=2U_R$, на индуктивности $U_L=3U_R$.

Решение.

Если емкость сопротивление и индуктивность включены в цепь переменного тока последовательно, то $U = \frac{U_R}{\sqrt{2}} + \frac{U_L}{\sqrt{2}} - \frac{U_C}{\sqrt{2}}$ — (1), где U_R, U_L и U_C, — падения напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости. По условию $U_C = 2U_R$ — (2) и $U_L = 3U_R$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $U = \frac{2U_R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}U_R$, откуда падение напряжения на сопротивлении $U_R = \frac{U}{\sqrt{2}} = 155{,}56$ **В.**

Глава V
ОПТИКА

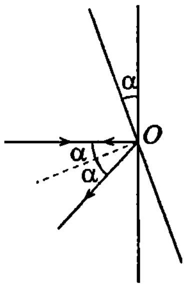
§ 15. Геометрическая оптика и фотометрия

Значение показателя преломления n для некоторых веществ можно найти в таблице 18 приложения.

15.1. Горизонтальный луч света падает на вертикально расположенное зеркало. Зеркало поворачивается на угол α около вертикальной оси. На какой угол θ повернется отраженный луч?

Решение:

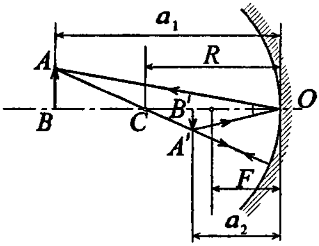
При повороте зеркала на угол α перпендикуляр к зеркалу, восстановленный в точке O падения луча, также повернется на угол α, поэтому угол падения тоже будет равен α, а угол между падающим и отраженным лучами равен 2α.



15.2. Радиус кривизны вогнутого зеркала $R = 20$ см. На расстоянии $a_1 = 30$ см от зеркала поставлен предмет высотой $y_1 = 1$ см. Найти положение и высоту y_2 изображения. Дать чертеж.

Решение:

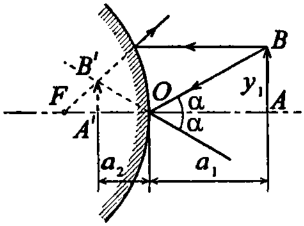
Фокусное расстояние зеркала $F = \frac{R}{2} = 10$ см. Подставим значения a_1 и F в формулу вогнутого зеркала: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{F}$; отсюда $a_2 = \frac{Fa_1}{a_1 - F} = 15$ см. Т. к. стержень



расположен за центром зеркала, то его изображение действительное ($f > 0$), обратное, уменьшенное. Увеличение $k = \frac{a_2}{a_1} = 0{,}5$. Следовательно, высота изображения $y_2 = ky_1 = 0{,}5$ см.

15.3. На каком расстоянии a_2 от зеркала получится изображение предмета в выпуклом зеркале с радиусом кривизны $R = 40$ см, если предмет помещен на расстоянии $a_1 = 30$ см от зеркала? Какова будет высота y_2 изображения, если предмет имеет высоту $y_1 = 2$ см? Проверить вычисления, сделав чертеж на миллиметровой бумаге.

Решение:



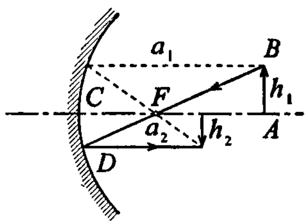
Изображение $A'B'$ предмета AB мнимое, прямое, уменьшенное. Фокусное расстояние зеркала $F = -\frac{R}{2} = -20$ см. Используя формулу зеркала, имеем $\frac{1}{a_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{12}$, откуда $a_2 = -12$ см. Увеличение $k = \frac{|a_2|}{a_1} = 0{,}4$. Высота изображения $y_2 = ky_1 = 0{,}8$ см.

15.4. Выпуклое зеркало имеет радиус кривизны $R = 60$ см. На расстоянии $a_1 = 10$ см от зеркала поставлен предмет высотой $y_1 = 2$ см. Найти положение и высоту y_2 изображения. Дать чертеж.

Решение:
Изображение мнимое, прямое, уменьшенное (см. рисунок к задаче 15.3). Фокусное расстояние зеркала $F=-\frac{R}{2}=$ $=-30$ см. Используя формулу зеркала, имеем $\frac{1}{a_2}=\frac{1}{F}-\frac{1}{a_1}$, откуда $a_2=-7{,}5$ см. Увеличение $k=\frac{|a_2|}{a_1}=0{,}75$. Высота изображения $y_2=ky_1=1{,}5$ см.

15.5. В вогнутом зеркале с радиусом кривизны $R=40$ см хотят получить действительное изображение, высота которого вдвое меньше высоты самого предмета. Где нужно поставить предмет и где получится изображение?

Решение:
Из подобия треугольников ABF и CDF следует, что $\frac{h_2}{h_1}=\frac{F}{a_1-F}$ — (1). По формуле вогнутого зеркала имеем $\frac{1}{F}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$ — (2), откуда $a_2=\frac{a_1F}{a_1-F}$ — (3). Из



сравнения соотношений (1) и (2) получаем $\frac{h_1}{h_2}=\frac{a_1}{a_2}$. По условию $\frac{h_1}{h_2}=2$, следовательно, $\frac{a_1}{a_2}=2$ или $a_1=2a_2$ — (4). Фокусное расстояние зеркала $F=\frac{R}{2}=20$ см. Из (2) найдем $F=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}$, подставляя (4), получим $F=a_2$, следовательно, $a_1 = 2F = R$. Таким образом, предмет нужно поместить в центр кривизны зеркала, а его изображение получится в фокусе.

15.6. Высота изображения предмета в вогнутом зеркале вдвое больше высоты самого предмета. Расстояние между предметом и изображением $a_1 + a_2 = 15$ см. Найти фокусное расстояние F и оптическую силу D зеркала.

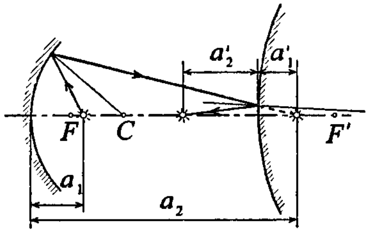
Решение:

Имеем $\frac{h_2}{h_1} = 2$, следовательно, $\frac{a_2}{a_1} = 2$ (см. задачу 15.5). По условию $a_1 + a_2 = 15$ см. Т. к. $a_2 = 2a_1$, то $a_1 + 2a_1 = 15$ см; $a_1 = 5$ см; $a_2 = 10$ см. Изображение получится прямое, мнимое и увеличенное, если предмет находится между зеркалом и фокусом. Тогда по формуле зеркала $\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$, откуда фокусное расстояние $F = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} = 10$ см. Оптическая сила зеркала $D = \frac{1}{F} = 10$ дптр.

15.7. Перед вогнутым зеркалом на главной оптической оси перпендикулярно к ней на расстоянии $a_1 = \frac{4F}{3}$ от зеркала поставлена горящая свеча. Изображение свечи в вогнутом зеркале попадает на выпуклое зеркало с фокусным расстоянием $F' = 2F$. Расстояние между зеркалами $d = 3F$, их оси совпадают. Изображение свечи в первом зеркале играет роль мнимого предмета по отношению ко второму зеркалу и дает действительное изображение, расположенное между обеими зеркалами. Построить это изображение и найти общее линейное увеличение k системы.

Решение:

Имеем $\frac{1}{F}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$ — (1); $\frac{1}{2F}=\frac{1}{a_1'}-\frac{1}{a_2'}$ — (2); по условию $a_2-a_1'=3F$ — (3). Увеличение вогнутого зеркала $k_1=\frac{a_2}{a_1}$, увеличение



выпуклого зеркала $k_2=\frac{a_2'}{a_1'}$, общее увеличение системы $k=k_1k_2=\frac{a_2a_2'}{a_1a_1'}$ — (4). По условию $a_1=\frac{4F}{3}$, тогда из (1) найдем $a_2=4F$. Подставляя значение a_2 в (3), получим $4F-a_1'=3F$, откуда $a_1'=F$. Тогда из (2) найдем $a_2'=2F$. Подставляя значения a_1, a_2, a_1' и a_2' в (4), найдем $k=\frac{4F\cdot 2F\cdot 3}{4F\cdot F}=6$.

15.8. Где будет находиться и какой размер y_2 будет иметь изображение Солнца, получаемое в рефлекторе, радиус кривизны которого $R=16$ м?

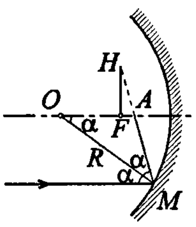
Решение:

Диаметр Солнца $y_1=1{,}4\cdot 10^9$ м, расстояние от Земли до Солнца $a_1=1{,}5\cdot 10^{11}$ м. Имеем $\frac{y_2}{y_1}=\frac{a_2}{a_1}$ — (1), где a_2 — расстояние от рефлектора до изображения Солнца (см. задачу 15.5). По формуле зеркала $\frac{2}{R}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$, откуда

$a_2 = \dfrac{Ra_1}{2a_1 - R} \approx 8$ м, т. е. изображение будет находиться в фокусе. Это следует также из того, что расстояние до Солнца очень велико и его лучи можно считать параллельными, следовательно, они дадут изображение в фокусе. Из (1) найдем $y_2 = y_1 a_2 / a_1 = 7{,}5$ см.

15.9. Если на зеркало падает пучок света, ширина которого определяется углом α, то луч, идущий параллельно главиой оптической оси и падающий на край зеркала, после отражения от него пересечет оптическую ось уже не в фокусе, а на некотором расстоянии AF от фокуса. Расстояние $x = AF$ называется продольной сферической аберрацией, расстояние $y = FH$ — поперечной сферической аберрацией. Вывести формулы, связывающие эти аберрации с углом α и радиусом кривизны зеркала R.

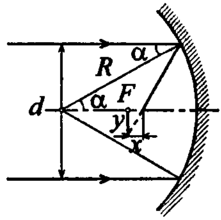
Решение:



Из равнобедренного треугольника OAM имеем $OA = \dfrac{R}{2}\cos\alpha$. Продольная сферическая аберрация $x = AF = OA - \dfrac{R}{2}$, или $x = \dfrac{R}{2}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$. При $\alpha = 0$ имеем $\cos\alpha = 1$, следовательно, $x = 0$. Поперечная сферическая аберрация $y = FH = x tg\angle HAF$. Но $\angle HAF = 2\alpha$, как внешний угол треугольника AOM, отсюда $y = \dfrac{R}{2} \times \left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - 1\right) tg2\alpha$. При $\alpha = 0$ имеем $\cos\alpha = 1$, следовательно, $tg2\alpha = 0$ и $y = 0$.

15.10. Вогнутое зеркало с диаметром отверстия $d = 40$ см имеет радиус кривизны $R = 60$ см. Найти продольную x и поперечную y сферическую аберрацию краевых лучей, параллельных главной оптической оси.

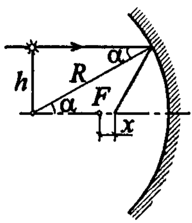
Решение:



Из задачи 15.9 имеем $x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$ – (1); $y = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)tg2\alpha$ — (2). Из рисунка видно, что $\sin\alpha \approx \frac{d/2}{R} \approx 0{,}33$, отсюда $\alpha \approx 19{,}3°$; $\cos\alpha \approx 0{,}94$; $tg2\alpha \approx 0{,}8$. Подставляя числовые данные, получим $x = 1{,}8$ см; $y = 1{,}44$ см.

15.11. Имеется вогнутое зеркало с фокусным расстоянием $F = 20$ см. На каком наибольшем расстоянии h от главной оптической оси должен находиться предмет, чтобы продольная сферическая аберрация x составляла не больше 2% фокусного расстояния F?

Решение:

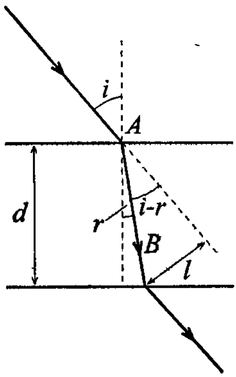


Имеем $x = F\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$ — (1) (см. задачу 15.9). Из рисунка видно, что $h = R\sin\alpha$ или $\sin\alpha = \frac{h}{R} = \frac{h}{2F}$ — (2). Из основного тригонометрического тождества имеем $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ или, с учетом (2), $\cos\alpha = \sqrt{1 - h^2/4F^2}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и учитывая, что $x = 0{,}02F$, получим $0{,}02F = F\left(\frac{1}{\sqrt{1 - h^2/\left(4F^2\right)}} - 1\right)$;

$$\frac{1}{\sqrt{1 - h^2/\left(4F^2\right)}} = 1{,}02;\ \frac{h^2}{4F^2} = 0{,}04;\ h = 2F \cdot 0{,}2 = 0{,}08 \text{ м}.$$

15.12. Луч света падает под углом $i = 30°$ на плоскопараллельную стеклянную пластинку и выходит из нее параллельно первоначальному лучу. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Какова толщина d пластинки, если расстояние между лучами $l = 1{,}94$ см?

Решение:



Смещение луча $l = AB\sin(i - r)$, где r — угол преломления луча в стекле. Толщина пластинки d связана со смещением луча следующим соотношением: $d = AB\cos r = \dfrac{l\cos r}{\sin i\cos r - \cos i\sin r}$. Согласно закону преломления $\sin r = \dfrac{\sin i}{n}$, т. е. $\cos r = \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n^2}}$, поэтому $d = \dfrac{l\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\sin i\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i\right)}$.

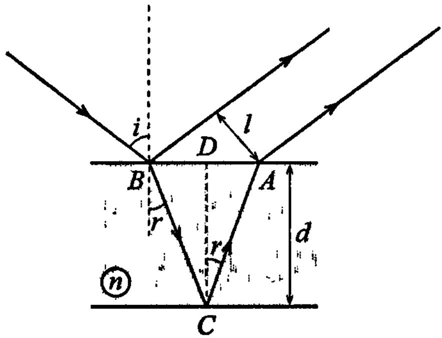
Подставляя числовые данные, получим $d = 0{,}1$ м.

15.13. На плоскопараллельиую стеклянную пластинку толщиной $d = 1$ см падает луч света под углом $i = 60°$. Показатель преломления стекла $n = 1{,}73$. Часть света отражается, а часть, преломляясь, проходит в стекло, отражается от нижней поверхности пластинки и, преломляясь вторично, выходит обратно в воздух параллельно первому отраженному лучу. Найти расстояние l между лучами.

Решение:

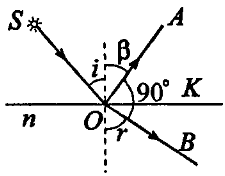
Согласно закону преломления $\sin r = \dfrac{\sin i}{n} = 0{,}5$, следовательно, угол преломления $r = 30°$. Из ΔADC найдем $AD = d\cdot tgr$, тогда $AB = 2d\cdot tgr$, а $l = AB\sin(90° - i) =$

$= 2d \cdot tgr\, sin 30°$. Подставляя числовые данные, получим $l = 0{,}58$ см.



15.14. Луч света падает под углом i на тело с показателем преломления n. Как должны быть связаны между собой величины i и n, чтобы отраженный луч был перпендикулярен к преломленному?

Решение:



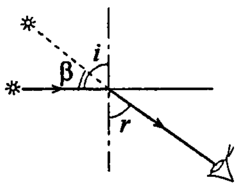
Согласно закону преломления $\frac{sin\, i}{sin\, r} = \frac{1}{n}$ — (1). Из рисунка видно, что $\angle KOB = \beta$, $\angle KOA = r$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Поскольку по закону отражения $\beta = i$, а $\angle KOB + \angle KOA = 90°$ (по условию), то $i + r = 90°$. Совместное решение (1) и (2) дает $\frac{sin\, i}{sin\, r} = \frac{sin\, i}{sin(90° - i)} = \frac{sin\, i}{cos\, i} = tgi = n$.

15.15. Показатель преломления стекла $n = 1{,}52$. Найти предельный угол полного внутреннего отражения β для поверхности раздела: а) стекло — воздух; б) вода — воздух; в) стекло — вода.

Решенне:
Полное внутреннее отражение происходит, если значение преломленного угла $r \geq 90°$. При $r = 90°$ из закона преломления имеем $sin\,\beta = \frac{n_2}{n_1}$. Подставляя значение n_1 и n_2 для различных поверхностей раздела, найдем: а) $sin\,\beta = \frac{1}{1,52} = 0,65$; $\beta \approx 41°$; б) $sin\,\beta = \frac{1}{1,33} = 0,75$; $\beta \approx 49°$; в) $sin\,\beta = \frac{1,33}{1,52} = \frac{1,33}{1,52} = 0,88$; $\beta \approx 61°$.

15.16. В каком направлении пловец, нырнувший в воду, видит заходящее Солнце?

Решение:



Угол падения солнечных лучей $i \doteq 90°$. Из закона преломления имеем $\frac{sin\,i}{sin\,r} = n$ или $\frac{1}{sin\,r} = n$, откуда $sin\,r = \frac{1}{n} = 0,75$; $r \approx 49°$. Следовательно, пловец видит Солнце под углом $\beta = i - r = 41°$ к поверхности воды.

15.17. Луч света выходит из скипидара в воздух. Предельный угол полного внутреннего отражения для этого луча $\beta = 42°23'$. Найти скорость v_1 распространения света в скипидаре.

Решение:
Физический смысл абсолютного показателя преломления заключается в том, что он показывает, во сколько раз скорость света в вакууме больше скорости света в данном веществе. Тогда скорости распространения света в скипидаре и в воздухе связаны с соответствующими пока-

зателями преломления соотношением $\frac{n_1}{n_2}=\frac{v_2}{v_1}$ — (1).

Поскольку $n_2=1$, а $v_2=c$, то из (1) $n_1=\frac{c}{v_1}$ — (2), где $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света в воздухе. Значение n_1 найдем из соотношения $\sin\beta=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1}{n_1}$, откуда $n_1=\frac{1}{\sin\beta}$.

Тогда из (2) найдем $v_1=\frac{c}{n_1}=c\sin\beta$. Подставляя числовые данные, получим $v_1=2{,}02\cdot10^8$ м/с.

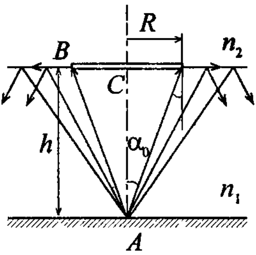
15.18. На стакан, наполненный водой, положена стеклянная пластинка. Под каким углом i должен падать на пластинку луч света, чтобы от поверхности раздела вода — стекло произошло полное внутреннее отражение? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

Решение:

По закону преломления $\frac{\sin i}{\sin\beta}=n$. Если $\sin\beta=\frac{n_1}{n}$, где n_1 — показатель преломления воды, то произойдет полное внутреннее отражение от поверхности раздела стекло — вода. Тогда $\sin i=n\sin\beta=n_1=1{,}33$, т. е. условия задачи неосуществимы.

15.19. На дно сосуда, наполненного водой до высоты $h=10$ см, помещен точечный источник света. На поверхности воды плавает круглая непрозрачная пластинка так, что ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус r должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти через поверхность воды?

Решение:



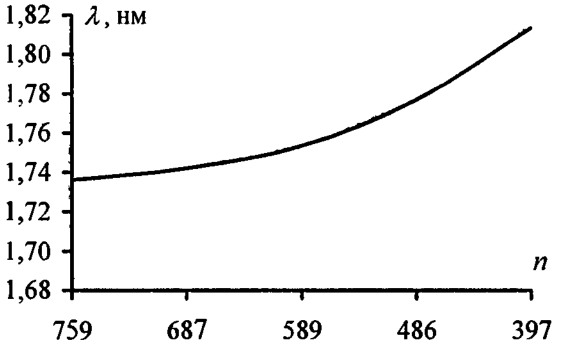
Лучи, идущие из светящейся точки A, падают на границу раздела вода — воздух расходящимся пучком. Те лучи, которые падают на границу раздела под углом, большим предельного α_0, отразятся в воду, испытывая полное отражение, а в воздух выйдут лишь лучи, заключенные внутри конуса раднусом r и вершиной в точке A. Для лучей, идущих из воды в воздух под предельным углом, можно записать: $sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}$ —(1), где n_1 и n_2 — показатели преломления воды и воздуха соответственно. Из ΔABC $r = htg\alpha_0$ — (2). Решая совместно (1) и (2) относительно раднуса пластинки, получим: $r = \frac{hn_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$. Полагая, что показатели преломления воздуха и воды соответственно $n_1 = \frac{4}{3}$ и $n_2 = 1$, находим: $r = \frac{3}{\sqrt{7}}h = 11{,}3$ см.

15.20. При падении белого света под углом $i = 45°$ на стеклянную пластинку углы преломления β лучей различных длин волн получились следующие:

λ, нм	759	687	589	486	397
β	24°2′	23°57′	23°47′	23°27′	22°57′

Построить график зависимости показателя преломления n материала пластинки от длины волны λ.

Решение:



Имеем $\frac{\sin i}{\sin\beta} = n$. Т. к. $\sin i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $n = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\beta}$. Подставляя числовые данные, дополним таблицу значениями n и построим график зависимости $n = f(\lambda)$.

λ, нм	759	687	589	486	397
β	24°2′	23°57′	23°47′	23°27′	22°57′
N	1,74	1,74	1,75	1,78	1,81

15.21. Показатели преломления некоторого сорта стекла для красного и фиолетового лучей равны $n_{кр} = 1{,}51$ и $n_ф = 1{,}53$. Найти предельные углы полного внутреннего отражения $\beta_{кр}$ и $\beta_ф$ при падении этих лучей на поверхность раздела стекло — воздух.

Решение:

Имеем $\sin\beta = \frac{1}{n}$ (см. задачу 15.15). Отсюда $\sin\beta_{кр} = \frac{1}{n_{кр}} = 0{,}66$; $\beta_{кр} = 41{,}5°$; $\sin\beta_ф = \frac{1}{n_ф} = 0{,}65$; $\beta_ф = 40{,}8°$.

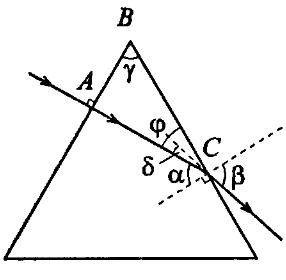
15.22. Что происходит при падении белого луча под углом $i = 41°$ на поверхность раздела стекло — воздух, если взять стекло предыдущей задачи? (Воспользоваться результатами предыдущей задачи.)

Решение:

Поскольку полное внутреннее отражение происходит при значениях угла падения $i > \beta$ (предельного угла полного отражения), то фиолетовые лучи испытают полное внутреннее отражение, а красные лучи выйдут из стекла в воздух.

15.23. Монохроматический луч падает нормально на боковую поверхность призмы, преломляющий угол которой $\gamma = 40°$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1{,}5$. Найти угол отклонения δ луча, выходящего из призмы, от первоначального направления.

Решение:



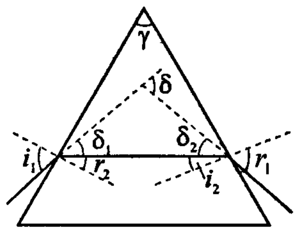
Т. к. луч падает по нормали, то на первой поверхности он испытывает преломления. Обозначим через α и β углы падения и преломления на второй поверхности. δ — угол между входящим лучом и продолжением луча, выходящего из призмы. Угол $\varphi = \delta + (90° - \beta)$ — (1). Из ΔABC: $90° + \gamma + \varphi = 180°$; $\gamma + \varphi = 90°$ — (2). Подставим (2) в (1): $\gamma + \varphi + 90° - \beta = 90°$. Отсюда $\delta = \beta - \gamma$ — (3). Угол $\alpha = 90° - \varphi$. Из уравнения (2) $\varphi = 90° - \gamma$, следовательно, $\alpha = \gamma = 40°$. Угол β найдем из закона преломления $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{1}{n}$, откуда $sin\beta = n\,sin\alpha = n\,sin\gamma$; $sin\beta = 1{,}5 \cdot 0{,}64 =$ $= 0{,}96$, отсюда $\beta \approx 74°$. Тогда из (2) $\delta \approx 74° - 40° = 34°$.

15.24. Монохроматический луч падает нормально на боковую поверхность призмы и выходит из нее отклоненным на угол $\delta = 25°$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1{,}7$. Найти преломляющий угол γ призмы.

Решение:
См. решение задачи 15.23. Из уравнения (3) $\beta = \delta + \gamma$. Из закона преломления $n\sin\alpha = \sin\beta$; $\sin\beta = \sin(\delta+\gamma) = \sin\delta\cos\gamma + \cos\delta\sin\gamma$. Но $\alpha = \gamma$, отсюда $\sin\alpha = \sin\gamma$; $n\sin\gamma = \sin\delta\cos\gamma + \cos\delta\sin\gamma$; $\sin\gamma(n - \cos\delta) = \sin\delta\cos\gamma$;
$tg\gamma = \dfrac{\sin\delta}{n-\cos\delta}$; $tg\gamma = \dfrac{0{,}42}{1{,}7-0{,}9} = 0{,}53$; $\gamma \approx 28°$.

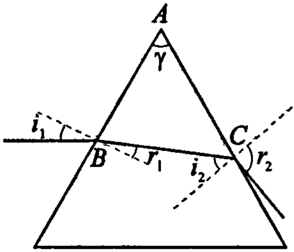
15.25. Преломляющий угол равнобедренной призмы $\gamma = 10°$. Монохроматический луч падает на боковую грань под углом $i = 10°$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1{,}6$. Найти угол отклонения δ луча от первоначального направления.

Решение:
Преломляющий угол призмы и угол падения луча малы, для малых углов падения и преломления получаем $r_2 = \dfrac{\gamma}{n}$, $r_1 = i_2 n$. Поскольку $i_2 = \gamma - r_2$, находим $i_2 = \gamma - r_2$, $r_1 = \gamma n - i_1$. Угол отклонения луча призмой $\delta = \delta_1 + \delta_2 = (i_1 - r_2) + (r_1 - i_2) = \gamma(n-1)$. Подставляя числовые данные, получим $\delta = 6{,}2°$.



15.26. Преломляющий угол призмы $\gamma = 45°$. Показатель преломления материала призмы для некоторого монохроматического луча $n = 1{,}6$. Каков должен быть наибольший угол падения i этого луча на призму, чтобы при выходе луча из нее не наступало полное внутреннее отражение?

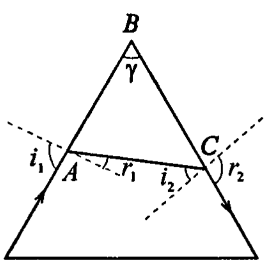
Решение:



Полное внутреннее отражение выходящего луча наступит при $r_2 = 90°$. Согласно закону преломления $\sin r_2 = n \sin i_2$ или $n \sin i_2 = 1$, откуда $\sin i_2 = \frac{1}{n} = 0{,}625$; $i_2 = 38{,}7°$. Поскольку сумма углов γ, $90^o - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника ABC равна $180°$, найдем $r_1 = \gamma - i_2 = 6{,}3°$. Далее имеем $\sin i_1 = n \sin r_1$, откуда $i_1 = \arcsin(n \sin r_1) = 10°$. Т. е. при углах падения больших $10°$ наступит полное внутреннее отражение.

15.27. Пучок света скользит вдоль боковой грани равнобедренной призмы. При каком предельном преломляющем угле γ призмы преломленные лучи претерпят полное внутреннее отражение на второй боковой грани? Показатель преломления материала призмы для этих лучей $n = 1{,}6$.

Решение:

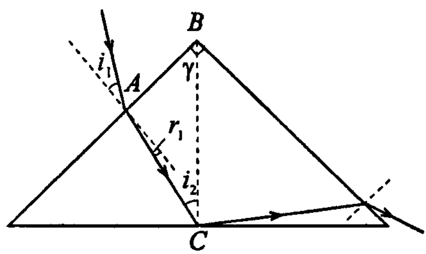


Полное внутреннее отражение выходящего луча наступит при $r_2 = 90°$. Согласно закону преломления $\sin r_2 = n \sin i_2$ или $n \sin i_2 = 1$, откуда $\sin i_2 = \frac{1}{n} = 0{,}625$; $i_2 = 38{,}7°$. Поскольку сумма углов γ, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника

ABC равна $180°$, найдем $\gamma = r_1 + i_2$ — (1). Далее имеем $\sin i_1 = n \sin r_1$, откуда $r_1 = \arcsin\frac{1}{n} = 38{,}7°$. Тогда из (1) $\gamma = 2 \cdot 38{,}7° = 77{,}4°$.

15.28. Монохроматический луч падает на боковую поверхность прямоугольной равнобедренной призмы. Войдя в призму, луч претерпевает полное внутреннее отражение от основания призмы и выходит через вторую боковую поверхность призмы. Каким должен быть наименьший угол падения i луча на призму, чтобы еще происходило полное внутреннее отражение? Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1{,}5$.

Решение:



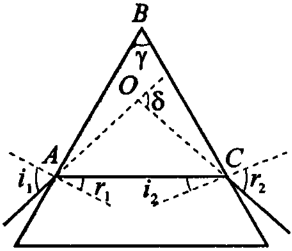
Полное внутреннее отражение выходящего луча наступит при $r_2 = 90°$. Согласно закону преломления $\sin r_2 = n \sin i_2$ или $n \sin i_2 = 1$, откуда

$i_2 = \arcsin\frac{1}{n} = 41{,}8°$.

Поскольку сумма углов $45°$, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника ABC равна $180°$, найдем $r_1 = 45° - i_2 = 3{,}2°$. Далее имеем $\sin i_1 = n \sin r_1$, откуда $i_1 = \arcsin(n \sin r_1) = 4{,}7°$.

15.29. Монохроматический луч падает на боковую поверхность равнобедренной призмы и после преломления идет в призме параллельно ее основанию. Выйдя из призмы, он оказывается отклоненным на угол δ от своего первоначального направления. Найти связь между преломляющим углом призмы γ, углом отклонения луча δ и показателем преломления для этого луча n.

Решение:



Согласно закону преломления $\sin i_1 = n \sin r_1$ — (1). Поскольку сумма углов γ, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника ABC равна 180°, найдем $\gamma = r_1 + i_2$ — (2). ΔABC — равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$ или $90° - r_1 = = 90° - i_2$, откуда $r_1 = i_2$ — (3). Тогда из (2) $\gamma = 2i_2$ или $i_2 = \dfrac{\gamma}{2}$ — (4). ΔAOC также равнобедренный, сумма его углов $180° - \delta + 2(i_1 - r_1) = 180°$, откуда $\delta = 2i_1 - 2r_1$; $r_1 = i_1 = \dfrac{\delta}{2}$ — (5). Подставляя (5) в (2), с учетом (4), получим $\gamma = i_1 - \dfrac{\delta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$, откуда $i_1 = \dfrac{\gamma + \delta}{2}$ — (6). Поскольку $r_1 = i_2 = \dfrac{\gamma}{2}$, и с учетом (6), уравнение (1) можно записать в виде $\sin\dfrac{\gamma + \delta}{2} = n \sin\dfrac{\gamma}{2}$.

15.30. Луч белого света падает на боковую поверхность равнобедренной призмы под таким углом, что красный луч выходит из нее перпендикулярно к второй грани. Найти углы отклонения $\delta_{кр}$ и $\delta_ф$ красного и фиолетового лучей от первоначального направления, если преломляющий угол призмы $\gamma = 45°$. Показатели преломления материала призмы для красного и фиолетового лучей равны $n_{кр} = 1{,}37$ и $n_ф = 1{,}42$.

Решение:

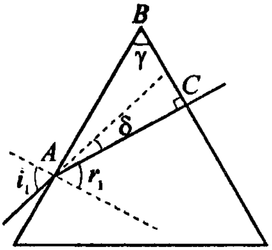


Рис.1

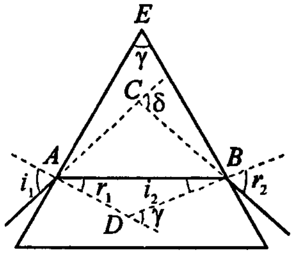


Рис.2

Красный луч выходит из второй грани под углом 0° (рис. 1), следовательно, $n_{кр}\, sin\, i_2 = 0$, откуда $\alpha_2 = 0°$, т. е. красный луч падает на вторую грань перпендикулярно к ней. В ΔABC угол $\angle BAC$ равен $45°$. Тогда $r_1 = 90° - BAC = 45°$. По закону преломления $sin\, i_1 = n_{кр}\, sin\, r_1$, откуда $i_1 = arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}n_{кр} = 75{,}6°$. Таким образом, мы найдем угол падения белого луча. Сумма углов треугольника ABC равна $\delta_{кр}(90° - i_1) + 45° + 90° = 180°$, откуда найдем угол отражения красного луча $\delta_{кр} = 30{,}6°$. Угол отражения фиолетового луча $\delta_ф = (i_1 - r_1) + (r_2 - i_2)$ — (1), как внешний угол ΔABC (рис. 2). Кроме того, $\angle AEB = \angle BDK$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Угол BDK является внешним углом треугольника ABD, поэтому $\gamma = r_1 + i_2$ — (2). По закону преломления света $sin\, i_1 = n_ф\, sin\, r_1$ — (3) и $sin\, r_2 = n_ф\, sin\, i_2$ — (4). Из (3) найдем $r_1 = arcsin\left(\frac{sin\, i_1}{n_ф}\right) = 43°$. Из (2): $i_2 = \gamma - r_1 = 45° - 43° = 2°$.

Из (4): $r_2 = arcsin(n_ф\, sin\, i_2) = 2{,}8°$. Подставив найденные значения углов в (1), получим $\delta_ф = (75{,}6° - 43°) + (2{,}8° - 2°) = 33{,}4°$.

15.31. Найти фокусное расстояние F_1 кварцевой линзы для ультрафиолетовой линии спектра ртути ($\lambda_1 = 259$ нм), если фокусное расстояние для желтой линии натрия ($\lambda_2 = 589$ нм) $F_2 = 16$ см. Показатели преломления кварца для этих длин волн равны $n_1 = 1{,}504$ и $n_2 = 1{,}458$.

Решение:

Для линзы, имеющей радиусы кривизны R_1 и R_2, имеем $(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{F}$ — (1), где n — показатель преломления материала, из которого изготовлена линза. Для желтой линии из (1) имеем $F_2 = \frac{R_1 R_2}{(n_2 - 1)(R_2 - R_1)}$, откуда $\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = F_2(n_2 - 1)$ — (2). Поскольку для ультрафиолетовой линии $F_1 = \frac{R_1 R_2}{(n_1 - 1)(R_2 - R_1)}$ — (3), то, подставляя (2) в (3), получим $F_1 = \frac{F_2(n_2 - 1)}{n_1 - 1} = 0{,}145$ м.

15.32. Найти фокусное расстояние F для следующих линз: а) линза двояковыпуклая: $R_1 = 15$ см и $R_2 = -25$ см; б) линза плоско-выпуклая: $R_1 = 15$ см и $R_2 = \infty$ см; в) линза вогнуто-выпуклая (положительный мениск): $R_1 = 15$ см и $R_2 = 25$ см; г) линза двояковогнутая: $R_1 = -15$ см и $R_2 = 25$ см; д) линза плоско-вогнутая: $R_1 = \infty$ см; $R_2 = -15$ см; е) линза выпукло-вогнутая (отрицательный мениск): $R_1 = 25$ см, $R_2 = 15$ см. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}5$.

Решение:

По формуле линзы $(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{F}$, — (1), откуда $F=\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}$ — (2). В случае плоско-выпуклой линзы $(R_1=\infty)$ уравнение (1) имеет вид: $(n-1)\frac{1}{R_2}=\frac{1}{F}$, откуда $F=\frac{R_1}{n-1}$ — (3). В случае плоско-вогнутой линзы $(R_1=\infty)$ уравнение (1) имеет вид: $-(n-1)\frac{1}{R_2}=\frac{1}{F}$, откуда $F=-\frac{R_2}{n-1}$ — (4). Подставляя числовые данные, получим:

а) из (2) $F=\frac{0{,}15\cdot(-0{,}25)}{0{,}5\cdot(-0{,}25-0{,}15)}=0{,}188$ м;

б) из (3) $F=\frac{0{,}15}{0{,}5}=0{,}3$ м;

в) из (2) $F=\frac{0{,}15\cdot 0{,}25}{0{,}5\cdot(0{,}25-15)}=0{,}75$ м;

г) из (2) $F=\frac{-0{,}15\cdot 0{,}25}{0{,}5(0{,}25+0{,}15)}=-0{,}188$ м;

д) из (4) $F=-\frac{-0{,}15}{0{,}5}=0{,}3$ м;

е) из (2) $F=\frac{0{,}25\cdot 0{,}15}{0{,}5(0{,}15-0{,}25)}=-0{,}75$ м.

15.33. Из двух стекол с показателями преломления $n_1=1{,}5$ и $n_2=1{,}7$ сделаны две одинаковые двояковыпуклые линзы. Найти отношение $\frac{F_1}{F_2}$ их фокусных расстояний. Какое действие каждая из этих линз произведет на луч, параллельный оптической оси, если погрузить линзы в прозрачную жидкость с показателем преломления $n = 1{,}6$?

Решение:

Имеем $F_1 = \dfrac{R_1R_2}{(n_1-1)(R_2-R_1)}$; $F_2 = \dfrac{R_1R_2}{(n_2-1)(R_2-R_1)}$ (см. задачу 15.32). Отсюда $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{n_2-1}{n_1-1} = 1{,}4$.

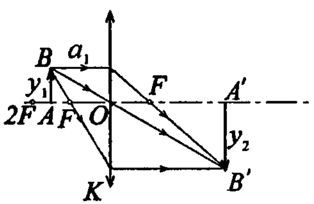
15.34. Радиусы кривизны поверхностей двояковыпуклой линзы $R_1 = R_2 = 50$ см. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}5$. Найти оптическую силу D линзы.

Решение:

Согласно формуле тонкой линзы $D = (n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$. Поскольку по условию $R_1 = R_2 = R$, то $D = \dfrac{2(n-1)}{R}$. Подставляя числовые данные, получим $D = \dfrac{2(1{,}5-1)}{0{,}5} = 2$ дптр.

15.35. На расстоянии $a_1 = 15$ см от двояковыпуклой линзы, оптическая сила которой $D = 10$ дптр, поставлен перпендикулярно к оптической оси предмет высотой $y_1 = 2$ см. Найти положение и высоту y_2 изображения. Дать чертеж.

Решение:



Фокусное расстояние линзы $F = \dfrac{1}{D} = 0{,}1$ м, т. е. предмет находится за фокусом. По условию $AO = a_1 = 0{,}15$ м, $OF = F = 0{,}1$ м, $AB = y_1 = 0{,}02$ м.

Поскольку ΔABO подобен $\Delta A'B'O$, то $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O}$ — (1). Кроме того, ΔABF подобен ΔOKF, следовательно, $\frac{AB}{OK} = \frac{AF}{OF}$ или $\frac{0{,}02}{OK} = \frac{0{,}05}{0{,}1}$, откуда $OK = 0{,}04$ м. По построению $A'B' = OK = 0{,}04$ м. Подставляя числовые данные в (1), получим $\frac{0{,}02}{0{,}04} = \frac{0{,}15}{OA'}$, откуда $OA' = 0{,}3$ м.

15.36. Доказать, что в двояковыпуклой линзе с равными радиусами кривизны поверхностей и с показателем преломления $n = 1{,}5$ фокусы совпадают с центрами кривизны.

Решение:

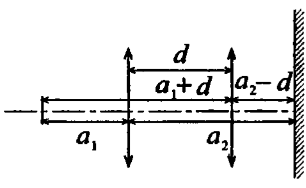
По формуле тонкой линзы $\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, откуда при $R_1 = R_2 = R$, имеем $F = \frac{R}{2(n-1)}$. При $n = 1{,}5$ получим $F = \frac{R}{2(1{,}5-1)} = R$.

15.37. Линза с фокусным расстоянием $F = 16$ см дает резкое изображение предмета при двух положениях, расстояние между которыми $d = 6$ см. Найти расстояние $a_1 + a_2$ от предмета до экрана.

Решение:

Запишем формулу тонкой линзы для двух положений:

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{F}$ — (1) и $\frac{1}{a_1 + d} + \frac{1}{a_2 - d} = \frac{1}{F}$ — (2). Предмет и



экран неподвижны, следовательно, в первом случае предмет по отношению к линзе находится между первым и вторым фокусом, а во втором случае за вторым фокусом. Из (1) получим $\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}=\frac{1}{F}$ — (3). Из (2) получим $\frac{a_1+a_2}{(a_1+d)(a_2-d)}=\frac{1}{F}$ — (4). Приравняем левые части уравнений (3) и (4) $\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}=\frac{a_1+a_2}{(a_1+d)(a_2-d)}$, откуда $a_1a_2=(a_1+d)(a_2-d)$. Раскрыв скобки и проведя небольшое преобразование, получим $a_1=a_2-d$ — (5). Подставляя (5) в (3), получим $\frac{a_2-d+a_2}{(a_2-d)a_2}=\frac{1}{F}$; $1+\frac{a_2}{a_2-d}=\frac{1}{F}$; $a_2=\frac{d(1-F)}{1-2F}=0{,}74$ м. Тогда из (5) $a_1+a_2=2a_2-d=0{,}88$ м.

15.38. Двояковыпуклая линза с радиусами кривизны поверхностей $R_1=R_2=12$ см поставлена на таком расстоянии от предмета, что изображение на экране получилось в k раз больше предмета. Найти расстояние a_1+a_2 от предмета до экрана, если: а) $k=1$; б) $k=20$; в) $k=0{,}2$. Показатель преломления материала линзы $n=1{,}5$.

Решение:

Линейное увеличение линзы $k=\frac{a_2}{a_1}$ — (1). По формуле линзы $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ или, при $R_1=R_2=R$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=\frac{2(n-1)}{R}$; $\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}=\frac{2(n-1)}{R}$ — (2). Из (1) имеем

$a_2 = ka_1$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $\frac{1+k}{ka_1} = \frac{2(n-1)}{R}$, откуда $a_1 = \frac{R(1+k)}{2k(n-1)}$. Подставляя числовые данные, получим:

а) $a_1 = 0{,}24$ м; $a_2 = ka_1 = 0{,}24$ м; $a_1 + a_2 = 0{,}48$ м;

б) $a_1 = 0{,}126$ м; $a_2 = ka_1 = 2{,}52$ м; $a_1 + a_2 = 2{,}65$ м;

в) $a_1 = 0{,}72$ м; $a_2 = ka_1 = 0{,}144$ м; $a_1 + a_2 = 0{,}864$ м.

15.39. Линза предыдущей задачи погружена в воду. Найти ее фокусное расстояние F.

Решение:

В общем случае формула для расчета фокусного расстояния линзы имеет вид: $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ — (1), где $n_1 = 1{,}5$ — показатель преломления стекла, $n_2 = 1{,}33$ — показатель преломления воды. Т. к. $R_1 = R_2 = R$, то из (1) получим $F = \frac{R}{2(n_1 / n_2 - 1)}$. Подставляя числовые данные, получим $F = 0{,}46$ м.

15.40. Решить предыдущую задачу при условии, что линза погружена в сероуглерод.

Решение:

Имеем $F = \frac{R}{2(n_1 / n_2 - 1)}$. Показатель преломления сероуглерода $n_2 = 1{,}63$. Подставляя числовые данные, получим $F = -0{,}75$ м. Т. е. линза будет рассеивающей.

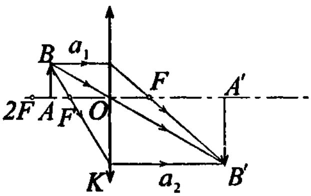
15.41. Найти фокусное расстояние F_2 линзы, погруженной в воду, если ее фокусное расстояние в воздухе $F_1 = 20$ см. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}6$.

Решение:

Имеем $F_1 = \frac{R}{2(n/n_1 - 1)}$ — (1); $F_2 = \frac{R}{2(n/n_2 - 1)}$, где n_1 — показатель преломления воздуха, $n_2 = 1{,}33$ — показатель преломления воды. Разделив (1) на (2), получим $\frac{F_1}{F_2} = \frac{n/n_2 - 1}{n/n_2 - 1} = \frac{n_1(n - n_2)}{n_2(n - n_1)}$. Отсюда $F_2 = \frac{F_1 n_2(n - n_1)}{n_1(n - n_2)} = 0{,}59$ **м.**

15.42. Плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны $R = 30$ см и показателем преломления $n = 1{,}5$ дает изображение предмета с увеличением $k = 2$. Найти расстояния a_1 и a_2 предмета и изображения от линзы. Дать чертеж.

Решенне:



Толстые линзы, имеющие раднус кривизны R_1 и R_2 — двояковыпуклые, или $R_1 = \infty$ и R_2 — плоско-выпуклые, проявляют себя как тонкие линзы, если рассматривать лучи, находящиеся вблизи главной оптической оси. Тогда аберрация не учитывается и построения аналогичны построениям в тонкой линзе. Линейное увеличение линзы $k = \frac{a_2}{a_1}$, откуда $a_2 = ka_1$ — (1). Для плоско-выпуклой линзы $\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R} = -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ — (2) (см. задачу 15.32). Из (2) имеем $\frac{n-1}{R} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$. Подставляя это выражение в (1), получим $\frac{n-1}{R} = \frac{1-k}{ka_1}$, откуда $a_1 = \frac{R(1-k)}{k(n-1)} = -0{,}9$ м. Тогда из (1) найдем $a_2 = 1{,}8$ м.

15.43. Найти продольную хроматическую аберрацию двояковыпуклой линзы из флинтгласа с радиусами кривизны $R_1 = R_2 = 8$ см. Показатели преломления флинтгласа для красного ($\lambda_{кр} = 760$ нм) и фиолетового ($\lambda_ф = 430$ нм) лучей равны $n_{кр} = 1{,}5$ и $n_ф = 1{,}8$.

Решение:

Имеем $F_1 = \dfrac{R_1}{2(n_1 - 1)}$ (см. задачу 15.36). Подставляя числовые данные, получим $F_1 = 0{,}08$ м. Аналогично $F_2 = \dfrac{R_2}{2(n_2 - 1)} = 0{,}05$ м. Таким образом, продольная хроматическая аберрация составляет $F_1 - F_2 = 0{,}03$ м.

15.44. На расстоянии $a_1 = 40$ см от линзы предыдущей задачи на оптической оси находится светящаяся точка. Найти положение изображения этой точки, если она испускает монохроматический свет с длиной волны: а) $\lambda_1 = 760$ нм; б) $\lambda_2 = 430$.

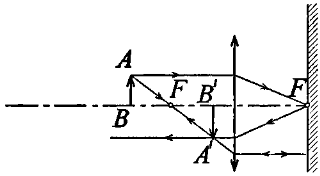
Решение:

Из формулы линзы имеем $a_2 = \dfrac{Fa_1}{a_1 - F}$ — (1). В задаче 15.43 мы нашли, что для данной линзы длине волны $\lambda_1 = 760$ нм соответствует фокусное расстояние $F_1 = 0{,}08$ м, а длине волны $\lambda_2 = 430$ нм соответствует фокусное расстояние $F_2 = 0{,}05$ м. Подставляя числовые данные в (1), получим: а) $a_2 = 0{,}1$ м; б) $a_2 = 0{,}057$ м.

15.45. В фокальной плоскости двояковыпуклой линзы расположено плоское зеркало. Предмет находится перед линзой между фокусом и двойным фокусным расстоянием. Построить изображение предмета.

Решение:

Построение хода лучей показано на рисунке.



15.46. Найти увеличение k, даваемое лупой с фокусным расстоянием $F = 2$ см, для: а) нормального глаза с расстоянием наилучшего зрения $L = 25$ см; б) близорукого глаза с расстоянием наилучшего зрения $L = 15$ см.

Решение:

Увеличение лупы $k = \dfrac{L}{F}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $k = \dfrac{0{,}25}{0{,}02} = 12{,}5$; б) $k = \dfrac{0{,}15}{0{,}02} = 7{,}5$.

15.47. Какими должны быть радиусы кривизны $R_1 = R_2$ поверхностей лупы, чтобы она давала увеличение для нормального глаза $k = 10$? Показатель преломления стекла, из которого сделана лупа, $n = 1{,}5$.

Решение:

Для нормального глаза расстояние наилучшего зрения $L = 0{,}25$ м — (1). Фокусное расстояние лупы $F = \dfrac{R}{2(n-1)}$ (см. задачу 15.36), откуда $R = 2F(n-1)$ — (2). Увеличение лупы $k = \dfrac{L}{F}$, откуда $F = \dfrac{L}{k}$ — (3). Подставляя (3) в (2) и с учетом (1), получим $R = \dfrac{2L(n-1)}{k} = 0{,}025$ м.

15.48. Зрительная труба с фокусным расстоянием $F = 50$ см установлена на бесконечность. После того как окуляр трубы передвинули на некоторое расстояние, стали ясно видны предметы, удаленные от объектива на расстояние $a = 50$ м. На какое расстояние d передвинули окуляр при наводке?

Решение:

Зрительная труба дает изображение предметов, находящихся на бесконечности, в своей фокальной плоскости. Изображение предметов, находящихся на расстоянии a_1 от объектива, получается на расстоянии $a_2 = \dfrac{a_1 F}{a_1 - F}$, т. е. на $\Delta a = a_2 - F = \dfrac{F^2}{a_1 - F}$ дальше. Следовательно, окуляр нужно отодвинуть на столько же, чтобы созданное объективом изображение по-прежнему находилось в фокальной плоскости окуляра. Таким образом, $d = \dfrac{F^2}{a_1 - F} = 0{,}005$ м.

15.49. Микроскоп состоит из объектива с фокусным расстоянием $F_1 = 2$ мм и окуляра с фокусным расстоянием $F_2 = 40$ мм. Расстояние между фокусами объектива и окуляра $d = 18$ см. Найти увеличение k, даваемое микроскопом.

Решение:

Поскольку созданное объективом изображение лежит в фокальной плоскости окуляра, то $\dfrac{aF_1}{a - F_1} + F_2 = d$ — (1), где a — расстояние от рассматриваемого предмета до объектива. Объектив дает изображение в фокальной плоскости окуляра, линейное увеличение объектива $k = \dfrac{F_1}{a - F_1}$.

Окуляр работает как лупа, поэтому угловое увеличение окуляра $k_2 = \frac{L}{F_2}$, где $L = 0{,}25$ м — расстояние наилучшего зрения нормального глаза. Отсюда полное увеличение микроскопа $k = k_1 \cdot k_2 = \frac{F_1 L}{F_2(a - F_1)}$ — (2). Из (1) найдем $a = \frac{F_1(l - F_2)}{l - (F_2 + F_1)} = 2{,}022 \cdot 10^{-3}$ м. Подставляя числовые данные в (2), получим $k = 568$.

15.50. Картину площадью $S = 2 \times 2$ м^2 снимают фотоаппаратом, установленным от нее на расстоянии $a = 4{,}5$ м. Изображение получилось размером $s = 5 \times 5$ см^2. Найти фокусное расстояние F объектива аппарата. Расстояние от картины до объектива считать большим по сравнению с фокусным расстоянием.

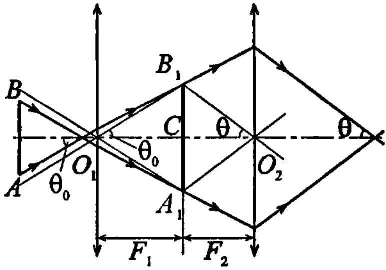
Решение:

Поперечное увеличение объектива $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{1}{40}$, отсюда $a_2 = \frac{a_1}{40}$ — (1). По формуле линзы $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{F}$, откуда $F = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $F = \frac{a_1}{39} = 0{,}115$ м.

15.51. Телескоп имеет объектив с фокусным расстоянием $F_1 = 150$ см и окуляр с фокусным расстоянием $F_2 = 10$ см. Под каким углом зрения θ видна полная Луна в этот телескоп, если невооруженным глазом она видна под углом $\theta_0 = 31'$?

Решение:

Из ΔCB_1O_1 найдем $tg\theta_0 = = \frac{CB_1}{CO_1} = \frac{CB_1}{F_1}$. Из ΔCB_1O_2 найдем $tg\theta = \frac{CB_1}{CO_2} = \frac{CB_1}{F_2}$. Углы θ_0 и θ малы, поэтому можно записать $\theta_0 = \frac{CB_1}{F_1}$ и $\theta = \frac{CB_1}{F_2}$. Угловое увеличение телескопа $k = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{F_1}{F_2} = 15$. Отсюда $\theta = 15\theta_0 = 7°45'$.



15.52. При помощи двояковыпуклой линзы, имеющей диаметр $D = 9$ см и фокусное расстояние $F = 50$ см, изображение Солнца проектируется на экран. Каким получается диаметр d изображения Солнца, если угловой диаметр Солнца $\alpha = 32'$? Во сколько раз освещенность, создаваемая изображением Солнца, будет больше освещенности, вызываемой Солнцем непосредственно?

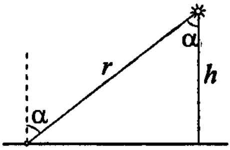
Решение:

Диаметр изображения $d = 2Ftg\frac{\alpha}{2} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ м. Поток лучей, попадающих на поверхность линзы площадью $\frac{\pi D^2}{4}$, концентрируется в изображении Солнца площадью $\frac{\pi d^2}{4}$.

Тогда $\frac{E_2}{E_1} = \frac{4\pi D^2}{4\pi d^2} = 383$.

15.53. Свет от электрической лампочки с силой света $I = 200$ кд падает под углом $\alpha = 45°$ на рабочее место, создавая освещенность $E = 141$ лк. На каком расстоянии r от рабочего места находится лампочка? Над какой высоте h от рабочего места она висит?

Решение:



Освещенность, создаваемая лампочкой, равна $E = \frac{I}{r^2} \cos\alpha$, отсюда $r = \sqrt{\frac{I \cos\alpha}{E}} = 1$ м. Высота $h = r \cos\alpha = 0{,}7$ м.

15.54. Лампа, подвешенная к потолку, дает в горизонтальном направлении силу света $I = 60$ кд. Какой световой поток Φ падает на картину площадью $S = 0{,}5$ м^2, висящую вертикально на стене на расстоянии $r = 2$ м от лампы, если на противоположной стене находится большое зеркало на расстоянии $a = 2$ м от лампы?

Решение:

Лампа создает на площади S картины освещенность $E_1 = \frac{I}{r^2} \cos\alpha$ или, поскольку $\cos\alpha = 1$, $E_1 = \frac{I}{r^2}$. Изображение лампы в зеркале, находящемся на расстоянии $r + 2a$ от картины, создает освещенность $E_2 = \frac{I}{(r + 2a)^2}$. Результирующая напряженность $E = E_1 + E_2 = I\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r + 2a)^2}\right)$.

Кроме того, $E = \frac{\Phi}{S}$, откуда $\Phi = ES = IS\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r + 2a)^2}\right)$.

Подставляя числовые данные, получим $\Phi = 8{,}3$ лм.

15.55. Большой чертеж фотографируют сначала целиком, затем отдельные его детали в натуральную величину. Во сколько раз надо увеличить время экспозиции при фотографировании деталей?

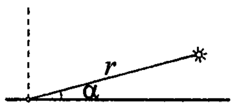
Решение:

При фотографировании всего чертежа, размеры которого гораздо больше фотопластинки, изображение получается приблизительно в главном фокусе объектива. При фотографировании деталей изображение в натуральную величину получается при помещении предмета на двойном фокусном расстоянии от объектива (на таком же расстоянии получается и изображение на фотопластинке). Площадь изображения при этом увеличится в $\left(\frac{2F}{F}\right)^2 = 4$ раза. Во столько же раз уменьшится освещенность фотопластинки, следовательно, время экспозиции надо увеличить в 4 раза.

15.56. 21 марта, в день весеннего равноденствия, на Северной Земле Солнце стоит в полдень под углом $\alpha = 10°$ к горизонту. Во сколько раз освещенность площадки, поставленной вертикально, будет больше освещенности горизонтальной площадки?

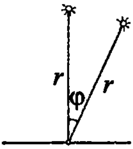
Решение:

Освещенность вертикальной площадки $E_1 = \frac{I}{r^2} cos\alpha$. Освещенность горизонтальной площадки $E_2 = \frac{I}{r^2} cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{I}{r^2} sin\alpha$. Отсюда $\frac{E_1}{E_2} = ctg\alpha = 5{,}7$.



15.57. В полдень во время весеннего и осеннего равноденствия Солнце стоит на экваторе в зените. Во сколько раз в это время освещенность поверхности Земли на экваторе больше освещенности поверхности Земли в Ленинграде? Широта Ленинграда $\varphi = 60°$.

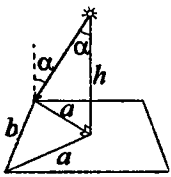
Решение:



Освещенность поверхности Земли на экваторе $E_1 = \frac{I}{r^2}$. Освещенность поверхности Земли в Ленинграде $E_2 = \frac{I}{r^2} cos\,\varphi$. Отсюда отношение $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{cos\,\varphi} = 2$.

15.58. В центре квадратной комнаты площадью $S = 25$ м^2 висит лампа. На какой высоте h от пола должна находиться лампа, чтобы освещенность в углах комнаты была наибольшей?

Решение:

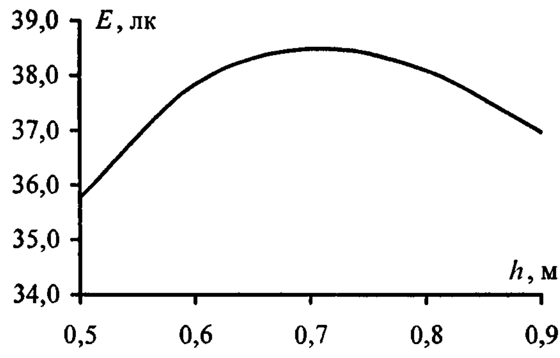


Освещенность E находится по формуле $E = \frac{I}{r^2} cos\,\alpha$, где I — сила света источника, r — расстояние от источника до угла комнаты, α — угол падения лучей. Из рисунка видно, что $a = r\,sin\,\alpha = \frac{b}{\sqrt{2}} = h\,tg\,\alpha$, поэтому можно записать $E = \frac{I}{a^2} cos\,\alpha\,sin^2\,\alpha$. Для нахождения максимума E возьмем производную $\frac{dE}{d\alpha}$ и приравняем ее нулю: $\frac{dE}{d\alpha} = \frac{I}{a^2}\left(2cos^2\,\alpha\,sin\,\alpha - sin^3\,\alpha\right) = 0$, отсюда $tg^2\alpha = 2$. Тогда $h = \frac{b}{\sqrt{2}tg\,\alpha} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2}tg\,\alpha} = 2{,}5$ м.

15.59. Над центром круглого стола диаметром $D = 2$ м висит лампа с силой света $I = 100$ кд. Найти изменение освещенности E края стола при постепенном подъеме лампы в интервале $0{,}5 \le h \le 0{,}9$ м через каждые 0,1м. Построить график $E = f(h)$.

Решение:

Освещенность края стола $E = \dfrac{I}{r^2} \cos\alpha$, где $r = \sqrt{h^2 + \dfrac{D^2}{4}}$; $\cos\alpha = \dfrac{h}{r} = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + D^2/4}}$. Отсюда $E = \dfrac{Ih}{\left(h^2 + D^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}$. Подставляя числовые данные, получим $E = \dfrac{100h}{\left(h^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$. Для заданного интервала значений h построим график.



15.60. В центре круглого стола диаметром $D = 1{,}2$ м стоит настольная лампа из одной электрической лампочки, расположенной на высоте $h_1 = 40$ см от поверхности стола. Над центром стола на высоте $h_2 = 2$ м от его поверхности висит люстра из четырех таких же лампочек. В каком случае получится большая освещенность на краю стола (и во сколько раз): когда горит настольная лампа или когда горит люстра?

Решение:

Настольная лампа создает освещенность $E_1 = \dfrac{Ih_1}{\left(h_1^2 + D^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}$ (см. задачу 15.59). Люстра создает освещенность $E_2 = \dfrac{4Ih_2}{\left(h_2^2 + D^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}$. Отсюда отношение $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{h_1}{4h_2} \times$ $\times \left(\dfrac{h_2^2 + D^2/4}{h_1^2 + D^2/4}\right)^{\frac{3}{2}}$. Подставляя числовые данные, получим $\dfrac{E_1}{E_2} = 1{,}2$.

15.61. Предмет при фотографировании освещается электрической лампой, расположенной от него на расстоянии $r_1 = 2$ м. Во сколько раз надо увеличить время экспозиции, если эту же лампу отодвинуть на расстояние $r_2 = 3$ м от предмета?

Решение:

Имеем $E_1 = \dfrac{I}{r_1^2}$; $E_2 = \dfrac{I}{r_2^2}$, отсюда $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{r_2^2}{r_1^2} = 2{,}25$. Освещенность уменьшилась в 2,25 раза, следовательно, время экспозиции необходимо увеличить в 2,25 раза.

15.62. Найти освещенность E на поверхности Земли, вызываемую нормально падающими солнечными лучами. Яркость Солнца $B = 1{,}2 \cdot 10^9$ кд/м^2.

Решение:

Яркость Солнца можно определить по формуле $B = \dfrac{I}{S\cos\theta}$, где S — площадь видимого диска Солнца. По условию $\theta = 90°$, следовательно, $\cos\theta = 1$; $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$ — (1), где $D \approx 1{,}4 \cdot 10^9$ м — диаметр Солнца. Отсюда освещенность поверхности Земли $E = \dfrac{I}{R^2}$ — (2), где $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м — расстояние от поверхности Земли до Солнца. Из (1) найдем $I = \dfrac{B\pi D^2}{4}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $E = \dfrac{B\pi D^2}{4R^2} = 82 \cdot 10^3$ лк.

15.63. Спираль электрической лампочки с силой света $I = 100$ кд заключена в матовую сферическую колбу диаметром: а) $d = 5$ см; б) $d = 10$ см. Найти светимость R и яркость B лампы. Потерей света в оболочке колбы пренебречь.

Решение:

Если потерь света в оболочке колбы не происходит, то светимость R численно равна освещенности E, т. е. $R = E = \dfrac{4I}{d^2}$ — (1). Светимость R и яркость B связаны соотношением $R = \pi B$, откуда $B = \dfrac{R}{\pi}$ — (2). Подставляя числовые данные, получим: а) $R = 16 \cdot 10^4$ лм/м^2; $B = 5{,}1 \times$ $\times 10^4$ кд/м^2; б) $R = 4 \cdot 10^4$ лм/м^2; $B = 1{,}27 \cdot 10^4$ кд/м^2.

15.64. Лампа, в которой светящим телом служит накаленный шарик диаметром $d = 3$ мм, дает силу света $I = 85$ кд. Найти яркость B лампы, если сферическая колба лампы сделана: а) из прозрачного стекла; б) из матового стекла. Диаметр колбы $D = 6$ см.

Решение:

Яркость лампы $B = \dfrac{I}{S}$, где S — площадь проекции излучающей поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения. а) Излучающей поверхностью является поверхность шарика, т. е. $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Отсюда $B = \frac{4I}{\pi d^2} = 1{,}2 \cdot 10^7$ кд/м^2. б) Если колба лампы сделана из матового стекла, то свет рассеивается и излучающей поверхностью является поверхность лампы, т. е. $S = \frac{\pi D^2}{4}$. Отсюда $B = \frac{4I}{\pi D^2} = 3 \cdot 10^4$ кд/м^2.

15.65. Какую освещенность E дает лампа предыдущей задачи на расстоянии $r = 5$ м при нормальном падении света?

Решение:

По определению $E = \frac{I}{r^2}$. Таким образом, освещенность будет одинакова и для прозрачной и для матовой колбы. Подставляя числовые данные, получим $E = 3{,}4$ лк.

15.66. На лист белой бумаги площадью $S = 20 \times 30\,\text{см}^2$ перпендикулярно к поверхности падает световой поток $\Phi = 120$ лм. Найти освещенность E, светимость R и яркость B бумажного листа, если коэффициент отражения $\rho = 0{,}75$.

Решение:

Имеем $E = \frac{\Phi}{S} = 2 \cdot 10^3$ лк. Поскольку светимость листа обусловлена его освещенностью, то $R = \rho E = 1{,}5 \cdot 10^3$ лм/м^2. Светимость R и яркость B связаны соотношением $R = \pi B$, откуда $B = \frac{R}{\pi} = 480$ кд/м^2.

15.67. Какова должна быть освещенность E листа бумаги в предыдущей задаче, чтобы его яркость была равна $B = 10^4$ кд/м^2?

Решение:

Имеем $B = \dfrac{R}{\pi}$ — (1); $R = \rho E$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $B = \dfrac{\rho E}{\pi}$, откуда $E = \dfrac{\pi B}{\rho} = 4{,}2 \cdot 10^4$ лк.

15.68. Лист бумаги площадью $S = 10 \times 30$ см^2 освещается лампой с силой света $I = 100$ кд, причем на него падает 0,5% всего посылаемого лампой света. Найти освещенность E листа бумаги.

Решение:

Полный световой поток, испускаемый лампой, $\Phi_0 = 4\pi I$. На лист падает световой поток $\Phi = 5 \cdot 10^{-3} \Phi_0$. Освещенность листа $E = \dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi I}{S}$. Подставляя числовые данные, получим $E = 210$ лк.

15.69. Электрическая лампа с силой света $I = 100$ кд посылает во все стороны в единицу времени $W_\tau = 122$ Дж/мин световой энергии. Найти механический эквивалент света K и к.п.д. η световой отдачи, если лампа потребляет мощность $N = 100$ Вт.

Решение:

Принято переходный множитель, определяющий в ваттах мощность, необходимую для получения светового ощущения, вызываемого потоком в 1 люмен, измерять для определенного узкого интервала длин волн, соответствующего максимуму чувствительности глаза, а именно, $\lambda = 555$ нм. Этот фактор носит название механического эквивалента света. Он равен $K = \frac{W_\tau}{4\pi I}$. Пересчитаем световую энергию W_τ из Дж/мин в Вт. $W_\tau = \frac{122}{60} = 2{,}03$ Дж/с = $= 2{,}03$ Вт. Подставляя числовые данные, получим $K = 0{,}0016$ Вт/лм. К.п.д. световой отдачи $\eta = \frac{W_\tau}{N} \cdot 100\%$; $\eta \approx 2\%$.

§ 16. Волновая оптика

Значение показателя преломления n для некоторых веществ можно найти в таблице 18 приложения. В задачах 16.66, 16.67 дан авторский вариант решения.

16.1. При фотографировании спектра Солнца было найдено, что желтая спектральная линия ($\lambda = 589$ нм) в спектрах, полученных от левого и правого краев Солнца, была смещена на $\Delta\lambda = 0{,}008$ нм. Найти скорость v вращения солнечного диска.

Решение:

Согласно принципу Доплера при фотографировании левого края Солнца, т. е. когда источник света движется к нам, $\nu' = \dfrac{\nu c}{c - v}$ — (1); при фотографировании правого края диска, когда источник света движется от нас, $\nu'' = \dfrac{\nu c}{c + v}$ — (2). Частота излучения $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и (2), получим $\Delta\lambda = \dfrac{2v\lambda}{c}$, отсюда $v = \dfrac{c\Delta\lambda}{2\lambda} = 2 \cdot 10^3$ м/с.

16.2. Какая разность потенциалов U была приложена между электродами гелиевой разрядной трубки, если при наблюдении вдоль пучка α-частиц максимальное доплеровское смещение линии гелия ($\lambda = 492{,}2$ нм) получилось равным $\Delta\lambda = 0{,}8$ нм?

Решение:

За счет работы сил электрического поля α-частицы приобрели кинетическую энергию, т. е. $qU = \dfrac{mv^2}{2}$, где скорость частиц $v = \dfrac{c\Delta\lambda}{\lambda}$, т. е. $qU = \dfrac{mc^2(\Delta\lambda)^2}{2\lambda^2}$, откуда

$U = \dfrac{mc^2(\Delta\lambda)^2}{2\lambda^2 q}$. Подставляя числовые данные, получим $U = 2500$ В.

16.3. При фотографировании спектра звезды Андромеды было найдено, что линия титана ($\lambda = 495{,}4$ нм) смещена к фиолетовому концу спектра на $\Delta\lambda = 0{,}17$ нм. Как движется звезда относительно Земли?

Решение:

Смещение спектральных линий в сторону коротких волн означает, что звезда приближается к нам. Радиальная скорость ее движения (т. е. скорость вдоль линии, соединяющей звезду и Землю) находится из соотношения $v = \dfrac{c\Delta\lambda}{\lambda} = 103 \cdot 10^3$ м/с.

16.4. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр ($\lambda_1 = 500$ нм) заменить красным ($\lambda_2 = 650$ нм)?

Решение:

Условие интерференционного максимума: $y_{max} = k\dfrac{L}{d}\lambda$ — (1), где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3...$ Условие интерференционного минимума: $y_{min} = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{L}{d}\lambda$ — (2), где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3...$

Расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности называется расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами интенсивности — шириной интерференционной полосы. Из (1) и (2) следует, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение, равное $\Delta y = \frac{L}{d}\lambda$. Тогда расстояние между интерференционными полосами при зеленом светофильтре равно $\Delta y_1 = \frac{L}{d}\lambda_1$, при красном $\Delta y_2 = \frac{L}{d}\lambda_2$, где L — расстояние от экрана до источников света. Поскольку величины L и d не меняются, то $\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}3$.

16.5. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом ($\lambda = 600$ нм). Расстояние между отверстиями $d = 1$ мм, расстояние от отверстий до экрана $L = 3$ м. Найти положение трех первых светлых полос.

Решение:

Первая светлая полоса находится на расстоянии $y_1 = \frac{L}{d}\lambda = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ м. Вторая — на расстоянии $y_2 = 2y_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ м. Третья — на расстоянии $y_3 = 3y_1 = 5{,}4 \cdot 10^{-3}$ м.

16.6. В опыте с зеркалами Френеля расстояние между мнимыми изображениями источника света $d = 0{,}5$ мм, расстояние до экрана $L = 5$ м. В зеленом свете получились интерференционные полосы, расположенные на расстоянии $l = 5$ мм друг от друга. Найти длину волны λ зеленого света.

Решение:

Имеем $l = \frac{L}{d}\lambda$, откуда $\lambda = \frac{ld}{L} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.7. В опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей помещалась тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная светлая полоса смещалась в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает перпендикулярно к поверхности пластинки. Показатель преломления пластинки $n = 1{,}5$. Длина волны $\lambda = 600$ нм. Какова толщина h пластинки?

Решение:

Изменение разности хода лучей в результате внесения пластинки равно $\Delta = nh - h = h(n-1)$. Кроме того, произошло смещение на $k = 5$ полос, т. е. разность хода $\Delta = k\lambda$. Отсюда $h(n-1) = k\lambda$; $h = \dfrac{k\lambda}{n-1} = 6 \cdot 10^{-6}$ м.

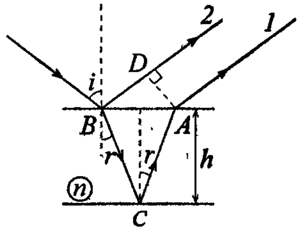
16.8. В опыте Юнга стеклянная пластинка толщиной $h = 12$ см помещается на пути одного из интерферирующих лучей перпендикулярно к лучу. На сколько могут отличаться друг от друга показатели преломления в различных местах пластинки, чтобы изменение разности хода от этой неоднородности не превышало $\Delta = 1$ мкм?

Решение:

Для двух различных значений n_1 и n_2 показателя преломления стеклянной пластинки изменение разности хода лучей соответственно равно $\Delta_1 = h(n_1 - 1)$ и $\Delta_2 = h(n_2 - 1)$. По условию $\Delta_1 - \Delta_2 = 10^{-6}$ м, т. е. $h(n_1 - 1) - h(n_2 - 1) = 10^{-6}$, откуда $h\Delta n = 10^{-6}$ м; $\Delta n = \dfrac{10^{-6}}{h} = 5 \cdot 10^{-5}$.

16.9. На мыльную пленку падает белый свет под углом $i = 45°$ к поверхности пленки. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ($\lambda = 600$ нм)? Показатель преломления мыльной воды $n = 1{,}33$.

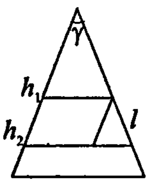
Решение:



По условию отраженные лучи окрашены в желтый цвет. Это означает, что максимум отражения наблюдается в желтой части спектра. Максимум отражения наблюдается, когда световые волны, отраженные от обеих поверхностей пластинки (см. рисунок), усиливают друг друга. Для этого оптическая разность хода Δd пучков 1 и 2 должна быть равна целому числу k длин волн: $\Delta d = \frac{\lambda}{2} + n(AC + BC) - AD = k\lambda$. Слагаемое $\frac{\lambda}{2}$ учитывает, что при отражении пучка 1 от оптически более плотной среды фаза колебаний электромагнитного поля изменяется на противоположную, т. е. возникает такое же изменение фазы, как при прохождении пути $\frac{\lambda}{2}$. Множитель n учитывает уменьшение скорости света в среде — на пути s в среде возникает такое же изменение фазы $\Delta\varphi$, как на пути ns в вакууме: $\Delta\varphi = \frac{\omega s}{v} = \frac{n\omega s}{c}$. Используя соотношения $AC = BC = \frac{h}{\cos r}$, $AD = 2h \sin i \cdot tg r$, а также применяя закон преломления, получаем $\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$, откуда $h = \frac{(k - 1/2)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$. При $k = 1$ минимальная толщина пленки $h = 0{,}13 \cdot 10^{-6}$ м.

16.10. Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отраженном свете ртутной дуги ($\lambda = 546{,}1$ нм) оказалось, что расстояние между пятью полосами $l = 2$ см. Найти угол γ клина. Свет падает перпендикулярно к поверхности пленки. Показатель преломления мыльной воды $n = 1{,}33$.

Решение:



При попадании на любую прозрачную пленку свет частично проходит, частично отражается как от нижней, так и от верхней поверхностей. При этом световые пучки приобретают разность хода, зависящую от толщины пленки, ее показателя преломления и угла падения света. По условию свет падает перпендикулярно к поверхности пленки, толщина пленки всюду мала. Это позволяет считать, что интерференционная картина при рассмотрении ее в отраженном свете (сверху) локализована на верхней поверхности клина. Пусть h_1 и h_2 — толщины пленки, соответствующие разным полосам. Тогда $\Delta h = h_2 - h_1 = \dfrac{\lambda}{2n}$. Поскольку угол γ клина мал, то можно принять $\Delta h = l\,tg\gamma$. Отсюда $tg\gamma = \dfrac{k\lambda}{2nl} = 5{,}13 \cdot 10^{-5}$; $\gamma = 11''$.

16.11. Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. Интерференция наблюдается в отраженном свете через красное стекло ($\lambda_1 = 631$ нм). Расстояние между соседними красными полосами при этом $l_1 = 3$ мм. Затем эта же пленка наблюдается через синее стекло ($\lambda_2 = 400$ нм). Найти расстояние l_2 между соседними синими полосами. Считать, что за время измерений форма пленки не изменится и свет падает перпендикулярно к поверхности пленки.

Решение:

Пусть угол клина равен γ, тогда $tg\gamma = \frac{k\lambda_1}{2nl_1} = \frac{k\lambda_2}{2nl_2}$ (см. задачу 16.10). Отсюда $l_2 = \frac{l_1\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ м.

16.12. Пучок света ($\lambda = 582$ нм) падает перпендикулярно к поверхности стеклянного клина. Угол клина $\gamma = 20''$. Какое число k_0 темных интерференционных полос приходится на единицу длины клина? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Решение:

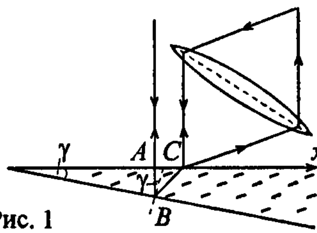


Рис. 1

Для малых углов $AB = BC = h$ (рис.1) и $tg\gamma = \gamma$. Разность хода $\Delta = 2hn + \frac{\lambda}{2}$. Выразим h через длину участка поверхности клина $h = x \cdot tg\gamma$; $h = \gamma x$. Тогда разность хода будет равна $\Delta = 2\gamma xn + \frac{\lambda}{2}$ — (1). Если интенсивность интерферирующих волн одинакова, то результирующая интенсивность в точках, для которых разность фаз равна δ, определяется выражением $I = 2I_0(1 + cos\,\delta)$ — (2), где $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ — (3). Подставляя (1) в (3), получим $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2\gamma nx + \frac{\lambda}{2}\right)$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$I(x) = 2I_0\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(2\gamma nx + \frac{\lambda}{2}\right)\right)\right);$$

$$I(x) = 2I_0\left(1 + cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}\gamma nx + \pi\right)\right) \text{ — (4).}$$

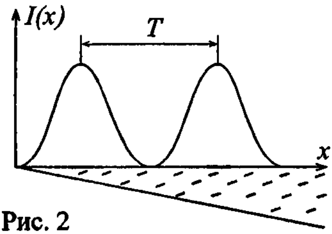
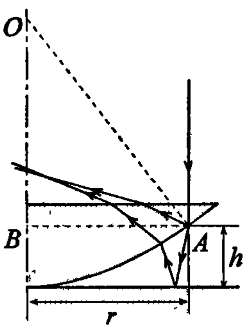


Рис. 2

Найдем период колебаний (рис. 2). Из (4) имеем $\omega = \frac{4\pi\gamma n}{\lambda}$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $T = \frac{\lambda}{2\gamma n}$. Число темных полос, приходящихся на единицу клина, есть величина обратная периоду $k_0 = \frac{2\gamma n}{\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $k_0 = 5\ \text{см}^{-1}$.

16.13. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны $r_k = 4{,}0$ мм и $r_{k+1} = 4{,}38$ мм. Радиус кривизны линзы $R = 6{,}4$ м. Найти порядковые номера колец и длину волны λ падающего света.

Решение:



Появление колец Ньютона обусловлено интерференцией световых пучков, отраженных от двух поверхностей тонкой воздушной прослойки между линзой и пластинкой. Оптическая разность хода лучей $\Delta d = 2h + \frac{\lambda}{2}$ — (1) (см. задачу 16.9). Из прямоугольного треугольника ABO получим $R - h = \sqrt{R^2 - r^2}$. Поскольку $r << R$, то имеет место равенство: $\sqrt{R^2 - r^2} = R - \frac{r^2}{2R}$.

Тогда $R - h = R - \frac{r^2}{2R}$, откуда $h = \frac{r^2}{2R}$ — (2). Запишем условие интерференционного минимума $\Delta d = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$ — (3). Приравнивая правые части (1) и (3), получим $2h = k\lambda$ или $h = \dfrac{k\lambda}{2}$. Тогда из (2) найдем $r_k = \sqrt{2Rh} = \sqrt{k\lambda R}$ — (4). Найдем порядковый номер k кольца. Имеем $\dfrac{r_{k+1}^2}{r_k^2} = \dfrac{k+1}{k} = 1 + \dfrac{1}{k}$, откуда $k = \dfrac{r_k^2}{r_{k+1}^2 - r_k^2} = 5$; $k+1 = 6$. Тогда из (4) найдем $\lambda = \dfrac{r_k^2}{kR} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.14. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 8{,}6$. Наблюдение ведется в отраженном свете. Измерениями установлено, что радиус четвертого темного кольца (считая центральное темное пятно за нулевое) $r_4 = 4{,}5$ мм. Найти длину волны λ падающего света.

Решение:

Имеем $\lambda = \dfrac{r_k^2}{kR}$ (см. задачу 16.13). Подставляя числовые данные, получим $\lambda = 589 \cdot 10^{-9}$ м.

16.15. Установка для получения колец Ньютона освещается белым светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 5$ м. Наблюдение ведется в проходящем свете. Найти радиусы $r_с$ и $r_{кр}$ четвертого синего кольца ($\lambda_с = 400$ нм) и третьего красного кольца ($\lambda_{кр} = 630$ нм).

Решение:

Радиус светлого кольца в проходящем свете определяется формулой $r_k = \sqrt{k\lambda R}$. Отсюда $r_с = \sqrt{4\lambda_с R} = 2{,}8$ мм; $r_{кр} = \sqrt{3\lambda_{кр} R} = 3{,}1$ мм.

16.16. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 15$ м. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между пятым и двадцать пятым светлыми кольцами Ньютона $l = 9$ мм. Найти длину волны λ монохроматического света.

Решение:

Радиус k-го светлого кольца в отраженном свете определяется соотношением $r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}}$. Тогда $l = r_{25} - r_5 = \sqrt{49R\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{9R\frac{\lambda}{2}}$; $l = 4\sqrt{R\frac{\lambda}{2}}$. Отсюда $\lambda = \frac{l^2}{8R} = 675 \cdot 10^{-9}$ м.

16.17. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение идет в отраженном свете. Расстояние между вторым и двадцатым темными кольцами $l_1 = 4{,}8$ мм. Найти расстояние l_2 между третьим и шестнадцатым темными кольцами Ньютона.

Решение:

Радиус темного кольца в отраженном свете определяется формулой $r_k = \sqrt{k\lambda R}$. Отсюда $l_1 = r_{20} - r_2$ или $l_1 = \sqrt{20\lambda R} - \sqrt{2\lambda R} = \sqrt{\lambda R}\left(\sqrt{20} - \sqrt{2}\right)$ — (1); $l_2 = \sqrt{16\lambda R} - \sqrt{3\lambda R} = \sqrt{\lambda R}\left(4 - \sqrt{3}\right)$ — (2). Из (1) найдем $\sqrt{\lambda R} = \frac{l_1}{\sqrt{20} - \sqrt{2}}$ —

(3). Подставляя (3) в (2), получим $l_2 = l_1 \dfrac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{20}-\sqrt{2}} =$

$= 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ м.

16.18. Установка для получения колец Ньютона освещается светом от ртутной дуги, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в проходящем свете. Какое по порядку светлое кольцо, соответствующее линии $\lambda_1 = 579{,}1$ нм, совпадает со следующим светлым кольцом, соответствующим линии $\lambda_2 = 577$ нм?

Решение:

Радиус k-го светлого кольца, соответствующего линии λ_1, в проходящем свете определяется соотношением $r_k = \sqrt{k\lambda_1 R}$. Радиус следующего светлого кольца, соответствующего линии λ_2, равен $\lambda_{(k+1)} = \sqrt{(k+1)\lambda_2 R}$. По условию $r_k = r_{k+1}$, т. е. $\sqrt{k\lambda_1 R} = \sqrt{(k+1)\lambda_2 R}$, откуда $k = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 275$.

16.19. Установка для получения колец Ньютона освещается светом с длиной волны $\lambda = 589$ нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 10$ м. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью. Найти показатель преломления жидкости, если радиус третьего светлого кольца в проходящем свете $r_3 = 3{,}65$ мм.

Решение:

Результат интерференции зависит от оптической разности хода, которая в случае нормального падения лучей имеет вид $\Delta = 2hn$. Наблюдение ведется в проходящем свете. Установка наиболее прозрачна для света с заданной длиной волны, если разность хода кратна четному числу полуволн: $\Delta = 2k\dfrac{\lambda}{2}$, т. е. условие максимума для наблюдения в проходящем свете выражается соотношением $2hn = k\lambda$ — (1). Радиус k-го светлого кольца $r_k = \sqrt{2hR}$, откуда $h = \frac{r_k^2}{2R}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $\frac{nr_k^2}{R} = k\lambda$, откуда $n = \frac{k\lambda R}{r_k^2} = 1{,}33$.

16.20. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Найти толщину h воздушного слоя между линзой и стеклянной пластинкой в том месте, где наблюдается четвертое темное кольцо в отраженном свете.

Решение:
Условие минимума в отраженном свете: $2hn = k\lambda$. По условию $k = 4$, $n = 1$, тогда $2h = 4\lambda$, откуда $h = 2\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ м.

16.21. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено водой. Найти толщину h слоя воды между линзой и пластинкой в том месте, где наблюдается третье светлое кольцо в отраженном свете.

Решение:
Условие максимума в отраженном свете $2hn = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$. По условию $k = 3$, $n = 1{,}33$, тогда $2hn = \frac{7\lambda}{2}$, откуда $h = \frac{7\lambda}{4n} = 658 \cdot 10^{-9}$ м.

16.22. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. После того как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,25 раза. Найти показатель преломления жидкости.

Решение:

Пусть n_1 — показатель преломления воздуха, n_2 — показатель преломления жидкости. Тогда $n_1 = \dfrac{k\lambda R}{(1{,}25 r_k)^2}$; $n_2 = \dfrac{k\lambda R}{r_k^2}$ (см. задачу 16.19). Найдем отношение $\dfrac{n_2}{n_1} = 1{,}25^2$, отсюда $n_2 = 1{,}56$.

16.23. В опыте с интерферометром Майкельсона для смещения интерференционной картины на $k = 500$ полос потребовалось переместить зеркало на расстояние $L = 0{,}161$ мм. Найти длину волны λ падающего света.

Решение:

Перемещение зеркала на расстояние $\dfrac{\lambda}{2}$ соответствует изменению разности хода на λ, т. е. смещению интерференционной картины на одну полосу. Таким образом, $L = \dfrac{k\lambda}{2}$, откуда $\lambda = \dfrac{2L}{k} = 644 \cdot 10^{-9}$ м.

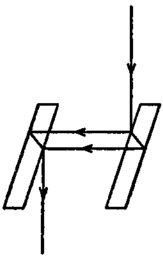
16.24. Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плечей интерферометра Майкельсона поместили откачанную трубку длиной $l = 14$ см. Концы трубки закрыли плоскопараллельными стеклами. При заполнении трубки аммиаком интерференционная картина для длины волны $\lambda = 590$ нм сместилась на $k = 180$ полос. Найти показатель преломления n аммиака.

Решение:

Луч дважды проходит через трубку с аммиаком, при этом разность хода лучей, проходящих в аммиаке и в вакууме, равна $2(l \cdot n - l) = 2l(n-1) = k\lambda$. Отсюда $n - 1 = \frac{k\lambda}{2l}$; $n = \frac{k\lambda}{2l} + 1 = 1{,}00038$.

16.25. На пути одного из лучей интерферометра Жамена (см. рисунок) поместили откачанную трубку длиной $l = 10$ см. При заполнении трубки хлором интерференционная картина для длины волны $\lambda = 590$ нм сместилась на $k = 131$ полосу. Найти показатель преломления n хлора.

Решение:



В отличие от интерферометра Майкельсона в данном случае луч проходит через трубку с хлором только один раз. Поэтому разность хода лучей, проходящих в хлоре и в вакууме, равна $nl - l = l(n-1) = k\lambda$. Отсюда $n = \frac{k\lambda}{l} + 1 = 1{,}000773$.

16.26. Пучок белого света падает по нормали к поверхности стеклянной пластинки толщиной $d = 0{,}4$ мкм. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Какие длины волн λ, лежащие в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм), усиливаются в отраженном свете?

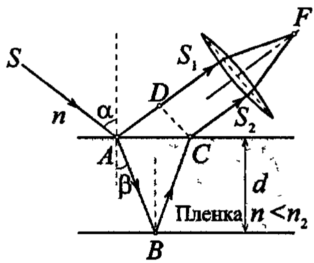
Решение:

Условие максимума в отраженном свете $2dn = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$.

Отсюда $\lambda = \frac{4dn}{2k+1}$. При $k = 1$ получаем $\lambda = 800$ нм, данная волна не лежит в пределах видимого спектра. При $k = 2$ получим $\lambda = 480$ нм, что удовлетворяет условию. При $k = 3$ получим $\lambda = 343$ нм, эта длина волны также не лежит в пределах видимого спектра. Таким образом, искомая длина волны $\lambda = 480$ нм.

16.27. На поверхность стеклянного объектива ($n_1 = 1{,}5$) нанесена тонкая пленка, показатель преломления которой $n_2 = 1{,}2$ («просветляющая» пленка). При какой наименьшей толщине d этой пленки произойдет максимальное ослабление отраженного света в средней части видимого спектра?

Решение:



Стеклянная пластинка $n_1 > n_2$

Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок SA. В точках A и B падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света AS_1 и BCS_2 падают на собирающую линзу, пересекаются в ее фокусе и интерферируют между собой. Т. к. показатель преломления воздуха $(n_1 = 1)$ меньше показателя преломления вещества пленки, который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла, то в обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающая волна. Поэтому фаза колебания пучка света AS_1 при отражении в точке A изменяется на π рад и точно так же на π рад изменяется фаза колебаний пучка света BCS_2 при отражении в точке B. Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того ни у другого пучка не было. Условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода Δ интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полуволн: $\Delta = (2k+1)\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)$. Как видно из рисунка, оптическая разность хода $\Delta = l_2 n_2 - l_1 n = \left(|AB| + |BC|\right) n_2 - |AD| n$. Следовательно, условие минимума интенсивности света примет вид $\left(|AB| + |BC|\right) n_2 - |AD| n = (2k+1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Если угол падения α будет уменьшаться, стремясь к нулю, то $AD \to 0$ и $|AB| + |BC| \to 2d$, где d — толщина пленки. В пределе при $\alpha = 0$ будем иметь $\Delta = 2dn_2 = (2k+1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, откуда искомая толщина пленки $d = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}$. Минимальное значение d соответствует значению $k = 0$. Подставляя числовые данные, получим $d = 115 \cdot 10^{-9}$ м.

16.28. Свет от монохроматического источника ($\lambda = 600$ нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия $d = 6$ мм. За диафрагмой на расстоянии $l = 3$ м от нее находится экран. Какое число k зон Френеля укладывается в отверстие диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым?

Решение:

Пусть в отверстии диафрагмы укладывается k зон Френеля, тогда радиус k-й зоны равен радиусу диафрагмы $r_k = \frac{d}{2} = \sqrt{bk\lambda}$. Отсюда $k = \frac{d^2}{4b\lambda} = 5$. Поскольку число открытых зон нечетно, то центр дифракционной картинки будет светлым.

16.29. Найти радиусы r_k первых пяти зон Френеля, если расстояние от источника света до волновой поверхности $a = 1$ м, расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения $b = 1$ м. Длина волны света $\lambda = 500$ нм.

Решение:

Радиус внешней границы k-й зоны Френеля для сферической волны $r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $r_1 = 0{,}5$ мм, $r_2 = 0{,}71$ мм, $r_3 = 0{,}86$ мм, $r_4 = 1{,}0$ мм, $r_5 = 1{,}12$ мм.

16.30. Найти радиусы r_k первых пяти зон Френеля для плоской волны, если расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения $b = 1$ м. Длина волны света $\lambda = 500$ нм.

Решение:

В случае плоской волны радиус k-й зоны Френеля определяется по формуле $r_k = \sqrt{bk\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $r_1 = 0{,}71$ мм; $r_2 = 1$ мм; $r_3 = 1{,}22$ мм; $r_4 = 1{,}41$ мм; $r_5 = 1{,}58$ мм.

16.31. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии l от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 600$ нм). На расстоянии $a = 0{,}5l$ от источника помещена круглая непрозрачная преграда диаметром $D = 1$ см. Найти расстояние l, если преграда закрывает только центральную зону Френеля.

Решение:

Радиус центральной (первой) зоны Френеля $r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}\lambda}$.

Кроме того, $r_1 = \frac{d}{2}$. По условию $a + b = l$; $a = b = 0{,}5l$, тогда $r_1 = \frac{d}{2} = 0{,}5\sqrt{l\lambda}$. Отсюда $l = \frac{d^2}{\lambda} = 167$ м.

16.32. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии $l = 4$ м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Посередине между экраном и источником света помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе

R отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?

Решение:

Радиус отверстия соответствует радиусу k-й зоны Френеля при условии, что отверстие пропускает k зон. Т. е. $R = r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$. Наименьшая освещенность центра колец соответствует двум зонам ($k = 2$). Подставляя числовые данные, получим $R = 10^{-3}$ м.

16.33. На диафрагму с диаметром отверстия $D = 1{,}96$ мм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 600$ нм). При каком наибольшем расстоянии l между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно?

Решение:

Расстояние, при котором будет видно темное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон четное, то в центре дифракционной картинки будет темное пятно. Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором еще будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должны поместиться две зоны Френеля. Радиус диафрагмы должен равняться радиусу второй зоны, т. е. $\frac{d}{2} = r_2 = \sqrt{2l\lambda}$. Отсюда $l = \frac{d^2}{8\lambda} = 0{,}8$ м.

16.34. На щель шириной $a = 2$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 589$ нм). Под какими углами φ будут наблюдаться дифракционные минимумы света?

Решение:

В соответствии с принципом Гюйгенса щель можно рассматривать как цепочку N источников света S_1, S_2 ... S_N, расстояние между которыми $\Delta x \to 0$, при этом $N\Delta x = a$ (рис. 1). Колебания, создаваемые источниками в точках их расположения, можно представить в виде: $E_i = E_0 \cos \omega t$. В точке наблюдения P, расположенной под углом α к нормали $\vec{n}$, эти источники создадут колебания, которые можно представить в виде:

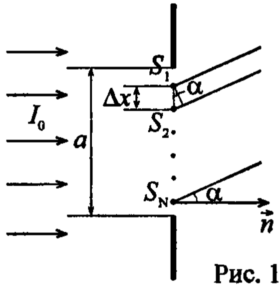


Рис. 1

$$E_1' = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n r_1\right); \qquad E_2' = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n r_2\right) \quad ...$$

$$E_N' = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n r_N\right)$$ — (1). Из (1) следует, что разность фаз соседних колебаний равна $\delta = -\frac{2\pi}{\lambda} n(r_2 - r_1) = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \sin\alpha\right)$ — (2). Построим векторную диаграмму для точки наблюдения P (рис. 2). Т. к. длины векторов $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ ... $\vec{E}_N$ и углы между ними равны, то цепочка векторов является частью правильного многоугольника, вокруг которого можно описать окружность радиусом R. Резуль-

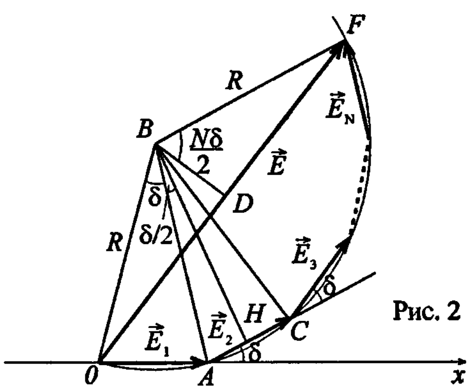


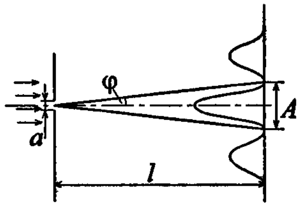
Рис. 2

тирующий вектор $\vec{E}$ является хордой этой окружности, а центральный угол, соответствующий этой хорде, равен $N\delta$. Проведем перпендикуляры из точки B к сторонам AC и OF. Из прямоугольных треугольников ABH и DBF, учитывая, что $\left|\vec{E}_i\right| = E_0$, найдем $\frac{E_0}{2} = R\sin\frac{\delta}{2}$, $\frac{E}{2} = R\sin\frac{N\delta}{2}$, откуда $E = E_0\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$. Тогда интенсивность в точке наблюдения P равна $I = I_1\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$ — (3), где I_1 — интенсивность, обусловленная отдельным источником света. При малых δ имеет место равенство $\sin\frac{N\delta}{2} \approx \frac{N\delta}{2}$ и $\sin\frac{\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2}$. Тогда из выражения (3) следует, что интенсивность падающего света $I_0 = I_{1Б}N^2$ — (4). Подставляя (2) в (3), получим $I = I_1\frac{\sin^2(2\pi N\Delta x/(2\lambda)\sin\alpha)}{\sin^2(2\pi\Delta x/(2\lambda)\sin\alpha)}$. Отсюда с учетом того, что $\Delta x \to 0$ и $N\Delta x = a$, получим $I = I_1 N^2\frac{\sin^2(\pi a/\lambda\sin\alpha)}{N^2(\pi\Delta x/\lambda\sin\alpha)^2}$, или, с учетом (4), $I = I_0\frac{\sin^2(\pi a/\pi a\sin\alpha)}{(\pi a/\lambda\sin\alpha)^2}$. Минимумы интенсивности будут наблюдаться при $\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha = k\pi$, где $k = 1, 2, 3...$ Таким образом, при дифракции света на одной щели (в случае нормального падения лучей) условие минимумов интенсивности имеет вид $a\sin\varphi = k\lambda$. Отсюда $\sin\varphi = \frac{k\lambda}{a}$. При $k=1$ имеем $\sin\varphi_1 = \frac{\lambda}{a} = 0{,}295$; $\varphi \approx 17°$. При $k=2$ имеем $\sin\varphi_2 = 0{,}589$; $\varphi \approx 36°$. При $k=3$ имеем

$sin\varphi_2 = 0{,}884$; $\varphi \approx 62°$. Очевидно, что при $k = 4$ мы получим $sin\varphi > 1$, что не имеет смысла.

16.35. На щель шириной $a = 20$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Найти ширину A изображения щели на экране, удаленном от щели на расстояние $l = 1$ м. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

Решение:



Из рисунка видно, что $\frac{A}{2} = ltg\varphi$. Поскольку угол φ мал, то можно принять $tg\varphi = sin\varphi$. Тогда $A = 2l\,sin\varphi$ — (1). Условие максимумов интенсивности света $a\,sin\varphi = k\lambda$, откуда при $k = 1$ $sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $A = \frac{2l\lambda}{a} = 0{,}05$ м.

16.36. На щель шириной $a = 6\lambda$ падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Под каким углом φ будет наблюдаться третий дифракционный минимум света?

Решение:

Имеем $a\,sin\varphi = k\lambda$. По условию $a = 6\lambda$, $k = 3$. Отсюда $6\lambda\,sin\varphi = 3\lambda$; $sin\varphi = 0{,}5$; $\varphi = 30°$.

16.37. На дифракционную решетку падает нормально пучок света. Для того чтобы увидеть красную линию ($\lambda = 700$ нм) в спектре этого порядка, зрительную трубку пришлось установить под углом $\varphi = 30°$ к оси коллиматора. Найти постоянную d дифракционной решетки. Какое число штрихов N_0 нанесено на единицу длины этой решетки?

Решение:

Согласно формуле дифракционной решетки $d\,sin\varphi = k\lambda$ — (1). По условию $k = 2$, тогда из (1) найдем $d = \dfrac{2\lambda}{sin\varphi} = 2{,}8 \cdot 10^{-6}$ м. Число штрихов N_0, приходящихся на единицу длины решетки, связано с периодом решетки d соотношением $N_0 = \dfrac{1}{d}$, откуда $N_0 = 357 \cdot 10^{-3}$ м.

16.38. Какое число штрихов N_0 на единицу длины имеет дифракционная решетка, если зеленая линия ртути ($\lambda = 546{,}1$ нм) в спектре первого порядка наблюдается под углом $\varphi = 19°8'$?

Решение:

Согласно формуле дифракционной решетки $d\,sin\varphi = k\lambda$. Поскольку число штрихов N_0, приходящихся на единицу длины решетки, связано с периодом решетки d соотношением $N_0 = \dfrac{1}{d}$, то $\dfrac{sin\varphi}{N_0} = k\lambda$, откуда $N_0 = \dfrac{sin\varphi}{k\lambda} = 600\,\text{мм}^{-1}$.

16.39. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Натриевая линия ($\lambda_1 = 589$ нм) дает в спектре первого порядка угол дифракции $\varphi_1 = 17°8'$. Некоторая линия дает в спектре второго порядка дифракции $\varphi_2 = 24°12'$. Найти длину волны λ_2 этой линии и число штрихов N_0 на единицу длины решетки.

Решение:

По формуле дифракционной решетки для натриевой линии имеем $d\sin\varphi_1 = \lambda_1$ — (1), для неизвестной линии $d\sin\varphi_2 = 2\lambda_2$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$, откуда $\lambda_2 = \frac{\lambda_1 \sin\varphi_2}{2\sin\varphi_2}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_2 = \frac{589\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}41}{2\cdot 0{,}295} = 409\cdot 10^{-9}$ м. Число штрихов N_0, приходящихся на единицу длины решетки, связано с периодом решетки d соотношением $N_0 = \frac{1}{d}$. Из (1) найдем $d = \frac{\lambda_1}{\sin\varphi_1}$, тогда $N_0 = \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_1} = 500$ мм$^{-1}$.

16.40. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки. Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в направлении $\varphi = 41°$ совпадали максимумы линий $\lambda_1 = 656{,}3$ нм и $\lambda_2 = 410{,}2$ нм?

Решение:

Имеем $\sin\varphi = \frac{k_1\lambda_1}{d} = \frac{k_2\lambda_2}{d}$, следовательно, $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$. Отсюда $\frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1{,}6$ — (1). Поскольку числа k_1 и k_2 должны быть целыми, то из условия (1) найдем $k_1 = 5$ и $k_2 = 8$. Тогда $d = \frac{k_1\lambda_1}{\sin\varphi} = 5\cdot 10^{-6}$ м.

16.41. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. При повороте трубы гониометра на угол φ в поле зрения видна линия $\lambda_1 = 440$ нм в спектре третьего порядка. Будут ли видны под этим же углом φ другие спектральные линии, соответствующие длинам волн в пределах видимого спектра (от 400 до 700нм)?

Решенне:

Имеем $d\sin\varphi = 3\lambda_1$, откуда $\sin\varphi = \frac{3\lambda_1}{d}$ — (1). Для спектральных линий λ_2 имеем $d\sin\varphi = k\lambda_2$ или, подставляя (1), $3\lambda_1 = k\lambda_2$, откуда $\lambda_2 = \frac{3}{k}\lambda_1$. При $k=1$ имеем $\lambda_2 = \frac{3}{k}\lambda_1$. При $k=1$ имеем $\lambda_2 = 3\lambda_1 = 1320$ нм, эта длина волны не соответствует видимому спектру. При $k=2$ имеем $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 660$ нм. При $k=3$ получим $\lambda_2 = \lambda_1$. Таким образом, искомая длина волны $\lambda_2 = 660$ нм в спектре второго порядка.

16.42. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию λ_2 в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия ($\lambda_1 = 670$ нм) спектра второго порядка?

Решение:

Имеем $d\sin\varphi = 2\lambda_1$; $d\sin\varphi = 3\lambda_2$. Отсюда $\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_1 =$ $= 447$ нм — синяя линия спектра гелия.

16.43. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. Сначала зрительная труба устанавливается на фиолетовые линии ($\lambda_ф = 389$ нм) по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка. Отсчеты по лимбу вправо от нулевого деления дали $\varphi_{ф1} = 27°33'$ и $\varphi_{ф2} = 36°27'$. После этого зрительная труба устанавливается на красные линии по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка. Отсчеты по лимбу вправо от нулевого деления дали $\varphi_{кр1} = 23°54'$ и $\varphi_{кр2} = 40°6'$. Найти длину волны $\lambda_{кр}$ красной линии спектра гелия.

Решение:

Имеем $d\,sin\dfrac{\varphi_{ф2} - \varphi_{ф1}}{2} = \lambda_ф$; $d\,sin\dfrac{\varphi_{кр2} - \varphi_{кр1}}{2} = \lambda_{кр}$. Отсюда $\lambda_{кр} = \dfrac{\lambda_ф\, sin(\varphi_{кр2}/2 - \varphi_{кр1}/2)}{\varphi_{ф2}/2 - \varphi_{ф1}/2}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_{кр} = 706$ нм.

16.44. Найти наибольший порядок k спектра для желтой линии натрия ($\lambda = 589$ нм), если постоянная дифракционной решетки $d = 2$ мкм.

Решение:

Из формулы дифракционной решетки найдем $k = \dfrac{d\,sin\varphi}{\lambda}$.

Поскольку $sin\varphi \le 1$, то $k \le \dfrac{d}{\lambda} = 3{,}4$, т. е. $k_{max} = 3$.

16.45. На дифракционную решетку нормально падает пучок монохроматического света. Максимум третьего порядка наблюдается под углом $\varphi = 36°48'$ к нормали. Найти постоянную d решетки, выраженную в длинах волн падающего света.

Решение:

По формуле дифракционной решетки $d\,sin\varphi = 3\lambda$, откуда $\dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{3}{sin\varphi} = 5$, т. е. $d = 5\lambda$.

16.46. Какое число максимумов k (не считая центрального) дает дифракционная решетка предыдущей задачи?

Решение:
При $d = 5\lambda$ имеем $5\lambda \sin\varphi = k\lambda$. Отсюда наибольшее число максимумов по одну сторону от центрального равно $k_{max} = 5$. Тогда по обе стороны от центрального максимума $k = 2k_{max} = 10$.

16.47. Зрительная труба гониометра с дифракционной решеткой поставлена под углом $\varphi = 20°$ к оси коллиматора. При этом в поле зрения трубы видна красная линия спектра гелия ($\lambda_{кр} = 668$ нм). Какова постоянная d дифракционной решетки, если под тем же углом видна и синяя линия ($\lambda_с = 447$ нм) более высокого порядка? Наибольший порядок спектра, который можно наблюдать при помощи решетки, $k = 5$. Свет падает на решетку нормально.

Решение:
Имеем $d \sin\varphi = k_1\lambda_{кр}$; $d \sin\varphi = k_2\lambda_с$, откуда $\dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{\lambda_{кр}}{\lambda_с} = 1{,}5$. Поскольку значения k_1 и k_2 должны быть целыми числами, то очевидно, что $k_1 = 2$; $k_2 = 3$. Тогда $d = \dfrac{k_1\lambda_{кр}}{\sin\varphi} = 3{,}9 \cdot 10^{-6}$ м.

16.48. Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в первом порядке были разрешены линия спектра калия $\lambda_1 = 404{,}4$ и $\lambda_2 = 404{,}7$ нм? Ширина решетки $a = 3$ см.

Решение:
Разрешающая способность дифракционной решетки определяется формулой $\dfrac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = kN$. По условию $k = 1$, тогда $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = N = \dfrac{a}{d}$, откуда $d = \dfrac{a(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1} = 22 \cdot 10^{-6}$ м.

16.49. Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в первом порядке был разрешен дублет натрия $\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм? Ширина решетки $a = 2{,}5$ см.

Решение:

Имеем $d = \dfrac{a(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1}$ (см. задачу 16.48). Подставляя числовые данные, получим $d = 25{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.50. Постоянная дифракционной решетки $d = 2$ мкм. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить эта решетка в области желтых лучей ($\lambda = 600$ нм) в спектре второго порядка? Ширина решетки $a = 2{,}5$ см.

Решение:

Имеем $\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = k\dfrac{a}{d}$ (см. задачу 16.48), откуда $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda d}{ka} = 24 \cdot 10^{-12}$ м.

16.51. Постоянная дифракционной решетки $d = 2{,}5$ мкм. Найти угловую дисперсию $\dfrac{d\varphi}{d\lambda}$ решетки для $\lambda = 589$ нм в спектре первого порядка.

Решение:

Имеем $d \sin\varphi = k\lambda$. Дифференцируя, получим $d \cos\varphi d\varphi = kd\lambda$ или $\dfrac{d\varphi}{d\lambda} = \dfrac{k}{d \cos\varphi}$. Подставляя числовые данные, получим $\sin\varphi = 0{,}236$, откуда $\varphi \approx 13{,}5°$. Тогда $\cos\varphi = 0{,}972$ и $\dfrac{d\varphi}{d\lambda} = 4{,}1 \cdot 10^5$ рад/м.

16.52. Угловая дисперсия дифракционной решетки для $\lambda = 668$ нм в спектре первого порядка $\dfrac{d\varphi}{d\lambda} = 2{,}02 \cdot 10^5$ рад/м. Найти период d дифракционной решетки.

Решение:

По формуле дифракционной решетки $d\sin\alpha = \lambda$ — (1). Кроме того, $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{d\cos\varphi}$ — (2) (см. задачу 16.51). Из (1) найдем $\sin\varphi = \frac{\lambda}{d}$ или $\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{d^2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{d\sqrt{1-\lambda^2/d^2}} = \frac{1}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}}$. Отсюда $d = \sqrt{\frac{1}{(d\varphi/d\lambda)^2} + \lambda^2} = 5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.53. Найти линейную дисперсию D дифракционной решетки в условиях предыдущей задачи, если фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран, равно $F = 40$ см.

Решение:

Линейная дисперсия D дифракционной решетки определяется по формуле $D = F\frac{d\varphi}{d\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $D = 81$ мкм/(Н·м).

16.54. На каком расстоянии l друг от друга будут находиться на экране две линии ртутной дуги ($\lambda_1 = 577$ нм и $\lambda_2 = 579{,}1$ нм) в спектре первого порядка, полученном при помощи дифракционной решетки? Фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран, $F = 0{,}6$ м. Постоянная решетки $d = 2$ мкм.

Решение:

Согласно условию главных максимумов дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ — (1). В нашем случае $k = 1$, поэтому для первой и второй линии ртутной дуги из формулы (1) соответственно имеем $d\sin\varphi_1 = \lambda_1$ и $d\sin\varphi_2 = \lambda_2$, откуда

$sin\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{d}$ — (2) и $sin\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{d}$ — (3). Поскольку расстояние от линзы до решетки $f << F$, где F — фокусное расстояние линзы, то $\frac{l_1}{F} = tg\varphi_1$ и $\frac{l_2}{F} = tg\varphi_2$, откуда $l_1 = Ftg\varphi_1$ — (4) и $l_2 = Ftg\varphi_2$ — (5). Расстояние между двумя линиями ртутной дуги на экране равно $l = l_2 - l_1$ — (6). Подставляя (4) и (5) в (6), получаем $l = F(tg\varphi_2 - tg\varphi_1)$ — (7). По определению $tg\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi}$ — (8) и, согласно основному тригонометрическому тождеству, $sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$, откуда $cos\varphi = \sqrt{1 - sin^2\varphi}$ — (9). Подставляя (9) в (8), получаем $tg\varphi = \frac{sin\varphi}{\sqrt{1 - sin^2\varphi}}$ — (10), затем, подставляя (2) и (3) в (10), находим $tg\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{d^2 - \lambda_1^2}}$ — (11) и $tg\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{d^2 - \lambda_2^2}}$ — (12). Подставляя (11) и (12) в (7), окончательно получаем $l = F\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{d^2 - \lambda_2^2}} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{d^2 - \lambda_1^2}}\right) = 0{,}68$ мм.

16.55. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Красная линия ($\lambda_1 = 630$ нм) видна в спектре третьего порядка под углом $\varphi = 60°$. Какая спектральная линия λ_2 видна под этим же углом в спектре четвертого порядка? Какое число штрихов N_0 на единицу длины имеет дифракционная решетка? Найти угловую дисперсию $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ этой решетки для длины волны $\lambda_1 = 630$ нм в спектре третьего порядка.

Решение:
Из условия главных максимумов дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ — (1) имеем: $d\sin\varphi = k_1\lambda_1$ — (2) и $d\sin\varphi = k_2\lambda_2$ — (3), где $k_1 = 3$ и $k_2 = 4$. Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$, откуда $\lambda_2 = \frac{k_1\lambda_1}{k_2} = 472{,}5$ м. По определению число штрихов на единицу длины $N_0 = \frac{1}{d}$, откуда $d = \frac{1}{N_0}$ — (4). Подставляя (4) в (1), получаем $\frac{\sin\varphi}{N_0} = k\lambda$, откуда $N_0 = \frac{\sin\varphi}{k\lambda} = 458\,\text{мм}^{-1}$. Дифференцируя уравнение (1), получаем $d\cos d\varphi = kd\lambda$, откуда угловая дисперсия дифракционной решетки $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d\cos\varphi}$ — (5). Подставляя (4) в (5), получаем $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{kN_0}{\cos\varphi} = 2{,}75\cdot 10^4$ рад/см.

16.56. Для какой длины волны λ дифракционная решетка имеет угловую дисперсию $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 6{,}3\cdot 10^5$ рад/м в спектре третьего порядка? Постоянная решетки $d = 5$ мкм.

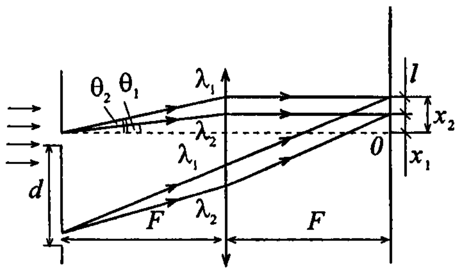
Решение:
Угловая дисперсия дифракционной решетки (см. задачу 16.55) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d\cos\varphi}$, откуда $\cos\varphi = \frac{k}{d}\frac{d\lambda}{d\varphi}$ — (1). Из основного тригонометрического тождества (см. задачу 16.54) $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{k}{d}\frac{d\lambda}{d\varphi} = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$, откуда

$sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{k}{d}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2}$ — (3). Из условия главных максимумов дифракционной решетки $d\,sin\varphi = k\lambda$ длина волны $\lambda = \frac{d}{k}sin\varphi$ — (4). Подставляя (3) в (4), окончательно получаем $\lambda = \sqrt{\frac{d^2}{k^2}-\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2} = 508$ нм.

16.57. Какое фокусное расстояние F должна иметь линза, проектирующая на экран спектр, полученный при помощи дифракционной решетки, чтобы расстояние между двумя линиями калия $\lambda_1 = 404{,}4$ нм и $\lambda_2 = 404{,}7$ нм в спектре первого порядка было равным $l = 0{,}1$ мм? Постоянная решетки $d = 2$ мкм.

Решение:

Расстояние от решетки до линзы равно расстоянию от линзы до экрана и равно фокусному расстоянию линзы F. Из рисунка видно, что расстояние $x_1 = Ftg\theta_1$, а



$x_2 = Ftg\theta_2$. Поскольку $x_2 - x_1 = l$, то можно записать $l = F(tg\theta_2 - tg\theta_1)$ — (1). Т. к. $tg\theta_2 - tg\theta_1$ есть приращение функции $f(\theta) = tg\theta$, то можно принять $tg\theta_2 - tg\theta_1 = = (tg\theta)' \cdot \Delta\theta$ — (2). Кроме того, $\Delta\theta = \frac{sin\theta_2 - sin\theta_1}{(sin\theta)'}$ — (3).

Подставив (3) в (2) и вычислив производные, найдем $tg\theta_2 - tg\theta_1 = \frac{sin\theta_2 - sin\theta_1}{cos^3\theta_1}$ — (4). По формуле дифракционной решетки $d\sin\theta_1 = \lambda_1$; $d\sin\theta_2 = \lambda_2$, откуда $\sin\theta_1 = \frac{\lambda_1}{d}$ и $\sin\theta_2 = \frac{\lambda_2}{d}$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде $tg\theta_2 - tg\theta_1 = \frac{\lambda_2/d - \lambda_1/d}{\cos^3\theta_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d\cos^3\theta_1}$ — (5). Подставляя (5) в (1), получим $l = \frac{F(\lambda_2 - \lambda_1)}{d\cos^3\theta_1}$, откуда $F = \frac{dl\cos^3\theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ — (6). Величииу $\cos\theta_1$ найдем из соотношения $\cos\theta_1 = \sqrt{1-\sin^2\theta_1} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{d}\right)^2}$; $\cos\theta_1 = 0{,}9793$. Подставляя числовые данные в (6), получим $F = 0{,}65$ м.

16.58. Найти угол $i_Б$ полной поляризации при отражении света от стекла, показатель преломления которого $n = 1{,}57$.

Решение:

Согласно закоиу Брюстера свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения $tgi_Б = \frac{n_2}{n_1}$, где $n_1 = 1$ — показатель преломления воздуха, $n_2 = 1{,}57$ — показатель преломления стекла. Отсюда $i_Б = arctgh_2 = 57{,}5°$.

16.59. Предельный угол полного внутреннего отражения для некоторого вещества $i = 45°$. Найти для этого вещества угол $i_Б$ полной поляризации.

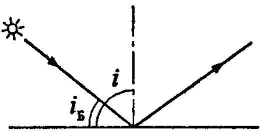
Решение:

Предельный угол полного внутреннего отражения для границы раздела вещество — воздух определяется соотноше-

нием $sin\, i = \frac{1}{n}$. По условию $i = 45°$, отсюда $n = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}4$.
По закону Брюстера $tgi_Б = n$, откуда $i_Б = arctg(n) = 54{,}7°$.

16.60. Под каким углом $i_Б$ к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были наиболее полно поляризованы?

Решение:



Пусть i — угол падения солнечных лучей, $i_Б$ — угол между направлением на Солнце и горизонтом. По закону Брюстера $tgi_Б = n$, где $n = 1{,}33$ — показатель преломления воды. Тогда $i = arctg(n) = 53°$. Отсюда $i_Б = 90° - i = 37°$.

16.61. Найти показатель преломления n стекла, если при отражении от него света отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления $\beta = 30°$.

Решение:

По закону Брюстера $tgi_Б = n$. В связи с обратимостью хода лучей можно записать $tg\beta = \frac{1}{n}$, откуда $n = \frac{1}{tg\beta} = 1{,}73$.

16.62. Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный ($n = 1{,}5$) сосуд, и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом $i_Б = 42°37'$. Найти показатель преломления жидкости. Под каким углом i должен падать на дно сосуда луч света, идущий в этой жидкости, чтобы наступило полное внутреннее отражение?

Решение:

По закону Брюстера $tg(i_Б)=\frac{n_2}{n_1}$ — (1), где $n_2=1{,}5$ — показатель преломления стекла, n_1 — показатель преломления жидкости. Из (1) найдем $n_1=\frac{n_2}{tg(i_Б)}=1{,}63$. Полное внутреннее отражение наступает при условии $sin\,i=\frac{n_2}{n_1}=0{,}92$, откуда угол падения $i\approx 67°$.

16.63. Пучок поляризованного света ($\lambda=589$ нм) падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно к его оптической оси. Найти длины волн λ_o и λ_e обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и для необыкновенного лучей равны $n_o=1{,}66$ и $n_e=1{,}49$.

Решение:

Имеем $\lambda_o=\frac{\lambda}{n_o}=355$ нм, $\lambda_e=\frac{\lambda}{n_e}=395$ нм.

16.64. Найти угол φ между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, проходящего через поляризатор и анализатор, уменьшается в 4 раза.

Решение:

После прохождения через поляризатор луч имеет интенсивность $I_1=0{,}5I_0$, где I_0 — интенсивность естественного света. После прохождения через анализатор луч имеет интенсивность $I_2=I_1\cos^2\varphi=0{,}5I_0\cos^2\varphi$. По условию $\frac{I_2}{I_0}=0{,}25$, тогда $\cos^2\varphi=0{,}5$ и $\varphi=45°$.

16.65. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен φ. Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают 8% падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9% интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найти угол φ.

Решение:

Согласно закону Малюса интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, $I = I_0'' cos^2 \varphi$ — (1), где I_0'' — интенсивность естественного света с учетом поглощения и отражения поляризатора и анализатора. Интенсивность света, прошедшего через поляризатор, равна $I_0' = (1 - 0{,}08)I_0 = 0{,}92 I_0$ — (2). Интенсивность света, прошедшего через анализатор с учетом (2), равна $I_0'' = 0{,}92 I_0' = 0{,}8464 I_0$ — (3). По условию интенсивность света, вышедшего из анализатора, $I = 0{,}09 I_0$ — (4). Из формулы (1) имеем: $cos\,\varphi = \sqrt{\dfrac{I}{I_0''}}$, откуда угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора $\varphi = arccos\sqrt{\dfrac{I}{I_0''}}$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $\varphi = 70°54'$.

16.66. Найти коэффициент отражения ρ естественного света, падающего на стекло ($n = 1{,}54$) под углом $i_Б$ полной поляризации. Найти степень поляризации P лучей, прошедших в стекло.

Решение:

Коэффициент отражения падающего света $\rho = \dfrac{I}{I_0}$, где $I = I_\perp + I$, причем $I_\perp = 0{,}5 I_0 \dfrac{sin^2(i - \beta)}{sin^2(i + \beta)}$, $I_{||} = 0{,}5 I_0 \times$

$\times\frac{tg^2(i-\beta)}{tg^2(i+\beta)}$. В нашем случае при падении под углом полной поляризации $tg(i_Б)=n=1{,}54$; следовательно, $i_Б=57°$. Т. к. $i_Б+\beta=90°$, то угол преломления $\beta=33°$ и $i_Б-\beta=24°$. Поэтому $I_\perp=0{,}5I_0\frac{\sin^2 24°}{\sin^2 90°}=0{,}083I_0$, $I=0{,}5I_0\frac{tg^2 24°}{tg^2 90°}=0$, т. е. в отраженном свете при угле падения, равном углу полной поляризации, колебания происходят только в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. При этом $\rho=\frac{I}{I_0}=\frac{I_\perp+I}{I_0}=0{,}083$, т. е. отражается от стекла только 8,3% энергии падающих естественных лучей. Следовательно, энергия колебаний, перпендикулярных к плоскости падения и прошедших во вторую среду, будет составлять 41,7% от общей энергии лучей, упавших на границу раздела, а энергия колебаний, лежащих в плоскости падения, равна 50%. Степень поляризации лучей, прошедших во вторую среду, $P=\frac{I-I_\perp}{I+I_\perp}=\frac{0{,}083}{0{,}917}=0{,}091=9{,}1\%$.

16.67. Лучи естественного света проходят сквозь плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n=1{,}54$), падая на нее под углом $i_Б$ полной поляризации. Найти степень поляризации P лучей, прошедших сквозь пластинку.

Решение:

При падении естественного луча на стеклянную пластинку под углом полной поляризации преломленный луч имеет интенсивность $I_1=0{,}917I_0$ (см. задачу 16.66). В этом преломленном луче $0{,}417I_0$ составляют колебания, перпендикулярные к плоскости падения, и $0{,}5I_0$ — колебания, параллельные плоскости падения. Интенсивность луча, отразившегося от второй грани пластинки, $I_2 = 0{,}083 \cdot 0{,}0917 I_0 = 0{,}076 I_0$. Интенсивность луча, вышедшего из пластинки в воздух, будет $I_3 = 0{,}917 I_0 - 0{,}076 I_0$, причем $0{,}5 I_0$ составляют лучи с колебаниями, параллельными плоскости падения, и $0{,}341 I_0$ — с колебаниями, перпендикулярными к плоскости падения. Тогда степень поляризации $P = \dfrac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} = \dfrac{0{,}159}{0{,}841} = 18{,}9\%$, т. е. степень поляризации увеличилась. На этом основании в качестве поляризатора употребляется «стопа» плоскопараллельных стеклянных пластинок («стопа Столетова»).

16.68. Найти коэффициент отражения ρ и степень поляризации P_1 отраженных лучей при падении естественного света на стекло ($n = 1{,}5$) под углом $i = 45°$. Какова степень поляризации P_2 преломленных лучей?

Решение:

Коэффициент отражения падающего света $\rho = \dfrac{I}{I_0}$ — (1), где $I = I_{\perp} + I$ — (2), причем $I_{\perp} = \dfrac{I_0}{2}\left[\dfrac{sin(i-\beta)}{sin(i+\beta)}\right]^2$ — (3) и $I = \dfrac{I_0}{2}\left[\dfrac{tg(i-\beta)}{tg(i+\beta)}\right]^2$ — (4). Показатель преломления среды $n = \dfrac{sin\, i}{sin\, \beta}$, откуда $sin\, \beta = \dfrac{sin\, i}{n}$ или $\beta = arcsin\left(\dfrac{sin\, i}{n}\right)$ — (5).

Подставляя (5) в (3) и (4), получаем

$I_{\perp} = \dfrac{I_0}{2}\left[\dfrac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2$ — (6) и

$I = \frac{I_0}{2}\left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2$ — (7). Подставляя (6) и (7) в (2), получаем $I = \frac{I_0}{2}\left\{\left[\frac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2 + \right.$ $\left. + \left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2\right\}$ — (8). Подставляя (8) в (1), окончательно получаем $\rho = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2 + \right.$ $\left. + \left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2\right\}$; $\rho = 0{,}0503 \cdot 100\% = 5{,}03\%$.

Степень поляризации отраженных лучей $P_1 = \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel}$ — (9). Подставляя (6) и (7) в (9), получаем

$$P_1 = \frac{\left[\frac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2 - \left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2}{\left[\frac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2 + \left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2};$$

$P_1 = 0{,}84 \cdot 100\% = 84\%$. Степень поляризации преломленных лучей $P_2 = \rho P_1 = 0{,}0422 \cdot 100\% = 4{,}22\%$.

§ 17. Элементы теории относительности

17.1. При какой относительной скорости v движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25%?

Решенне:

Имеем $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ — (1). По условию $\frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 0{,}25$, отсюда $l = 0{,}75 l_0$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}75$; $1-\frac{v^2}{c^2} = 0{,}5625$; $v = \sqrt{c^2(1-0{,}5625)} = 1{,}98\cdot 10^8$ м/с.

17.2. Какую скорость v должно иметь движущееся тело, чтобы его предельные размеры уменьшились в 2 раза?

Решение:

Пусть тело движется с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы K'. Поскольку в системе K' длина тела $l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, а по условию задачи $l_0 = 2l$, то $l = 2l\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Отсюда $\frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$, следовательно, $v = c\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 2{,}6\cdot 10^8$ м/с.

17.3. Мезоны космических лучей достигают поверхности Земли с самыми разнообразными скоростями. Найти релятивистское сокращение размеров мезона, скорость которого равна 95% скорости света.

Решение:

Т. к. поперечные размеры тела при его движении не меняются, то изменение объема тела определяется лоренцовым сокращением продольного размера, определяемого формулой $l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Следовательно, объем тела сокращается по аналогичной формуле $V = V_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Подставляя числовые данные, получим $V = 0{,}312V_0$. Тогда относительное изменение объема $\delta = \frac{V_0 - V}{V_0}\cdot 100\% = 68{,}8\%$.

17.4. Во сколько раз увеличивается продолжительность существования нестабильной частицы по часам неподвижного наблюдателя, если она начинает двигаться со скоростью, составляющей 99% скорости света?

Решение:

Промежуток времени $\Delta\tau$ в системе, движущейся со скоростью v по отношению к наблюдателю, связан с промежутком времени $\Delta\tau_0$ в неподвижной для наблюдателя системе соотношением $\Delta\tau = \frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость, c — скорость света. По условию $\beta = 99\% = 0{,}99$. Из формулы (1) получаем

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 7{,}08 \text{ раза.}$$

17.5. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95% скорости света. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

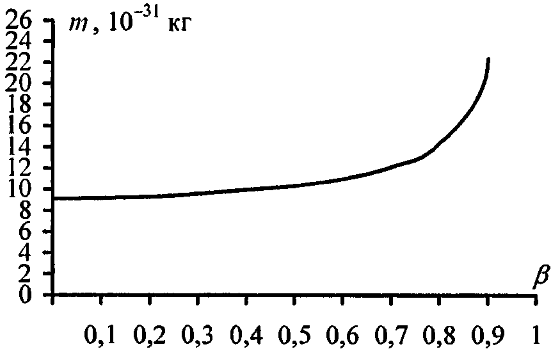
Решение:
Промежуток времени по часам неподвижного наблюдателя (см. задачу 17.4) составляет $\Delta\tau = \dfrac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $\Delta\tau_0 = 1$ с — «собственное время» мезона, $\beta = 95\% = 0{,}95$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta\tau = 3{,}2$ с.

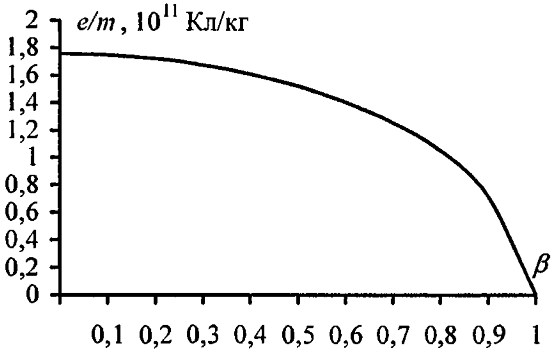
17.6. На сколько увеличится масса α-частицы при ускорении ее от начальной скорости, равной нулю, до скорости, равной 0,9 скорости света?

Решение:
Зависимость массы m тела от скорости его движения дается уравнением $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, где $m_0 = 6{,}6\cdot10^{-27}$ кг — масса покоя α-частицы. По условию $v = 0{,}9\cdot c$, тогда $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-0{,}81c^2/c^2}} = 2{,}3m_0$. Отсюда $\Delta m = 2{,}3m_0 - m_0 = 1{,}3m_0 = 8{,}6\cdot10^{-27}$ кг.

17.7. Найти отношение $\dfrac{e}{m}$ заряда электрона к его массе для скоростей: а) $v \ll c$; б) $v = 2\cdot10^8$ м/с; в) $v = 2{,}2\cdot10^8$ м/с; г) $v = 2{,}4\cdot10^8$ м/с; д) $v = 2{,}6\cdot10^8$ м/с; е) $v = 2{,}8\cdot10^8$ м/с. Составить таблицу и построить графики зависимостей m и $\dfrac{e}{m}$ от величины $\beta = \dfrac{v}{c}$ для указанных скоростей.

Решение:
Зависимость массы электрона m от скорости его движения v дается уравнением $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $m_0 = 9{,}11\times$





$\times 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $\beta = \dfrac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость.

Элементарный заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Составим таблицу и построим графики зависимостей m и $\dfrac{e}{m}$ от величины β для указанных скоростей.

v, 10^8 м/с	v<<c	2	2,2	2,4	2,6	2,8
β	0	0,67	0,73	0,8	0,87	0,93
m, 10^{-31} кг	9,11	12,22	13,4	15,18	18,26	25,38
e/m, 10^{11} Кл/кг	1,76	1,31	1,19	1,05	0,876	0,631

17.8. При какой скорости v масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя?

Решение:

Масса движущегося электрона (см. задачу 17.7) дается уравнением $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $\beta = \dfrac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость. Из (1) имеем $\dfrac{m_0}{m} = \sqrt{1-\beta^2}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\dfrac{m_0}{m} = \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ — (4). По условию $\dfrac{m_0}{m} = \dfrac{1}{2}$ — (5). Приравнивая правые части соотношений (4) и (5), получаем $\dfrac{1}{2} = \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$, откуда находим искомую скорость электрона $v = \dfrac{c\sqrt{3}}{2} = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

17.9. До какой энергии $W_к$ можно ускорить частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы не должно превышать 5%? Задачи решить для: а) электронов; б) протонов; в) дейтонов.

Решение:

Имеем $W_к = m_0 c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) = c^2 \left(\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 \right)$; $W_к = c^2(m - m_0)$, откуда $\dfrac{W_к}{m_0} = c^2 \dfrac{m-m_0}{m_0}$ —(1). По условию $\dfrac{m-m_0}{m_0} = 0{,}05$, тогда из (1) получим $W_к = 0{,}05 m_0 c^2$. Подставляя числовые данные, получим: а) $W_к = 25{,}6 \cdot 10^3$ эВ; б) $W_к = 47 \cdot 10^6$ эВ; в) $W_к = 94 \cdot 10^6$ эВ.

17.10. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составляла 95% скорости света?

Решение:

Согласно закоиу сохранения энергии $mc^2 + eU = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ или $eU = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$ — (1). Подставляя в (1) значение $v = 0{,}95 \cdot c$, получим $eU = 2{,}2mc^2$, откуда $U = \frac{2{,}2mc^2}{e} = 1{,}1 \cdot 10^6$ В.

17.11. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти протон, чтобы его продольные размеры стали меньше в 2 раза?

Решенне:

Потенциальная энергия протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, равна $W_п = eU$. Зависимость кинетической энергии протона от скорости его движения v дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, где $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ — масса покоя протона, $\beta = \frac{v}{c}$ — относительная скорость. Работа, совершенная полем при перемещении протона, равна приобретенной им кинетической энергии, т. е. $eU = W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ или $U = \frac{m_0c^2}{e} \times$ $\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (1). Продольные размеры протона l, движущегося со скоростью v относительно некоторой системы отсчета, связаны с продольными размерами протона l_0, неподвижного в этой системе, соотношением $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$, откуда $\frac{l}{l_0} = \sqrt{1-\beta^2}$ — (2). Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $U = \frac{m_0c^2}{e}\left(\frac{l_0}{l} - 1\right) = 940\,\text{МВ}$.

17.12. Найти скорость v мезона, если его полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.

Решение:

Полная энергия мезона W складывается из его кинетической энергии $W_к$ и энергии покоя W_0. Поскольку $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, а $W_0 = m_0c^2$, то $W = W_к + W_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. По условию $\frac{W}{W_0} = 10$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10$. Отсюда $\beta = \frac{v}{c} = 0{,}995$; $v = \beta c = 2{,}985 \cdot 10^8$ м/с.

17.13. Какую долю β скорости света должна составлять скорость частицы, чтобы ее кинетическая энергия была равна ее энергии покоя?

Решение:

Кинетическая энергия частицы $W = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, где $\beta = \frac{v}{c}$ и есть искомая величина. По условию $W = W_0 = mc^2$.

Тогда $mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, откуда $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2$; $\beta = 0{,}866 \cdot 100\% = 86{,}6\%$.

17.14. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией $W_к = 10$ ГэВ. Какую долю β скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

Решение:

Зависимость кинетической энергии протонов от скорости их движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$. Отсюда доля скорости протонов от скорости света $\beta = \sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{\left(W_к + m_0c^2\right)^2}} = 0{,}996 \cdot 100\% = 99{,}6\%$.

17.15. Найти релятивистское сокращение размеров протонов в условиях предыдущей задачи.

Решение:

Диаметр протона d, движущегося со скоростью v относительно некоторой системы отсчета, связан с диаметром протона d_0, неподвижного в этой системе, соотношением $d = d_0\sqrt{1-\beta^2}$ — (1). Из задачи 17.14 доля скорости протонов от скорости света $\beta = 99{,}6\% = 0{,}996$. Релятивистское сокращение размеров протона из формулы (1) равно $\frac{d_0 - d}{d_0} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = 0{,}911 \cdot 100\% = 91{,}1\%$.

17.16. Циклотрон дает пучок электронов с электрической энергией $W_к = 0{,}67$ МэВ. Какую долю β скорости света составляет скорость электронов в этом пучке?

Решение:

Доля скорости электронов от скорости света (см. задачу 17.14) равна $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{m_0^2 c^4}{(W_к + m_0 c^2)^2}} = 0{,}899 \cdot 100\% = 89{,}9\%$.

17.17. Составить для электронов и протонов таблицу зависимости их кинетической энергии $W_к$ от скорости v (в долях скоростей света) для значений β, равных: 0,1; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,95; 0,999.

Решение:

Зависимость кинетической энергии электронов и протонов от скорости их движения дается уравнением $W_к = m_0 c^2 \times$ $\times \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (1), где масса покоя электрона $m_{0(e)} = 9{,}11 \times$ $\times 10^{-31}$ кг, масса покоя протона $m_{0(p)} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Подставляя в уравнение (1) значения β, заполняем таблицу:

β	0,1	0,5	0,6	0,7
$W_{к(e)}$, Дж	$9{,}2 \cdot 10^{-17}$	$1{,}26 \cdot 10^{-16}$	$2{,}04 \cdot 10^{-16}$	$3{,}28 \cdot 10^{-16}$
$W_{к(p)}$, Дж	$1{,}5 \cdot 10^{-12}$	$1{,}74 \cdot 10^{-11}$	$3{,}76 \cdot 10^{-11}$	$6{,}01 \cdot 10^{-11}$

Продолжение

β	0,8	0,9	0,95	0,999
$W_{к(e)}$, Дж	$5{,}46 \cdot 10^{-16}$	$1{,}06 \cdot 10^{-15}$	$1{,}81 \cdot 10^{-15}$	$1{,}75 \cdot 10^{-14}$
$W_{к(p)}$, Дж	$1{,}01 \cdot 10^{-10}$	$1{,}95 \cdot 10^{-10}$	$3{,}31\ 10^{-10}$	$3{,}21 \cdot 10^{-9}$

17.18. Масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя. Найти кинетическую энергию $W_к$ электрона.

Решение:

Масса движущегося электрона (см. задачу 17.7) дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — его масса покоя. Кинетическая энергия движущегося электрона $W_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (2). Из уравнения (1) имеем $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $W_к = m_0 c^2 \left(\frac{m}{m_0} - 1 \right) = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж.

17.19. Какому изменению массы Δm соответствует изменение энергии на $\Delta W = 4{,}19$ Дж?

Решение:

Зависимость кинетической энергии тела от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (1), а зависимость массы тела от скорости его движения — $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (2). Изменение массы тела в процессе его движения $\Delta m = m - m_0$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\Delta m = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (4). Поскольку кинетическая энергия покоя равна нулю, то изменение кинетической энергии $\Delta W_к = W_к$ — (5). Подставляя (1) в

(5) с учетом (4), получаем $\Delta W_к = \Delta mc^2$, откуда изменение массы тела $\Delta m = \frac{\Delta W_к}{c^2} = 4{,}6 \cdot 10^{-17}$ кг.

17.20. Найти изменение энергии ΔW, соответствующее изменению массы на $\Delta m = 1$ а.е.м.

Решение:
Изменение кинетической энергии тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta W_к = \Delta mc^2 = 934$ МэВ.

17.21. Найти изменение энергии ΔW, соответствующее изменению массы на $\Delta m = m_e$.

Решение:
Изменение кинетической энергии тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta W_к = \Delta mc^2$. По условию $\Delta m = m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, тогда $\Delta W_к = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж.

17.22. Найти изменение массы Δm_μ, происходящее при образовании $\nu = 1$ моль воды, если реакция образования воды такова: $2H_2 + O_2 = 2H_2O + 5{,}75 \cdot 10^5$ Дж.

Решение:
Имеем $\Delta m_\mu = \frac{\Delta W}{c^2}$ — (1). При образовании двух молей воды освобождается энергия $\Delta W' = 5{,}75 \cdot 10^5$ Дж, тогда $\Delta W = \frac{\Delta W'}{2} = 2{,}875 \cdot 10^5$ Дж — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\Delta m_\mu = 3{,}2 \cdot 10^{-9}$ г/моль.

17.23. При делении ядра урана $^{235}_{92}U$ освобождается энергия $W = 200$ МэВ. Найти изменение массы Δm_μ при делении $\nu = 1$ моль урана.

Решение:
Изменение массы тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta m = \dfrac{\Delta W_к}{c^2}$ — (1). При делении ν молей урана освобождается энергия $\Delta W = W\nu N_A$ — (2), где W — энергия, освобождаемая при делении одного ядра. Подставляя (2) в (1), получаем $\Delta m_\mu = \dfrac{W\nu N_A}{c^2} = 0{,}214$ г/моль.

17.24. Солнце излучает поток энергии $P = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт. За какое время τ масса Солнца уменьшится в 2 раза? Излучение Солнца считать постоянным.

Решение:
Поток энергии, излучаемый Солнцем, определяется соотношением $P = \dfrac{\Delta W_к}{\tau}$ — (1). Изменение энергии Солнца в процессе излучения (см. задачу 17.19) $\Delta W_к = \Delta m c^2$ — (2). По условию $\Delta m = \dfrac{1}{2} m_0$ — (3), где $m_0 = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ — начальная масса Солнца. Подставляя (2) в (1), с учетом (3), получаем $P = \dfrac{m_0 c^2}{2\tau}$, откуда время, за которое масса Солнца уменьшится в 2 раза, равно $\tau = \dfrac{m_0 c^2}{2P} = 7{,}2 \cdot 10^{12}$ лет.

§ 18. Тепловое излучение

В задачах данного раздела используются данные таблиц 5 и 11 приложения.

18.1. Найти температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью $S = 6{,}1\,\text{см}^2$ имеет мощность $N = 34{,}6$ Вт. Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение:
Мощность излучения из отверстия печи определяется соотношением $N = R_э S$ — (1). Поскольку по условию излучение близко к излучению абсолютно черного тела, то по закону Стефана — Больцмана $R_э = \sigma T^4$ — (2), где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) — постоянная Стефана — Больцмана. Подставляя (2) в (1), получаем $N = \sigma T^4 S$, откуда температура печи $T = \left(\frac{N}{\sigma S}\right)^{\frac{1}{4}} = 1000\,\text{К}$.

18.2. Какую мощность N излучения имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К.

Решение:
Поскольку по условию излучение близко к излучению абсолютно черного тела, то мощность излучения Солнца (см. задачу 18.1) выражается соотношением $N = \sigma T^4 S$ — (1), где $S = 4\pi R_С^2$ — (2) — площадь поверхности Солнца, $R_С = 6{,}96 \cdot 10^8$ м — радиус Солнца. Подставляя (2) в (1), получаем $N = 4\pi\sigma T^4 R_С^2 = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт.

18.3. Какую энергетическую светимость $R'_э$ имеет затвердевший свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры $k = 0{,}6$.

Решение:

Затвердевающий свинец ведет себя как серое тело. По закону Стефана — Больцмана для серого тела $R'_э = k\sigma T^4$, где k — отношение энергетических светимостей абсолютно черного и серого тел при данной температуре, или коэффициент черноты, $T = 600\,К$ — температура плавления свинца. Подставляя числовые данные, получим $R_э = 4{,}4\,кВт/м^2$.

18.4. Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 34\,кВт$. Найти температуру T этого тела, если известно, что его поверхность $S = 0{,}6\,м^2$.

Решение:

Мощность излучения абсолютно черного тела (см. задачу 18.1) выражается соотношением $N = \sigma T^4 S = 1000\,К$.

18.5. Мощность излучения раскаленной металлической поверхности $N' = 0{,}67\,кВт$. Температура поверхности $T = 2500\,К$, ее площадь $S = 10\,см^2$. Какую мощность излучения N имела бы эта поверхность, если бы она была абсолютно черной? Найти отношение k энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Решение:

Если бы поверхность была абсолютно черной, то ее мощность излучения (см. задачу 18.1) была равна $N = \sigma T^4 S = 2{,}22\,кВт$. Отношение энергетических светимостей поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре равно $k = \dfrac{N'}{N} = 0{,}3$.

18.6. Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке $d = 0{,}3$ мм, длина спирали $l = 5$ см. При включении лампочки в сеть напряжением $U = 127$ В через лампочку течет ток $I = 0{,}31$ А. Найти температуру T спирали. Считать, что по установлении равновесия все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры $k = 0{,}31$.

Решение:

Поскольку вольфрамовая спираль излучает как серое тело, то ее мощность излучения $N' = R'_э S$ — (1), где по закону Стефана — Больцмана $R'_э = k\sigma T^4$ — (2) — энергетическая светимость серого тела, $S = 2\pi dl$ — (3) — площадь поверхности вольфрамовой спирали. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N' = 2\pi k\sigma T^4 dl$ — (4). С другой стороны, мощность тока $N' = IU$ — (5), получаем $IU = 2\pi k\sigma T^4 dl$, откуда температура спирали $T = \left(\frac{IU}{2\pi k\sigma dl}\right)^{\frac{1}{4}} = 2208$ К.

18.7. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке $T = 2450$ К. Отношение ее энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре $k = 0{,}3$. Найти площадь S излучающей поверхности спирали.

Решение:

Мощность излучения вольфрамовой спирали (см. задачу 18.6) $N' = k\sigma T^4 S$. Отсюда площадь излучающей поверхности спирали $S = \frac{N'}{k\sigma T^4} = 0{,}4$ см^2.

18.8. Найти солнечную постоянную K, т. е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение:

Поскольку по условию излучение Солнца близко к излучению абсолютно черного тела, то по закону Стефана — Больцмана его энергетическая светимость $R_э = \sigma T^4$ — (1). Мощность излучения Солнца $N = R_э S_1$ — (2), где $S_1 = 4\pi R_С^2$ — (3) — площадь поверхности Солнца. Подставляя (1) и (3) в (2), получаем $N = 4\pi\sigma T^4 R_С^2$ — (4). Мощность, излучаемая Солнцем, падает на внутреннюю поверхность сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Солнца до Земли $\langle r_З \rangle = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м. Площадь поверхности такой сферы равна $S_2 = 4\pi r_З^2$ — (5). По определению солнечной постоянной $K = \frac{N}{S_2}$ — (6). Подставляя (4) и (5) в (6), окончательно получаем $K = \frac{\sigma T^4 R_С^2}{\langle r_З \rangle^2} = 1{,}38$ кВт/м^2.

18.9. Считая, что атмосфера поглощает 10% лучистой энергии, посылаемой Солнцем, найти мощность излучения N, получаемую от Солнца горизонтальным участком Земли площадью $S = 0{,}5$ га. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение:

Мощность излучения $N_0 = KS\cos\alpha$, где $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ — угол падения солнечных лучей, K — солнечная постоянная (см. задачу 18.8). По условию мощность излучения N, получаемая горизонтальным участком Земли, равна $0{,}9N_0$, т. е. $N = 0{,}9KS\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Подставляя числовые данные, получим $N = 3{,}1 \cdot 10^6$ Вт.

18.10. Зная значение солнечной постоянной для Земли (см. задачу 18.8), найти значение солнечной постоянной для Марса.

Решение:

Значение солнечной постоянной для Земли (см. задачу 18.8) определяется соотношением $K_З = \frac{\sigma T^4 R_С^2}{\langle r_З \rangle^2}$ — (1). Аналогично можно определить солнечную постоянную для Марса $K_М = \frac{\sigma T^4 R_С^2}{\langle r_М \rangle^2}$ — (2), где $\langle r_М \rangle = 2{,}279 \cdot 10^{11}$ м — среднее расстояние от Солнца до Марса. Разделив (2) на (1), получим $\frac{K_М}{K_З} = \frac{\langle r_З \rangle^2}{\langle r_М \rangle^2}$, откуда солнечная постоянная для Марса $K_М = K_З\left(\frac{\langle r_З \rangle}{\langle r_М \rangle}\right)^2 = 0{,}59$ кВт/м^2.

18.11. Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет абсолютно черное тело, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 484$ нм?

Решение:

Согласно первому закону Вина $\lambda_m T = C_1$ — (1), где $C_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К. По закону Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела энергетическая светимость

$R_э = \sigma T^4$ — (2). Из формулы (1) абсолютная температура $T = \dfrac{C_1}{\lambda_m}$ — (3). Подставляя (3) в (2), окончательно получим

$$R_э = \sigma\left(\frac{C_1}{\lambda_m}\right)^4 = 73{,}08\,\text{МВт/м}^2.$$

18.12. Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 10\,\text{кВт}$. Найти площадь S излучающей поверхности тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 700\,\text{нм}$.

Решение:

Мощность излучения абсолютно черного тела (см. задачу 18.1) равна $N = \sigma T^4 S$ — (1). Из первого закона Вина (см. задачу 18.11) абсолютная температура равна $T = \dfrac{C_1}{\lambda_m}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $N = \sigma S\left(\dfrac{C_1}{\lambda_m}\right)^4$, отсюда площадь излучающей поверхности тела $S = \dfrac{N}{\sigma} \times \left(\dfrac{\lambda_m}{C_1}\right)^4 = 6\,\text{см}^2$.

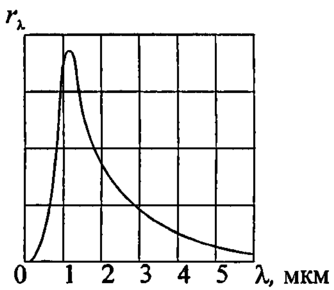
18.13. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если источником света служит: а) спираль электрической лампочки ($T = 3000\,\text{К}$); б) поверхность Солнца ($T = 6000\,\text{К}$), в) атомная бомба, в которой в момент взрыва развивается температура $T \approx 10^7\,\text{К}$? Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение:

По первому закону Вина $\lambda_m T = C_1$, откуда $\lambda_m = \dfrac{C_1}{T}$, где $C_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К. а) Для спирали электрической лампочки, при $T_1 = 3000$ К, $\lambda_1 = 1{,}03$ мкм — инфракрасная область. б) Для поверхности Солнца, при $T_2 = 6000$ К, $\lambda_2 = 483$ нм — область видимого света. в) Для атомной бомбы в момент взрыва, при $T_3 = 10^7$ К, $\lambda_3 = 290$ пм — область рентгеновских лучей.

18.14. На рисунке дана кривая зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела r_λ от длины волны λ при некоторой температуре. К какой температуре T относится эта кривая? Какой процент излучаемой энергии приходится на долю видимого спектра при этой температуре?

Решение:



По графику найдем длину волны, на которую приходится максимальная спектральная плотность энергетической светимости тела: $\lambda_{max} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ м. Согласно закону Вина $\lambda_{max} T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К, отсюда $T = \dfrac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-6}} = 2400$ К. Процент излучаемой энергии, приходящейся на долю видимого спектра, определяется той долей площади, ограниченной кривой $r_\lambda = f(\lambda)$, которая отсекается ординатами, восстановленными по краям интересующего нас интервала. Пределы видимого спектра приблизительно от 400 до 750 нм. При данной температуре на долю видимого излучения приходится около 3—5% всего излучения.

18.15. При нагревании абсолютно черного тела длина волны λ, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 690 до 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

Решение:

Из первого закона Вина $\lambda_m T = C_1$ имеем: $\lambda_1 T_1 = C_1$ — (1) и $\lambda_2 T_2 = C_1$ — (2). Приравнивая левые части уравнений (1) и (2), получаем $\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$ или $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ — (3). По закону Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела энергетическая светимость $R_э = \sigma T^4$ — (4). Из формулы (4) имеем: $\frac{R_{э1}}{R_{э2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$ — (5). Подставляя (3) в (5), окончательно получаем $\frac{R_{э1}}{R_{э2}} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^4 = 3{,}63$.

18.16. На какую длину волны λ приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, имеющего температуру, равную температуре $t = 37°$ человеческого тела, т. е. $T = 310$ К?

Решение:

Из первого закона Вина $\lambda_m T = C_1$ имеем: $\lambda_m = \frac{C_1}{T} =$ $= 9{,}35$ мкм.

18.17. Температура T абсолютно черного тела изменилась при нагревании от 1000 до 3000 К. Во сколько раз увеличилась при этом его энергетическая светимость $R_э$? На сколько изменилась длина волны λ, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости? Во сколько раз увеличилась его максимальная спектральная плотность энергетической светимости r_λ?

Решение:

По закону Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела (см. задачу 18.15) $\frac{R_{э1}}{R_{э2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{1}{81}$ или $\frac{R_{э2}}{R_{э1}} = 81$. Из первого закона Вина (см. задачу 18.16) $\lambda_1 = \frac{C_1}{T_1} = 2{,}9$ мкм и $\lambda_2 = \frac{C_1}{T_2} = 0{,}97$ мкм. Согласно второму закоиу Вина максимальная спектральная плотность энергетической светимости возрастает пропорционально пятой степени абсолютной температуры $r_{\lambda\, max} = C_2 T^5$ — (1), где $C_2 = 1{,}29 \cdot 10^{-5}$ Вт/м^{3}К^5. Из формулы (1) имеем $r_1 = C_2 T_1^5$ — (2) и $r_2 = C_2 T_2^5$ — (3). Разделив (3) на (2), получаем $\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^5 = 243$.

18.18. Абсолютно черное тело имеет температуру $T_1 = 2900$ К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

Решение:

Из первого закона Вина (см. задачу 18.16) $\lambda_1 = \frac{C_1}{T_1}$ — (1) и $\lambda_2 = \frac{C_2}{\lambda_2}$ — (2). Изменение длины волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ — (3). Подставляя (1) и

(2) в (3), получаем $\Delta\lambda = \frac{C_1}{T_2} - \frac{C_1}{T_1}$, откуда $T_2 = \frac{T_1 C_1}{T_1 \Delta\lambda + C_1} =$ $= 290$ К.

18.19. Поверхность тела нагрета до температуры $T = 1000$ К. Затем одна половина этой поверхности нагревается на $\Delta T = 100$ К, другая охлаждается на $\Delta T = 100$ К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость $R_э$ поверхности этого тела?

Решение:

По закону Стефана — Больцмана для серого тела $R'_э = k\sigma T^4$ — (1). После нагревания и охлаждения энергетическая светимость первой и второй половины будет соответственно равна $R'_{э1} = k\sigma(T + \Delta T)^4$ — (2) и $R'_{э2} = k\sigma(T - \Delta T)^4$ — (3). При этом средняя энергетическая светимость станет равной $\langle R'_э \rangle = \frac{R'_{э1} + R'_{э2}}{2}$ — (4). Подставляя (2) и (3) в (4), получаем $\langle R'_э \rangle = \frac{k\sigma\left[(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4\right]}{2}$ — (5). Разделив (5) на (1), находим $\frac{\langle R'_э \rangle}{R'_э} = \frac{(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4}{2T} = 1{,}06$.

18.20. Какую мощность N надо подводить к зачерненному металлическому шарику радиусом $r = 2$ см, чтобы поддерживать его температуру на $\Delta T = 27$ К выше температуры окружающей среды? Температура окружающей среды $T = 293$ К. Считать, что тепло теряется только вследствие излучения.

Решение:

Мощность, необходимая для поддержания температуры, равна $N = R_э S$ — (1), где $R_э$ — энергетическая светимость шарика, $S = 4\pi r^2$ — (2) — площадь его поверхности. Поскольку по условию шарик зачерненный, то по закону Стефана — Больцмана $R_э = \sigma(T + \Delta T)^4$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N = 4\pi r^2 \sigma(T + \Delta T)^4 = 3$ Вт.

18.21. Зачерненный шарик остывает от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 293$ К. На сколько изменилась длина волны λ, соответствующая максимуму спектральной плотности его энергетической светимости?

Решение:

Изменение длины волны, соответствующей максимуму спектральной плотности энергетической светимости (см. задачу 18.18), равно $\Delta\lambda = \dfrac{C_1}{T_2} - \dfrac{C_1}{T_1} = 0{,}24$ мкм.

18.22. На сколько уменьшится масса Солнца за год вследствие излучения? За какое время τ масса Солнца уменьшится вдвое? Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К. Излучение Солнца считать постоянным.

Решение:

Мощность, излучаемая Солнцем, равна $N = R_э S$ — (1), где $R_э$ — энергетическая светимость Солнца, $S = 4\pi R_С^2$ — (2) — площадь его поверхности, $R_С = 6{,}96 \cdot 10^8$ м — радиус Солнца. По закону Стефана — Больцмана $R_э = \sigma T^4$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N = 4\pi R_С^2 \sigma T^4$ — (4). Изменение энергии Солнца за счет излучения $\Delta W = N\tau$ — (5). С другой стороны, $\Delta W = c^2 \Delta m$ — (6), где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, Δm — изменение массы Солнца. Приравнивая правые части уравнений (5) и (6), получаем

$N\tau = c^2\Delta m$, откуда изменение массы Солнца $\Delta m = \dfrac{N\tau}{c^2}$ — (7). Подставляя (4) в (7), получаем $\Delta m = \dfrac{4\pi R_{\mathrm{C}}^2\sigma T^4\tau}{c^2} = 1{,}37\cdot 10^{17}$ кг. Если $\Delta m = \dfrac{1}{2}M_{\mathrm{C}}$, где $M_{\mathrm{C}} = 1{,}989\cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца, то $\tau = \dfrac{M_{\mathrm{C}}c^2}{8\pi R_{\mathrm{C}}^2\sigma T^4} = 7{,}06\cdot 10^{12}$ лет.

Глава VI
ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

§ 19. Квантовая природа света и волновые свойства частиц

Работа выхода электронов из некоторых металлов дана в таблице 17 приложения.

19.1. Найти массу m фотона: а) красных лучей света ($\lambda = 700$ нм); б) рентгеновских лучей ($\lambda = 25$ пм); в) гамма-лучей ($\lambda = 1{,}24$ пм).

Решение:

Энергия фотона $E = h\nu$ — (1), где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — частота колебания. Здесь $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с — скорость света. Т. е. уравнение (1) можно записать $E = h\frac{c}{\lambda}$ — (2). С другой стороны, согласно формуле Эйнштейна $E = mc^2$ — (3). Приравнивая (2) и (3), получаем $h\frac{c}{\lambda} = mc^2$, откуда $m = \frac{h}{c\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $m = 3{,}2 \cdot 10^{-36}$ кг; б) $m = 8{,}8 \cdot 10^{-32}$ кг; в) $m = 1{,}8 \cdot 10^{-30}$ кг.

19.2. Найти энергию ε, массу m и импульс p фотона, если соответствующая ему длина волны $\lambda = 1{,}6$ пм.

Решение:

Имеем $E = h\frac{c}{\lambda}$; $m = \frac{h}{c\lambda}$ (см. задачу 19.1). Импульс фотона $p = mc = \frac{h}{\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $E = 1{,}15 \cdot 10^{-13}$ Дж; $m = 1{,}38 \cdot 10^{-30}$ кг; $p = 4{,}1 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

19.3. Ртутная дуга имеет мощность $N = 125$ Вт. Какое число фотонов испускается в единицу времени в излучении с длинами волн λ, равными: 612,1; 579,1; 546,1; 404,7; 365,5; 253,7нм? Интенсивности этих линий составляют соответственно 2; 4; 4; 2,9; 2,5; 4% интенсивности ртутной дуги. Считать, что 80% мощности дуги идет на излучение.

Решение:

Энергия излучения ртутной дуги $E = \eta N t$, по условию $t = 1$ с. Энергия одного кванта света $E_0 = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. Пусть I — интенсивность линии (в процентах), тогда количество квантов можно определить по формуле: $n = \frac{IE}{E_0} = \frac{I\eta N t\lambda}{hc}$.

Подставляя числовые данные, получим:

1) $n = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}8 \cdot 125 \cdot 1 \cdot 6123 \cdot 10^{-10}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 6{,}2 \cdot 10^{18}$; 2) $n = 1{,}2 \cdot 10^{19}$;

3) $n = 1{,}1 \cdot 10^{19}$; 4) $n = 5{,}9 \cdot 10^{18}$; 5) $n = 4{,}6 \cdot 10^{18}$;

6) $n = 5{,}1 \cdot 10^{18}$.

19.4. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 520$ нм?

Решение:

Кинетическая энергия электрона $E = \frac{mv^2}{2}$ — (1). Энергия фотона $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $\frac{mv^2}{2} = h\frac{c}{\lambda}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda}}$.

Подставляя числовые данные, получим $v = 9{,}2 \cdot 10^5$ м/с.

19.5. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 520$ нм?

Решение:

Импульс электрона $p_e = m_e v$ — (1). Импульс фотона $p = \frac{h}{\lambda}$ — (2) (см. задачу 19.2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $m_e v = \frac{h}{\lambda}$, откуда $v = \frac{h}{\lambda m_e}$.

Подставляя числовые данные, получим $v = 1{,}4 \cdot 10^3$ м/с.

19.6. Какую энергию ε должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе покоя электрона?

Решение:

Энергия фотона $E = mc^2$. Подставляя в эту формулу значения массы покоя электрона, получим $E = 81 \cdot 10^{-15}$ Дж или $E = 510 \cdot 10^3$ эВ.

19.7. Импульс, переносимый монохроматическим пучком фотонов через площадку $S = 2\text{ см}^2$ за время $t = 0{,}5$ мин, равен $p = 3 \cdot 10^{-9}$ кг·м/с. Найти для этого пучка энергию E, падающую на единицу площади за единицу времени.

Решение:
Энергия и импульс фотона связаны соотношением $E = pc$. За единицу времени на единицу площади будет падать энергия $E_1 = \frac{pc}{St} = 150\,\text{Дж/(с·м}^2)$.

19.8. При какой температуре T кинетическая энергия молекулы двухатомного газа будет равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 589$ нм?

Решение:
Кинетическая энергия молекулы двухатомного газа $W = \frac{5}{2}kT$. Кинетическая энергия фотона $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. По условию $W = \varepsilon$ или $\frac{5}{2}kT = h\frac{c}{\lambda}$, откуда $T = \frac{2hc}{5k\lambda} = 9800$ К.

19.9. При высоких энергиях трудно осуществить условия для изменения экспозиционной дозы рентгеновского и гамма-излучений в рентгенах, поэтому допускается применение рентгена как единицы дозы для излучений с энергией квантов до $\varepsilon = 3$ МэВ. До какой предельной длины волны λ рентгеновского излучения можно употреблять рентген?

Решение:
Энергия квантов определяется соотношением $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. Отсюда предельная длина волны равна $\lambda = \frac{hc}{E} = 0{,}41 \cdot 10^{-12}$ м.

19.10. Найти массу m фотона, импульс которого равен импульсу молекулы водорода при температуре $t = 20°$ С. Скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости.

Решение:
Импульс фотона $p_1 = m_1 c$, где m_1 — масса фотона, c — скорость света в вакууме. Импульс молекулы водорода

$p_2 = m_2\sqrt{\overline{v^2}}$, где m_2 — масса молекулы водорода, $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_2}}$ — средняя квадратичная скорость молекулы водорода. По условию $p_1 = p_2$ или $m_1 c = m_2\sqrt{\dfrac{3kT}{m_2}}$ — (1). Массу молекулы водорода можно определить из соотношения $m_2 = \dfrac{\mu}{N_A}$ — (2), где μ — молярная масса водорода, N_A — число Авогадро. Подставляя (2) в (1), найдем $m_1 c = \sqrt{\dfrac{3kT\mu}{N_A}}$, откуда $m_1 = \sqrt{\dfrac{3kT\mu}{c^2 N_A}}$. Подставляя числовые данные, получим $m_1 = 2{,}1\cdot 10^{-32}$ кг.

19.11. В работе А. Г. Столетова «Актино-электрические исследования» (1888 г.) впервые были установлены основные законы фотоэффекта. Один из результатов его опытов был сформулирован так: «Разряжающим действием обладают лучи самой высокой преломляемости с длиной волны менее 295 нм». Найти работу выхода A электрона из металла, с которым работал А. Г. Столетов.

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $h\nu = A + \dfrac{mv^2}{2}$. Условие возникновения фотоэффекта: $h\nu = A$ или $\nu = \dfrac{A}{h}$ — (1). Поскольку $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, то из (1) получим $A = \dfrac{hc}{\lambda}$ — (2). По условию $\lambda = 295\cdot 10^{-9}$ м, тогда из (2) найдем $A = 4{,}2$ эВ.

19.12. Найти длину волны λ_0 света, соответствующую красной границе фотоэффекта, для лития, натрия, калия и цезия.

Решение:
Работа выхода электрона из металла, если его скорость $v = 0$, равна $A = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0}$, где λ_0 — красная граница фотоэффекта. Таким образом, $\lambda_0 = \frac{hc}{A} = 5{,}17 \cdot 10^{-7}$ м.

19.13. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти минимальную энергию фотона, вызывающего фотоэффект.

Решение:
Минимальная энергия фотона должна быть равна работе выхода электрона, т. е. $E_{min} = A = \frac{hc}{\lambda_0}$. Подставляя числовые данные, получим $E_{min} = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж или $E_{min} = 4{,}5$ эВ.

19.14. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти работу выхода A электрона из металла, максимальную скорость v_{max} электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны $\lambda = 180$ нм, и максимальную кинетическую энергию W_{max} электронов.

Решение:
Работа выхода электрона $A = \frac{hc}{\lambda_0} = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта: $h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2}$ — (1), где $\frac{mv_{max}^2}{2}$ — максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона. Из (1) имеем $\frac{hc}{\lambda} - A = \frac{mv_{max}^2}{2}$, откуда

максимальная скорость электронов $v_{max} = \sqrt{\frac{2(hc/\lambda - A)}{m}}$.

Подставляя числовые данные, получим $v_{max} = 9 \cdot 10^5$ м/с. Максимальная кинетическая энергия электронов равна $W_{max} = \frac{mv^2}{2} = 3{,}7 \cdot 10^{-19}$ Дж.

19.15. Найти частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 3$ В. Фотоэффект сжимается при частоте света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Найти работу выхода A электрона из металла.

Решение:

Работа выхода электрона $A = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} = 2{,}48$ эВ. Согласно уравнению Эйнштейна для внешнего фотоэффекта $h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$. Если электроны полностью задерживаются разностью потенциалов U, то по закону сохранения энергии $eU = \frac{mv^2}{2}$. Тогда $h\nu = A + eU$, откуда $\nu = \frac{A + eU}{h} = 13{,}2 \cdot 10^{14}$ Гц.

19.16. Найти задерживающую разность потенциалов U для электронов, вырываемых при освещении калия светом с длиной волны $\lambda = 330$ нм.

Решение:

Имеем $h\nu = A + eU$ (см. задачу 19.15) или $h\frac{c}{\lambda} = A + eU$ — (1). Работа выхода электрона из калия $A = 2$ эВ =

$= 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж (см. таблицу 17). Из (1) найдем $U = \dfrac{hc/\lambda - A}{e} = 1{,}75$ В.

19.17. При фотоэффекте с платиновой поверхности электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 0{,}8$ В. Найти длину волны λ применяемого облучения и предельную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект.

Решение:

Имеем $h\dfrac{c}{\lambda} = A + eU$, откуда $\lambda = \dfrac{hc}{A + eU} = 204$ нм. Предельную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект, найдем из соотношения $A = h\nu_0 = h\dfrac{c}{\lambda_0}$, откуда $\lambda_0 = \dfrac{hc}{A} = 234$ нм.

19.18. Фотоны с энергией $\varepsilon = 4{,}9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4{,}5$ эВ. Найти максимальный импульс p_{max}, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $\varepsilon = A + \dfrac{mv^2}{2} = A + \dfrac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2m(\varepsilon - A)} = 3{,}4 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

19.19. Найти постоянную Планка h, если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ Гц — разностью потенциалов $U_2 = 16{,}5$ В.

Решение:

Имеем $h\nu_1 = A + eU_1$ — (1); $h\nu_2 = A + eU_2$ — (2). Вычитая (1) из (2), получим $h(\nu_2 - \nu_1) = e(U_2 - U_1)$, откуда $h = \dfrac{U_2 - U_1}{\nu_2 - \nu_1} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

19.20. Вакуумный фотоэлемент состоит из центрального катода (вольфрамового шарика) и анода (внутренней поверхности посеребренной изнутри колбы). Контактная разность потенциалов между электродами $U_0 = 0{,}6$ В ускоряет вылетающие электроны. Фотоэлемент освещается светом с длиной волны $\lambda = 230$ нм. Какую задерживающую разность потенциалов U надо приложить между электродами, чтобы фототок упал до нуля? Какую скорость v получат электроны, когда они долетят до анода, если не прикладывать между катодом и анодом разности потенциалов?

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $eU = h\dfrac{c}{\lambda} - A + eU_0$ (см. задачу 19.15), откуда $U = \dfrac{hc/\lambda - A}{e} + U_0$. Подставляя числовые данные, получим $U = 1{,}5$ В. Чтобы фототок упал до нуля, задерживающая разность потенциалов должна удовлетворять условию $eU = \dfrac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}} = 7{,}3 \cdot 10^5$ м/с.

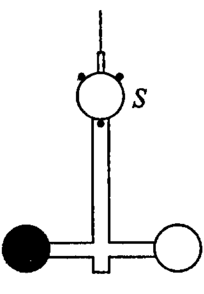
19.21. Между электродами фотоэлемента предыдущей задачи приложена задерживающая разность потенциалов $U = 1$ В. При какой предельной длине волны λ_0 падающего на катод света начинается фотоэффект?

Решение:

Имеем $U_e = h\dfrac{c}{\lambda_0} - A$, откуда $\lambda_0 = \dfrac{hc}{eU + A}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_0 = 226$ нм.

19.22. На рисунке показана часть прибора, с которым П. Н. Лебедев производил свои опыты по измерению светового давления. Стеклянная крестовина, подвешенная на тонкой нити, заключена в откачанный сосуд и имеет на концах два легких кружка из платиновой фольги. Один кружок зачернен, другой оставлен блестящим. Направляя свет на один из кружков и измеряя угол поворота нити (для зеркального отсчета служит зеркальце S), можно определить световое давление. Найти световое давление P и световую энергию E, падающую от дуговой лампы в единицу времени на единицу площади кружков. При освещении блестящего кружка отклонение зайчика $a = 76$ мм по шкале, удаленной от зеркальца на расстояние $b = 1200$ мм. Диаметр кружков $d = 5$ мм. Расстояние от центра кружка до оси вращения $l = 9{,}2$ мм. Коэффициент отражения света от блестящего кружка $\rho = 0{,}5$. Постоянная момента кручения нити ($M = k\alpha$) $k = 2{,}2 \cdot 10^{-11}$ Н·м/рад.

Решение:



Имеем $P = \dfrac{F}{S}$ — (1), где F — сила светового давления на кружок площадью S. Но $F = \dfrac{M}{l} = \dfrac{k\alpha}{l}$ — (2), где M — момент кручения нити, l — расстояние от центра кружка до оси вращения, α — угол поворота кружка. Зная, что при повороте зеркальца на угол α отраженный луч повернется на угол 2α, найдем: $tg2\alpha = \frac{a}{b}$. Для малых углов $tg2\alpha \approx 2\alpha = \frac{a}{b}$. Отсюда $\alpha = \frac{a}{2b}$ — (3). Решая совместно уравнения (1) — (3), получим $P = \frac{ka}{2lbS} = 3{,}85 \cdot 10^{-6}$ Па. Световая энергия $E = \frac{Pc}{1+\rho} = = 770$ Дж/(с·м^2).

19.23. В одном из опытов П. Н. Лебедева при падении света на зачерненный кружок ($\rho = 0$) угол поворота нити был равен $\alpha = 10'$. Найти световое давление P и мощность N падающего света. Данные прибора взять из условия задачи 19.22.

Решение:

Имеем $p = \frac{k\alpha}{lS} = \frac{4k\alpha}{l\pi d^2}$ (см. задачу 19.22). Подставляя числовые данные, получим $p = 3{,}6 \cdot 10^{-7}$ Н/м^2. С другой стороны, световое давление $p = \frac{E}{c}(1+\rho)$. По условию коэффициент отражения света $\rho = 0$, тогда $p = \frac{E}{c}$ — (1), где E — количество энергии, падающей на единицу поверхности в единицу времени. Тогда мощность N света, падающего на площадь S кружка, найдем из соотношения $N = E \cdot S$. Из (1) имеем $E = pc$, кроме того, $S = \frac{\pi d^2}{4}$, отсюда $N = \frac{pc \cdot \pi d^2}{4} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ Вт.

19.24. В одном из опытов П. Н. Лебедева мощность падающего на кружки монохроматического света ($\lambda = 560$ нм) была равна $N = 8{,}33$ мВт. Найти число фотонов I, падающих в единицу времени на единицу площади кружков, и импульс силы $F\Delta\tau$, сообщенный единице площади кружков за единицу времени, для значений ρ, равных: 0; 0,5; 1. Данные прибора взять из условия задачи 19.22.

Решение:
Найдем концентрацию фотонов в пучке света, падающем на кружок, из соотношения $n = \frac{\omega}{\varepsilon}$ — (1), где ω — объемная плотность энергии, ε — энергия одного фотона. Поскольку $\omega = \frac{E}{c} = \frac{N}{Sc}$, а $\varepsilon = h\frac{c}{\lambda}$, то выражение (1) примет вид $n = \frac{N\lambda}{Sc^2 h}$ — (2). Площадь кружка $S = \frac{\pi d^2}{4} = 19{,}6 \cdot 10^6$ м^2. Число I фотонов, падающих за единицу времени на единицу площади, найдем из соотношения $I = \frac{N}{St}$, где N — число фотонов, падающих за время t на поверхность площадью S. Но $N = ncSt$, следовательно, $I = \frac{ncSt}{St} = nc$. С учетом (2) получим $I = \frac{N\lambda}{Sch} = 1{,}2 \cdot 10^{21}$ с$^{-1}$·м$^{-2}$. Импульс силы $F\Delta\tau$, сообщенный единице площади кружков за единицу времени, будет численно равен световому давлению p, т. е. $F\Delta\tau = p = \frac{N}{Sc}(1+\rho)$. Подставляя числовые данные, получим: а) $F_1\Delta\tau = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$ Н·с/м^2; б) $F_2\Delta\tau = 2{,}13 \times 10^{-6}$ Н·с/м^2; в) $F_3\Delta\tau = 2{,}84 \cdot 10^{-6}$ Н·с/м^2.

19.25. Русский астроном Ф. А. Бредихин объяснил форму кометных хвостов световым давлением солнечных лучей. Найти световое давление P солнечных лучей на абсолютно черное тело, помещенное на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля. Какую массу m должна иметь частица в кометном хвосте, помещенная на этом расстоянии, чтобы сила светового давления на нее уравновешивалась силой притяжения частицы Солнцем?

Площадь частицы, отражающую все падающие на нее лучи, считать равной $S = 0{,}5 \cdot 10^{-12}$ м^2. Солнечная постоянная $K = 1{,}37$ кВт/м^2.

Решение:

Световое давление $P = \dfrac{E}{c}(1+\rho)$. В условиях данной задачи $E = K$; $\rho = 0$. Тогда $P = \dfrac{K}{c} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}$ Па. Сила светового давления $F_1 = PS$, сила притяжения частицы Солнцем $F_2 = G\dfrac{mM}{R^2}$, где M — масса Солнца. По условию $F_1 = F_2$, т. е. $PS = G\dfrac{mM}{R^2}$, откуда масса частицы $m = \dfrac{PSR^2}{GM}$. Подставляя числовые данные, получим $m = 3{,}9 \cdot 10^{-16}$ кг.

19.26. Найти световое давление P на стенки электрической 100-ваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом $r = 5$ см. Стенки лампы отражают 4% и пропускают 6% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

Решение:

По определению светового давления $P = \dfrac{E}{c}(1+\rho)$ — (1), где $E = \dfrac{N}{S}$ — (2) — энергия, падающая на единицу поверхности за единицу времени, N — мощность лампы, $S = 4\pi r^2$ — (3) — площадь поверхности колбы, ρ — коэффициент отражения света. Подставляя (3) в (2), получаем $E = \dfrac{N}{4\pi r^2}$ — (4), затем, подставляя (4) в (1), окончательно находим $P = \dfrac{N(1+\rho)}{4\pi r^2 c} = 11{,}03$ мкПа.

19.27. На поверхность площадью $S = 0{,}01\,\text{м}^2$ в единицу времени падает световая энергия $E = 1{,}05$ Дж/с. найти световое давление P в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на нее лучи.

Решение:

Полностью поглощает лучи черная поверхность, а полностью отражает — зеркальная. При падении на черную поверхность фотон с энергией E_0 поглощается, передавая поверхности импульс $\frac{E_0}{c}$. За время Δt поверхность площадью S поглотит излучение с энергией $E = IS\Delta t$ — (1), содержащее $\frac{E}{E_0}$ фотонов. Переданный поверхности импульс $\frac{E}{E_0}\frac{E_0}{c} = \frac{IS\Delta t}{c}$; с другой стороны, он равен $F\Delta t = P_1 S\Delta t$. Отсюда $P_1 = \frac{I}{c}$. Из (1) найдем, учитывая, что по условию $\Delta t = 1$ с, $I = \frac{E}{S}$, тогда $P_1 = \frac{E}{Sc} = 0{,}35 \cdot 10^{-6}$ Па. При отражении от зеркальной поверхности фотоны изменяют свой импульс на противоположный. При этом каждый фотон передает поверхности импульс $\frac{2E_0}{c}$; таким образом, давление света на зеркальную поверхность вдвое больше, чем на черную. Т. е. $P_2 = 2\frac{E}{Sc} = 0{,}7 \cdot 10^{-6}$ Па.

19.28. Монохроматический пучок света ($\lambda = 490$ нм), падая по нормали к поверхности, производит световое давление $P = 4{,}9$ мкПа. Какое число фотонов I падает в единицу времени на единицу площади этой поверхности? Коэффициент отражения света $\rho = 0{,}25$.

Решение:

Воспользуемся формулой из задачи 19.24, выражающей число фотонов, падающих в единицу времени на площадь S: $I = \frac{N\lambda}{Sch}$. Здесь $\frac{N}{S}$ — мощность света, падающего на единицу площади, причем $\frac{N}{S} = E = \frac{Pc}{1+\rho}$ (см. задачу 19.23). Отсюда $I = \frac{P\lambda}{h(1+\rho)} = 2{,}9 \cdot 10^{21}\ \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$.

19.29. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 70{,}8$ пм испытывают комптоновское рассеяние на парафине. Найти длину волны λ рентгеновских лучей, рассеянных в направлениях: а) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; б) $\varphi = \pi$.

Решение:

Изменение длины волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии определяется формулой $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - cos\,\varphi)$, где φ — угол рассеяния, m — масса электрона. Отсюда $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - cos\,\varphi)$. Подставляя числовые данные, получим: а) $\lambda = 73{,}22 \cdot 10^{-12}$ м; б) $\lambda = 75{,}6 \cdot 10^{-12}$ м.

19.30. Какова была длина волны λ_0 рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\varphi = 60°$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной $\lambda = 25{,}4$ пм?

Решение:

Имеем $\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - cos\,\varphi)$ (см. задачу 19.29), отсюда $\lambda_0 = \lambda - \frac{h}{mc}(1 - cos\,\varphi)$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_0 = 24{,}2 \cdot 10^{-12}$ м.

19.31. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\varphi = 90°$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию W_e и импульс электрона отдачи.

Решение:

Кинетическая энергия электрона равна энергии, потерянной фотоном: $W_e = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$. Подставляя числовые данные, получим $W_e = 10{,}56 \cdot 10^{-16}$ Дж $= 6{,}6 \cdot 10^3$ эВ. Импульс и кинетическая энергия электрона связаны соотношением $W = \frac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2mW} = 4{,}4 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

19.32. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Найти энергию W и импульс p рассеянного фотона.

Решение:

Энергия падающего фотона $W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$. Энергия рассеянного фотона $W = \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$. Кинетическая энергия электрона отдачи $W_e = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$. По условию $W_e = \frac{W_0}{2}$, т. е. $\frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)} = \frac{hc}{2\lambda_0}$. Отсюда $\frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = W = \frac{hc}{2\Delta\lambda}$, где $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) = \frac{h}{mc}$. Окончательно имеем $W = \frac{mc^2}{2}$, т. е. энергия рассеянного фотона равна половине энергии покоя электрона. Подставляя числовые данные, получим $W = 41 \cdot 10^{-15}$ Дж $= 0{,}26 \cdot 10^6$ эВ. Импульс фотона $p = \frac{W}{c} = 13{,}7 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

19.33. Энергия рентгеновских лучей $\varepsilon = 0{,}6$ МэВ. Найти энергию W_e электрона отдачи, если длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20%.

Решение:

Кинетическая энергия электрона отдачи $W_e = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$ (см. задачу 19.31). Энергия рентгеновских лучей $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_0}$, т. е. можно записать, что $W_e = \varepsilon \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$ — (1). По условию $\Delta\lambda = 0{,}2\lambda_0$; $\lambda_0 + \Delta\lambda = 1{,}2\lambda_0$, тогда из (1) получим $W = 0{,}17\varepsilon = 0{,}1$ МэВ.

19.34. Найти длину волны де Бройля λ для электронов, прошедших разность потенциалов $U_1 = 1$ В и $U_2 = 100$ В.

Решение:

Пучок элементарных частиц обладает свойством плоской волны, распространяющейся в направлении перемещения этих частиц. Длина волны λ, соответствующая этому пучку, определяется соотношением де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2Wm}}$, где v — скорость частиц, m — масса частиц, W — их кинетическая энергия. Если скорость v частиц соизмерима со скоростью света c, то эта формула принимает вид $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$, где $\beta = \frac{v}{c}$, m_0 — масса покоя частицы. Пройдя разность потенциалов U, электрон приобретает кинетическую энергию, при этом $eU = \frac{mv^2}{2}$. Отсюда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (3). При $U_1 = 1$ В получим $v_1 = 6 \cdot 10^5$ м/с, при $U_2 = 100$ В получим $v_2 = 6 \cdot 10^6$ м/с. В первом случае для нахождения длины волны де Бройля можно применить уравнение (1), во втором случае лучше использовать уравнение (2). Подставляя числовые данные, получим $\lambda_1 = 1{,}22 \cdot 10^{-9}$ м; $\lambda_2 = 0{,}122 \cdot 10^{-9}$ м.

19.35. Решить предыдущую задачу для пучка протонов.

Решение:

Найдем скорость протонов, прошедших разность потенциалов U_1 и U_2. По формуле (3) из предыдущей задачи получим $v_1 = 1{,}38 \cdot 10^4$ м/с; $v_2 = 1{,}38 \cdot 10^5$ м/с. Следовательно, в обоих случаях можно использовать формулу $\lambda = \frac{h}{mv}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_1 = 29 \cdot 10^{-12}$ м; $\lambda_2 = 2{,}9 \cdot 10^{-12}$ м.

19.36. Найти длину волны де Бройля λ для: а) электрона, движущегося со скоростью $v = 10^6$ м/с; б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре

$T = 300$ К; в) шарика массой $m = 1$ г, движущегося со скоростью $v = 1$ см/с.

Решение:

Длина волны де Бройля определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{mv}$ — (1) для $v << c$ или соотношением $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2}$ — (2) для скоростей v, соизмеримых со скоростью света c. а) Воспользовавшись уравнением (2), найдем $\lambda = 730 \cdot 10^{-12}$ м. б) Скорость атома водорода $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 2735$ м/с, т. е. $v << c$. По формуле (1) найдем $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{hN_A}{\mu v} = 145 \cdot 10^{-12}$ м. в) Поскольку скорость шарика $v << c$, то по формуле (1) найдем $\lambda = 6{,}6 \cdot 10^{-29}$ м, т. е. волновые свойства шарика обнаружить невозможно.

19.37. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, имеющего кинетическую энергию: а) $W_1 = 10$ кэВ; б) $W_2 = 1$ МэВ.

Решение:

Имеем $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$ (см. задачу 19.34). Подставляя числовые данные, получим: а) $\lambda = 12{,}3 \cdot 10^{-12}$ м; б) $\lambda = 0{,}87 \cdot 10^{-12}$ м.

19.38. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 200$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 2{,}02$ пм. Найти массу m частицы, если ее заряд численно равен заряду электрона.

Решение:

Длина волны де Бройля определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$ — (1), где $W = eU$ — (2) — энергия частицы, m_0 — масса покоя частицы. Из (2) найдем $W = 3{,}2 \cdot 10^{-17}$ Дж. Поскольку $W << c$, величиной $\frac{W^2}{c^2}$ в уравнении (1) можно пренебречь и оно примет вид $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm}}$, откуда $m = \frac{h^2}{2W\lambda^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

19.39. Составить таблицу значений длин волн де Бройля λ для электрона, движущегося со скоростью v, равной: $2 \cdot 10^8$; $2{,}2 \cdot 10^8$; $2{,}4 \cdot 10^8$; $2{,}6 \cdot 10^8$; $2{,}8 \cdot 10^8$ м/с.

Решение:

Воспользовавшись формулой для нахождения длины волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, составим таблицу.

v, 10^8 м/с	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
λ, пм	2,7	2,25	1,82	1,39	0,925

19.40. α-частица движется по окружности радиусом $r = 8{,}3$ мм в однородном магнитном поле, напряженность которого $H = 18{,}9$ кА/м. Найти длину волны де Бройля λ для α-частицы.

Решение:

На α-частицу, движущуюся в однородном магнитном поле, действует сила Лоренца $F_л = qvB$ — (1), которая является центростремительной силой и сообщает частице нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{r}$ — (2). По второму закону Ньютона $F_л = \dfrac{mv^2}{r}$ — (4). Приравнивая правые части уравнений (1) и (4), получаем $qvB = \dfrac{mv^2}{r}$, откуда скорость α-частицы $v = \dfrac{qBr}{m}$ — (5). Магнитная индукция связана с напряженностью магнитного поля соотношением $B = \mu\mu_0 H$ — (6), причем для воздуха магнитная проницаемость $\mu = 1$. Подставляя (6) в (5), получаем $v = \dfrac{q\mu_0 Hr}{m}$ — (7). Длина волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{mv}$ — (8). Подставляя (7) в (8), окончательно находим $\lambda = \dfrac{h}{q\mu_0 Hr} = 13{,}11$ пм.

19.41. Найти длину волны де Бройля λ для атома водорода, движущегося при температуре $T = 293$ К с наиболее вероятной скоростью.

Решение:
Наиболее вероятная скорость движения атома водорода $v_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$ — (1), где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Длина волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{mv_в}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2kT/m}} = 180$ пм.

§ 20. Атом Бора. Рентгеновские лучи

В этом разделе используются данные таблиц 3 и 19 из приложения. В задачах 20.5, 20.33 дан авторский вариант решения.

20.1. Найти радиусы r_k трех первых боровских электронных орбит в атоме водорода и скорости v_k электрона на них.

Решение:

На электрон, движущийся в атоме водорода по k -й боровской орбите, действует кулоновская сила $F = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}$ — (1), где e — заряд электрона. Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v_k^2}{r_k}$ — (2), где v_k — скорость электрона на k -й орбите. По второму закону Ньютона $F = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2} = \dfrac{mv_k^2}{r_k}$, откуда $r_k = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_k^2}$ — (4). Согласно первому постулату Бора движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\dfrac{h}{2\pi}$ — (5). Решая совместно уравнения (4) и (5), найдем $v_k = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ и $r_k = \dfrac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$. По результатам вычислений составим таблицу.

k	1	2	3
v, 10^6 м/с	2,18	1,08	0,73
r, 10^{-12} м	52,9	211,6	476,1

20.2. Найти кинетическую $W_к$, потенциальную $W_п$ и полную W энергии электрона на первой боровской орбите.

Решение:

Скорость движения электрона по k-й орбите $v_k = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (1) (см. задачу 20.1). Кинетическая энергия электрона на k-й орбите $W_{к(k)} = \dfrac{mv_k^2}{2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W_{к(k)} = \dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 k^2}$. По условию $k = 1$. Подставляя числовые данные, получим $W_{к(1)} = 21{,}78 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 13{,}6$ эВ. Потенциальная энергия электрона $W_{п(1)} = -2W_{к(1)} = -27{,}2$ эВ. Полная энергия электрона $W_1 = W_{к(1)} + W_{п(1)} = -13{,}6$ эВ.

20.3. Найти кинетическую энергию $W_к$ электрона, находящегося на k-й орбите атома водорода, для $k = 1, 2, 3$ и ∞.

Решение:

Кинетическая энергия электрона на k-й орбите $W_{к(k)} = \dfrac{mv_k^2}{2}$ (см. задачу 20.2). Если $k = 1$, то $W_{к(1)} = 13{,}6$ эВ. Если $k = 2$, то $W_{к(1)} = 3{,}4$ эВ. Если $k = 3$, то $W_{к(1)} = 1{,}51$ эВ. Если $k = \infty$, то $W_{к(1)} = 0$.

20.4. Найти период T обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода и его угловую скорость ω.

Решение:

Радиус k-й боровской орбиты электрона в атоме водорода и скорость движения электрона по k-й орбите соответственно равны $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$ — (1) и $v_k = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (2) (см. задачу 20.1). Период обращения электрона $T_k = \frac{2\pi r_k}{v_k}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $T_k = \frac{4\varepsilon_0^2 k^3 h^3}{me^4}$ — (4). Для $k=1$ найдем $T_1 = 1{,}52 \cdot 10^{-16}$ с. Угловая скорость движения электрона по k-й орбите $\omega_k = \frac{2\pi}{T_k}$ — (5). Подставляя (4) в (5), получим $\omega_k = \frac{\pi m e^4}{2\varepsilon_0^2 k^3 h^3}$. Для $k=1$ найдем $\omega_1 = 4{,}13 \cdot 10^{16}$ рад/с.

20.5. Найти наименьшую λ_{min} и наибольшую λ_{max} длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

Решение:

Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1).

k	n	Серия	Область
1	2,3,4 ...	Лаймана	Ультрафиолетовая
2	3,4,5 ...	Бальмера	видимая
3	4,5,6 ...	Пашена	инфракрасная
4	5,6,7 ...	Брэккета	инфракрасная
5	6,7,8 ...	Пфунда	инфракрасная

Таким образом, видимая область спектра соответствует значениям $k=2$ и $n=3$, 4, 5 ... Очевидно, наименьшая длина волны спектральных линий этой серии будет при $n = \infty$. Тогда из (1) имеем $\frac{1}{\lambda_{min}} = \frac{R}{4}$ или $\lambda_{min} = \frac{4}{R} = 365$ нм (с точностью до третьей значащей цифры). Наибольшая длина волны соответствует $n = 3$, при этом $\lambda_{max} = 656$ нм.

20.6. Найти наибольшую длину волны λ_{max} в ультрафиолетовой области спектра водорода. Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

Решение:

Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). В ультрафиолетовой области $k = 1$, $n = 2, 3, 4$ ... — серия Лаймана. Наибольшая длина волны соответствует $n = 2$, тогда из (1) имеем $\frac{1}{\lambda_{max}} = \frac{3R}{4}$ или $\lambda_{max} = \frac{4}{3R}$, где $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_{max} = 121$ нм. С другой стороны, из соотношения де Бройля для релятивистских частиц $\lambda_{max} = \frac{h}{mv_{min}}\sqrt{1 - \frac{v_{min}^2}{c^2}}$ — (3). Приравнивая правые части соотношений (2) и (3), получим $\frac{4}{3R} = \frac{h}{mv_{min}}\sqrt{1 - \frac{v_{min}^2}{c^2}}$, откуда наименьшая скорость, необходимая для появления данной спектральной линии, равна $v_{min} = \frac{3Rhc}{\sqrt{16m^2c^2 + 9R^2h^2}} = 1{,}88 \cdot 10^6$ м/с.

20.7. Найти потенциал ионизации U_i атома водорода.

Решение:

Потенциал ионизации U_i атома определяется соотношением $eU_i = A_i$, где A_i — работа по удалению электрона с нормальной орбиты на бесконечность. Для атома водорода $A_i = h\nu = hRc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. При $k = 1$ и $n = \infty$ имеем $A_i = hRc$, потенциал ионизации $U_i = \frac{A_i}{e} = \frac{hRc}{e} = 13{,}6$ В.

20.8. Найти первый потенциал возбуждения U_1 атома водорода.

Решение:

Первый потенциал возбуждения атома водорода определяется из закона сохранения энергии $W_{п(1)} = W_{к(1)} - W_{к(2)}$, где $W_{п(1)} = eU_1$ — (2) — потенциальная энергия электрона, необходимая для возбуждения. $W_{K(k)} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 k^2}$ — (3) (см. задачу 20.2) — кинетическая энергия электрона на по k-й орбите. Подставляя (2) и (3) в (1), получим $eU_1 = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}\right)$, откуда, учитывая, что $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$, найдем $U_1 = \frac{3me^3}{32\varepsilon_0^2 h^2} = 10{,}2$ В.

20.9. Какую наименьшую энергию W_{min} (в электронвольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов появились все линии всех серий спектра водорода? Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь эти электроны?

Решение:

Все линии всех серий спектра водорода появятся при ионизации атома водорода. Следовательно, наименьшая энергия $W_{min} = eU_i = \frac{mv_{min}^2}{2}$ — (1). Поскольку $W_{min} = 13{,}6$ эВ (см. задачу 20.7), то из (1) найдем $v_{min} = \sqrt{\frac{2eU_i}{m}} = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

20.10. В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атома водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?

Решение:

Энергия, необходимая для перевода атома в первое возбужденное состояние, $W_1 = 10{,}2$ эВ (см. задачу 20.8). Энергия, необходимая для перевода атома во второе возбужденное состояние $(k = 1,\ n = 3)$, $W_2 = 12{,}1$ эВ. Таким образом, спектр водорода будет иметь только одну спектральную линию, если энергия бомбардирующих электронов лежит в интервале $10{,}2 \le W \le 12{,}1$ эВ.

20.11. Какую наименьшую энергию W_{min} (в электронвольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел три спектральные линии? Найти длины волн λ этих линий.

Решение:

Длины волн спектральных линий водорода для всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). Для серий Лаймона первые две линии будут иметь следующие длины волн: 1) Если $k = 1$ и $n = 2$, то $\lambda_1 = 121$ нм. 2) Если $k = 1$ и $n = 3$, то $\lambda_2 = 102{,}6$ нм. Кроме того, первая линия в серии

Бальмера при $k=2$ и $n=3$ будет иметь длиину волны $\lambda_3 = 656{,}3$ нм. Наименьшая энергия бомбардирующих электронов, необходимая для возникновения данных спектральных линий, W_{min} по закону сохранения энергии будет равна энергии, необходимой для перевода атома из основного во второе возбужденное состояние, т. е. $W_{min} = W_{k(1)} - W_{k(3)} = 12{,}03$ эВ.

20.12. В каких пределах должны лежать длины волн λ монохроматического света, чтобы при возбуждении атома водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии?

Решение:

Для наблюдения трех спектральных линий необходимо, чтобы мог осуществляться переход электронов в атоме водорода с первого электрического уровня на третий. В этом случае будут наблюдаться две линии серии Лаймана и одна линия серии Бальмера. Формула, позволяющая найти длины волн, соответствующие линиям водородного спектра, имеет вид $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где k и n — номера орбит, $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Тогда $\lambda = \frac{k^2 n^2}{R\left(n^2 - k^2\right)}$. Для минимальной длины волны $k=1$ и $n=3$, следовательно, $\lambda_{min} = \frac{9}{8R} = 102{,}6$ нм. Для максимальной длины волны $k=1$ и $n=3$, следовательно, $\lambda_{min} = \frac{9}{8R} = 102{,}6$ нм. Для максимальной длины волны $k=1$ и $n=2$, следовательно, $\lambda_{max} = \frac{4}{3R} = 121{,}5$ нм. Таким образом, $102{,}6 \le \lambda \le 121{,}5$ нм.

20.13. На сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 486$ нм?

Решение:

Согласно второму постулату Бора частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой $h\nu = \Delta W$ или $\nu = \frac{\Delta W}{h}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2), где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, λ — длина волны излученного атомом фотона. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{\Delta W}{h} = \frac{c}{\lambda}$, откуда изменение кинетической энергии электрона $\Delta W = \frac{ch}{\lambda} = 2{,}55$ эВ.

20.14. В каких пределах должны лежать длины волн λ монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус орбиты r_k электрона увеличился в 9 раз?

Решение:

Радиусы орбит, по которым возможно движение электронов в атоме водорода, согласно первому постулату Бора удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$ — (1), где m — масса электрона, v_k — его скорость на k-й орбите, r_k — радиус этой орбиты, $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. На электроны действует кулоновская сила $F_K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}$ — (2), которая является центростремительной и сообщает электронам нормальное ускорение $a_n = \frac{vk^2}{r_k}$ — (3). По второму закону Ньютона $F_K = ma_n$ — (4). Подставляя (2) и (3) в (4), получаем $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2} = m\frac{v_k^2}{r_k}$ — (5), где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Решая совместно уравнения (1) и (5), находим $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$ — (6). По условию $\frac{r_n}{r_k} = 9$, тогда из формулы (6) следует, что $\frac{n}{k} = 3$. Поскольку $n = 3k$, то переход электронов осуществляется между первым и третьим энергетическими уровнями, тогда (см. задачу 20.12) длины волн $102{,}6 \le \lambda \le 121{,}5$ нм.

20.15. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки $d = 5$ мкм. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом $\varphi = 41°$?

Решение:
Согласно условию главных максимумов для дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ — (1). В нашем случае $k = 5$, тогда из формулы (1) имеем $\lambda = \frac{d\sin\varphi}{k}$ — (2). Изменение кинетической энергии электрона при переходе с одной орбиты на другую (см. задачу 20.13) определяется соотношением $\Delta W = \frac{ch}{\lambda}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\Delta W = \frac{chk}{d\sin\varphi} = 1{,}89$ эВ. Подбором находим, что такой переход возможен с $n = 3$ на $k = 2$ в серии Бальмера.

20.16. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, движущегося по первой боровской орбите атома водорода.

Решение:

Длина волны де Бройля для электрона (см. задачу 20.6) определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{mv_k}\sqrt{1-\frac{v_k^2}{c^2}}$ — (1), где $v_k = \frac{l^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (2) (см. задачу 20.1) — скорость электрона на k-й орбите. Подставляя (2) в (1), получаем $\lambda = \frac{2\varepsilon_0 kh^2}{ml^2}\sqrt{1-\frac{l^4}{4\varepsilon_0 k^2 h^2 c^2}} = 0{,}33$ нм

20.17. Найти радиус r_1 первой боровской электронной орбиты для однократно ионизированного гелия и скорость v_1 электрона на ней

Решение:

В однократно ионизированном гелии на электрон, движущийся по первой боровской орбите, будет действовать сила Кулона $F_K = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$ — (1), где Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона, r_1 — радиус первой боровской орбиты. Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \frac{v_1^2}{r_1}$ — (2), где v_1 — скорость электрона на первой боровской орбите. По второму закону Ньютона $F_K = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{mv_1^2}{r_1}$ — (4). Согласно первому постулату Бора движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам, раднусы которых удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$, где k — номер орбиты. В нашем случае $k=1$, поэтому $mv_1 r_1 = \frac{h}{2\pi}$ — (5), где $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Решая совместно уравнения (4) и (5), находим радиус первой боровской орбиты r_1 и скорость электрона на ней, которые соответственно равны $r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} = 26{,}47$ пм и $v_1 = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 h} = 4{,}37\cdot10^6$ м/с.

20.18. Найти первый потенциал возбуждения U_i: а) однократно ионизированного гелия; б) двукратно ионизированного лития.

Решение:

Согласно второму постулату Бора частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой $h\nu = W_n - W_k$ — (1), где k и n — номера орбит, причем $n > k$. В нашем случае $n = 2$ и $k = 1$. В водородоподобных ионах частоты определяются из соотношения $\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где $R = 1{,}097\cdot10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Подставляя значения k и n для нашего случая, получаем $\nu = \frac{3RcZ^2}{4}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\nu = \frac{3RcZ^2 h}{4} = W_n - W_k$ — (3). Для возбуждения водородоподобных ионов электроны должны обладать энергией $W = eU_1$, тогда по закону сохранения энергии $eU_1 = W_n - W_k$ — (4). Приравнивая левые части уравнений (3) и (4), получаем $eU_1 = \frac{3RcZ^2h}{4}$, откуда первый потенциал возбуждения водородоподобного иона $U_1 = \frac{3RcZ^2h}{4e}$. а) Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $U_1 = 40{,}8$ В. б) Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $U_2 = 91{,}8$ В.

20.19. Найти потенциал ионизации U_i: а) однократно ионизированного гелия; б) двукратно ионизированного лития.

Решение:

Потенциал ионизации водородоподобного иона U_i определяется уравнением $eU_i = A_i$ — (1), где A_i — работа удаления электрона с нормальной орбиты в бесконечность. Для водородоподобных ионов $A_i = h\nu$ — (2), где $\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $A_i = hRcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (4). При $k = 1$ и $n = \infty$ формула (4) примет вид $A_i = hRcZ^2$ — (5). Подставляя (5) в (1), получаем $eU_i = hRcZ^2$, откуда потенциал ионизации $U_i = \frac{hRcZ^2}{e}$.

а) Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $U_i = 54{,}5$ В. б) Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $U_i = 122{,}8$ В.

20.20. Найти длину волны λ фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую в однократно ионизированном атоме гелия.

Решение:

Частота излучения фотона водородоподобным ионом (см. задачу 20.18) при переходе электрона со второй боровской орбиты на первую равна $\nu = \dfrac{3RcZ^2}{4}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ — (2), где λ — длина волны фотона. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{2RcZ^2}{4}$ или $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{3RZ^2}{4}$, откуда длина волны $\lambda = \dfrac{4}{3RZ^2}$. Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $\lambda = 30{,}4$ нм.

20.21. Решить предыдущую задачу для двукратно ионизированного атома лития.

Решение:

Длина волны фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую (см. задачу 20.20), равна $\lambda = \dfrac{4}{3RZ^2}$. Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $\lambda = 13{,}5$ нм.

20.22. D-линия натрия излучается в результате такого перехода с одной орбиты атома на другую, при котором энергия атома уменьшается на $\Delta W = 3{,}37 \cdot 10^{-19}$ Дж. Найти длину волны λ D-линии натрия.

Решение:

Изменение кинетической энергии электрона при переходе с одной орбиты атома на другую (см. задачу 20.13) равно

$\Delta W = \dfrac{ch}{\lambda}$, откуда длина волны D-линии натрия $\lambda = \dfrac{ch}{\Delta W} = 589$ нм.

20.23. На рисунке изображена схема прибора для определения резонансного потенциала натрия. Трубка содержит пары натрия. Электроды G и A имеют одинаковый потенциал. При какой наименьшей ускоряющей разности потенциалов U между катодом K и сеткой G наблюдается спектральная линия с длиной волны $\lambda = 589$ нм?

Решение:

По закону сохранения энергии потенциальная энергия электрического поля между катодом и анодом $W_п = eU$ — (1) идет на изменение кинетической энергии электронов при переходе с одной орбиты на другую, которое (см. задачу 20.13) равно $\Delta W = \dfrac{ch}{\lambda}$ — (2), т. е. $W_п = \Delta W$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $eU = \dfrac{ch}{\lambda}$, откуда ускоряющая разность потенциалов $U = \dfrac{ch}{e\lambda} = 2{,}1$ В.

20.24. Электрон, пройдя разность потенциалов $U = 4{,}9$ В, сталкивается с атомом ртути и переводит его в первое возбужденное состояние. Какую длину волны λ имеет фотон, соответствующий переходу атома ртути в нормальное состояние?

Решение:

Ускоряющая разность потенциалов (см. задачу 20.23) равна $U = \dfrac{ch}{e\lambda}$. Отсюда длина волны фотона, соответствующего переходу атома ртути в нормальное состояние, $\lambda = \frac{ch}{eU} = 533$ нм.

20.25. На рисунке изображена установка для наблюдения дифракции рентгеновских лучей. При вращении кристалла C только тот луч будет отражаться на фотографическую пластинку B, длина волны которого удовлетворяет уравнению Вульфа — Брэгга. При каком наименьшем угле φ между мощностью кристалла и пучком рентгеновских лучей были отражены рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 20$ пм? Постоянная решетки кристалла $d = 303$ пм.

Решение:
Наименьший угол соответствует спектру первого порядка, т. е. $\lambda = 2d\sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d} = 0{,}033$; $\varphi \approx 2°$.

20.26. Найти постоянную решетки d каменной соли, зная молярную массу $\mu = 0{,}058$ кг/моль каменной соли и ее плотность $\rho = 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3. Кристаллы каменной соли обладают простой кубической структурой.

Решение:
Молярный объем каменной соли $V = \frac{\mu}{\rho}$. Количество ионов в молярном объеме равно $2N_A$. Объем, приходящийся на один ион, $V_1 = \frac{\mu}{2\rho N_A}$, отсюда расстояние между ионами, или постоянная решетки, $d = \sqrt[3]{V_1} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{2\rho N_A}} = 281 \cdot 10^{-12}$ м.

20.27. При экспериментальном определении постоянной Планка h при помощи рентгеновских лучей кристалл устанавлнвается под некоторым углом φ, а разность потенциалов U, приложенная к электродам рентгеновской трубки, увеличивается до тех пор, пока не появится линия, соответствующая этому углу. Найти постоянную Планка h из следующих данных: кристалл каменной соли установлен под углом $\varphi = 14°$; разность потенциалов, при которой впервые появилась линия, соответствующая этому углу, $U = 9{,}1$ кВ; постоянная решетки кристалла $d = 281$ пм.

Решение:

При увеличении разности потенциалов U, приложенной к электродам рентгеновской трубки, появляется спектральная линия в спектре первого порядка, длина волны которой λ удовлетворяет уравнению $eU = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ — (1). Но по формуле Вульфа — Брэгга $\lambda = 2d\sin\varphi$ — (2). Из (1) и (2) находим $h = \frac{eU\lambda}{c} = \frac{eU \cdot 2d}{c}\sin\varphi = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж с.

20.28. К электродам рентгеновской трубки приложена разность потенциалов $U = 60$ кВ. Наименьшая длина волны рентгеновских лучей, получаемых от этой трубки, $\lambda = 20{,}6$ пм. Найти из этих данных постоянную h Планка.

Решение:

Частота $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_{min}}$ — (1), соответствующая коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра, где λ_{min} — наименьшая длина волны рентгеновских лучей, получаемых от этой трубки, может быть найдена из соотношения $h\nu_0 = eU$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\frac{hc}{\lambda_{min}} = eU$, откуда постоянная Планка $h = \frac{eU\lambda_{min}}{c} = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

20.29. Найти длину волны λ, определяющую коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, для случаев, когда к рентгеновской трубке приложена разность потенциалов U, равная: 30, 40, 50 кВ.

Решение:

Частота $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda}$ — (1), соответствующая коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра (см. задачу 20.28), может быть найдена из соотношения $h\nu_0 = eU$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\dfrac{hc}{\lambda} = eU$, откуда длина волны, определяющая коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, $\lambda = \dfrac{hc}{eU}$. Если $U_1 = 30$ кВ, то $\lambda_1 = 43{,}1$ пм. Если $U_2 = 40$ кВ, то $\lambda_2 = 31$ пм. Если $U_3 = 50$ кВ, то $\lambda_3 = 24{,}8$ пм.

20.30. Найти длину волны λ, определяющую коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на $\Delta U = 23$ кВ увеличивает искомую длину волны в 2 раза.

Решение:

Длина волны, определяющая коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра (см. задачу 20.29), равна $\lambda = \dfrac{hc}{eU}$ — (1). По условию $2\lambda = \dfrac{hc}{e(U - \Delta U)}$ — (2). Разделив (2) на (1), получаем $\dfrac{U}{U - \Delta U} = 2$, откуда $U = 2\Delta U$ — (3). Подставляя (3) в (1), получаем $\lambda = \dfrac{hc}{2e\Delta U} = 27$ пм.

20.31. Длина волны гамма-излучения радия $\lambda = 1{,}6$ пм. Какую разность потенциалов U надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить рентгеновские лучи с этой длиной волны?

Решение:

Длина волны гамма-излучения радия (см. задачу 20.29) равна $\lambda = \dfrac{hc}{eU}$. Отсюда разность потенциалов, которую необходимо приложить к рентгеновской трубке, $U = \dfrac{hc}{e\lambda} = 775\,\text{кВ}$.

20.32. Какую наименьшую разность потенциалов U надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить все линии K-серии, если в качестве материала антикатода взять: а) медь; б) серебро; в) вольфрам; г) платину?

Решение:

Все линии K-серии (а также линии остальных серий) появятся одновременно, как только будет удален электрон с K-орбиты атома. Для этого надо приложить разность потенциалов U, удовлетворяющую соотношению $eU = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$, где λ — длина волны, соответствующая переходу бесконечно удаленного электрона на K-орбиту, т. е. длина волны, определяющая границу K-серии. Для нашего случая длина волны λ равна (см. таблицу 19): а) 138пм; б) 48,4пм; в) 17,8пм; г) 15,8пм. Искомая разность потенциалов найдется по формуле $U = \dfrac{hc}{e\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим следующие значения для разности потенциалов U: а) 9 кВ; б) 25,3 кВ; в) 69 кВ; г) 79 кВ.

20.33. Считая, что формула Мозли с достаточной степенью точности дает связь между длиной волны λ характеристических рентгеновских лучей и порядковым номером элемента Z, из которого сделан антикатод, найти наибольшую длину волны λ линий K-серии рентгеновских лучей, даваемых трубкой с антикатодом из. а) железа; б) меди; в) молибдена; г) серебра; д) тантала; е) вольфрама; ж) платины. Для K-серии постоянная экранирования $b = 1$.

Решение:

Имеем $\frac{1}{\lambda} = R(Z - b)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). Наибольшая длина волны K-серии соответствует линии K_α. При этом в формуле (1) мы должны положить $b = 1$, $k = 1$, $n = 2$. Решая уравнение (1) относительно λ и подставляя числовые данные, получим значения λ, равные: а) 194пм; б) 155пм; в) 72пм; г) 57,4пм; д) 23,4пм; е) 22,8пм; ж) 20,5пм. Экспериментально найденные значения длин волн λ линии K_α следующие: а) 194пм; б) 154пм; в) 71,2пм; г) 56,3пм; д) 22пм; е) 21,4пм; ж) 19пм.

20.34. Найти постоянную экранирования b для L-серии рентгеновских лучей, если известно, что при переходе электрона в атоме вольфрама с M- на L-слой испускаются рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 143$ пм.

Решение:

Переход электрона с M- на L-слой соответствует значениям $k = 2$ и $n = 3$. Порядковый номер вольфрама в таблице Менделеева $Z = 74$. Из формулы Мозли найдем $b = Z - \frac{1}{\sqrt{\lambda R\left(1/k^2 - 1/n^2\right)}}$. Подставляя числовые данные, получим $b = 5{,}5$.

20.35. При переходе электрона в атоме с L- на K-слой испускаются рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 78{,}8$ пм. Какой это атом? Для K-серии постоянная экранирования $b = 1$.

Решение:

Длина волны рентгеновских характеристических лучей может быть найдена по формуле Мозли $\frac{1}{\lambda} = R(Z-b)^2 \times \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1), где Z — порядковый номер элемента, b — постоянная экранирования. При этом для K-серии $k=1$ и $n=2$. Из формулы (1) находим $Z = \frac{kn}{\sqrt{\lambda R(n^2-k^2)}} + b = 40$. По таблице Менделеева находим, что элемент с порядковым номером $Z = 40$ — цирконий.

20.36. Воздух в некотором объеме V облучается рентгеновскими лучами. Экспозиционная доза излучения $D_э = 4{,}5$ Р. Какая доля атомов, находящихся в данном объеме, будет ионизирована этим излучением?

Решение:

По определению экспозиционной дозы излучения $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (1), где $\Delta Q = N_0 e$ — (2) — суммарный электрический заряд всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе при условии полного использования ионизирующей способности электронов, $\Delta m = \frac{N}{N_A}\mu$ — (3) — масса воздуха.

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $D_э = \frac{N_0 N_A e}{N\mu}$, откуда доля атомов, ионизированных излучением, $\frac{N_0}{N} = \frac{\mu D_э}{N_A e}$. Воздух в первом приближении можно считать азотом с молярной массой $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Подставляя числовые данные, получим $\frac{N_0}{N} = 3{,}42 \cdot 10^{-10}$.

20.37. Рентгеновская трубка создает на некотором расстоянии мощность экспозиционной дозы $P_э = 2{,}58 \cdot 10^{-5}$ А/кг. Какое число N пар ионов в единицу времени создает эта трубка на единицу массы воздуха при данном расстоянии?

Решение:

По определению мощности экспозиционной дозы излучения $P_э = \frac{D_э}{\Delta t}$ — (1), где $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (2) — экспозиционная доза излучения, Δt — интервал времени, за которое получена эта доза, Δm — масса ионизированного вещества, $\Delta Q = Ne$ — (3) — суммарный электрический заряд всех ионов одного знака. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $P_э = \frac{Ne}{\Delta t \Delta m}$, откуда число пар ионов $N = \frac{P_э \Delta t \Delta m}{e}$. По условию $\Delta t = 1$ с и $\Delta m = 1$ кг, тогда, подставляя значения, находим $N = 1{,}61 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$·кг$^{-1}$.

20.38. Воздух, находящийся при нормальных условиях в ионизационной камере объемом $V = 6$ см^3, облучается рентгеновскими лучами. Мощность экспозиционной дозы рентгеновских лучей $P_э = 0{,}48$ мР/ч. Найти ионизационный ток насыщения $I_н$.

Решение:

По определению мощности экспозиционной дозы излучения $P_э = \frac{D_э}{\Delta t}$ — (1), где $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (2) — экспозиционная доза излучения, Δt — интервал времени, за которое получена эта доза. Подставляя (2) в (1), получаем $P_э = \dfrac{\Delta Q}{\Delta m \Delta t}$ — (3). Ионизационный ток насыщения $I_н = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, откуда суммарный электрический заряд всех ионов одного знака $\Delta Q = I_н \Delta t$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $P_э = \dfrac{I_н}{\Delta m}$, откуда ионизационный ток насыщения $I_н = P_э \Delta m$ — (5). Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{\Delta m}{\mu} RT$, учитывая, что молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль, получаем $\Delta m = \dfrac{pV\mu}{RT}$ — (6). Подставляя (6) в (5), окончательно находим $I_н = \dfrac{P_э pV\mu}{RT}$ или

$$I_н = \frac{0{,}48 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}013 \cdot 10^{5} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{3{,}6 \cdot 10^{3} \cdot 8{,}31 \cdot 273} = 10^{-12}\ \text{А}^{*}.$$

20.39. Найти для алюминия толщину $x_{1\ 2}$ слоя половинного ослабления для рентгеновских лучей некоторой длины волны. Массовый коэффициент поглощения алюминия для этой длины волны $\mu_м = 5{,}3\ \text{м}^2/\text{кг}$.

Решение:

Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной x, определяется формулой $I = I_0 e^{-\mu x}$ — (1), где I_0 — интенсивность пучка, падающего на пластинку, μ — линейный коэффициент поглощения. Массовый коэффициент поглощения $\mu_м$ связан с линейным коэффициентом поглощения μ соотношением $\mu_м = \dfrac{\mu}{\rho}$, откуда $\mu = \mu_м \rho$ — (2). Подставляя (2) в (1), полу-

---

* Ответ не совпадает с ответом первоисточника ($2{,}7 \cdot 10^{-16}$ А).

чаем $I = I_0 e^{-\mu_м \rho x}$ — (3). Пройдя поглощающий слой толщиной, равной толщине слоя половинного ослабления $x_{1\ 2}$, рентгеновские лучи будут иметь интенсивность $I = \frac{I_0}{2}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\frac{1}{2} = exp\left(-\mu_м \rho x_{1\ 2}\right)$ — (5). Прологарифмировав выражение (5), получим искомое значение толщины слоя половинного ослабления. $x_{1\ 2} = \frac{ln 2}{\mu_м \rho} = 0{,}5$ мм.

20.40. Во сколько раз уменьшится интенсивность рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 20$ пм при прохождении слоя железа толщиной $d = 0{,}15$ мм? Массовый коэффициент поглощения железа для этой длины волны $\mu_м = 1{,}1$ м^2/кг.

Решение:
Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной d (см. задачу 20.39), равна $I = I_0\, exp\left(-\mu_м \rho d\right)$, откуда $\frac{I_0}{I} = exp\left(\mu_м \rho d\right) = 3{,}68$.

20.41. Найти толщину $x_{1\ 2}$ слоя половинного ослабления для железа в условиях предыдущей задачи.

Решение:
Толщина слоя половинного ослабления (см. задачу 20.39) $x_{1\ 2} = \frac{ln 2}{\mu_м \rho} = 79{,}76$ мкм.

20.42. В нижеследующей таблице приведены для некоторых материалов значения толщины слоя $x_{1\ 2}$ половинного ослабления рентгеновских лучей, энергия которых $W = 1$ МэВ. Найти линейный μ и массовый $\mu_м$ коэффициенты поглощения этих материалов для данной энергии рентгеновских лучей. Для какой длины волны λ рентгеновских лучей получены эти данные?

Вещество	Вода	Алюминий	Железо	Свинец
$x_{1/2}$, см	10,2	4,5	1,56	0,87

Решение:

Толщина слоя половинного ослабления (см. задачу 20.39) $x_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\mu_м \rho}$, откуда массовый коэффициент поглощения $\mu_м = \dfrac{\ln 2}{x_{1/2}\rho}$ — (1). С другой стороны, $\mu_м = \dfrac{\mu}{\rho}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\mu = \dfrac{\ln 2}{x_{1/2}}$ — (3). Подставляя числовые данные в формулы (1) и (3), заполняем таблицу.

Вещество	Вода	Алюминий	Железо	Свинец
$x_{1/2}$, см	10,2	4,5	1,56	0,87
ρ, кг/м^3	1000	2600	7900	11300
μ, м$^{-1}$	6,7	16	44	77
$\mu_м$, 10^{-3} м^2/кг	6,7	6,2	5,6	6,8

Энергия рентгеновских лучей равна $W = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$, откуда длина волны $\lambda = \dfrac{hc}{W} = 1{,}24$ пм.

20.43. Сколько слоев половинного ослабления необходимо для уменьшения интенсивности рентгеновских лучей в 80 раз?

Решение:

Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной d (см. задачу 20.39), равна $I = I_0 \exp(-\mu_м \rho d)$, откуда $\dfrac{I_0}{I} = \exp(\mu_м \rho d)$ — (1). По условию $\frac{I_0}{I} = 80$ — (2). Подставляя (2) в (1) и логарифмируя полученное уравнение, находим $ln 80 = \mu_м \rho d$, откуда толщина слоя, необходимого для уменьшения интенсивности рентгеновских лучей в 80 раз, равна $d = \frac{ln 80}{\mu_м \rho}$ — (3). Толщина слоя половинного ослабления интенсивности рентгеновских лучей равна $x_{1\ 2} = \frac{ln 2}{\mu_м \rho}$ — (4). Количество слоев, необходимое для уменьшения интенсивности в 80 раз, равно $n = \frac{d}{x_{1\ 2}}$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $n = \frac{ln 80}{ln 2} = 6{,}32$.

§ 21. Радиоактивность

В этом разделе используются данные таблиц 3 и 22 приложения. В задаче 21.11 дан авторский вариант решения.

21.1. Сколько атомов полония распадается за время $\Delta t = 1$ сут из $N = 10^6$ атомов?

Решение:

За время Δt распадается число атомов $|\Delta N| = \lambda N \Delta t$ — (1). Эта формула применима при $\Delta t << T_{1\ 2}$, где $T_{1\ 2}$ — период полураспада. Период полураспада полония $T_{1\ 2} = 138$ сут (таблица 22), следовательно, для $\Delta t = 1$ сут число распадающихся атомов можно определить по формуле (1). Подставляя числовые данные, получим $|\Delta N| = \frac{ln 2}{T_{1\ 2}} N \Delta t = $
$= 5025\ сут^{-1}$.

21.2. Сколько атомов радона распадается за время $\Delta t = 1$ сут из $N = 10^6$ атомов?

Решение:

Период полураспада радона $T_{1\ 2} = 3{,}82$ сут, следовательно, мы не можем использовать формулу из предыдущей задачи. Необходимо воспользоваться формулой $N = N_0 e^{-\lambda t}$, тогда искомое количество атомов $\Delta N = N_0 - N = $
$= N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta N = 1{,}67 \cdot 10^5\ сут^{-1}$.

21.3. Найти активность a массы $m = 1$ г радия.

Решение:

Активностью радиоактивного вещества называется число распадов, которое происходит в нем в единицу времени $a = \frac{dN}{dt} = -\lambda N$ — (1), где λ — постоянная распада, N — число атомов радиоактивного вещества. Период полураспада и постоянная распада связаны между собой соотношением $T_{1/2} = \frac{ln 2}{\lambda}$, откуда $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (2). Число распадающихся атомов радия равно $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (3), где $\mu = 226$ г/моль — молярная масса радия, $N_A = 6{,}022 \times$ $\times 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $a = \frac{mN_A ln 2}{\mu T_{1/2}} = 3{,}68 \cdot 10^{10}$ Бк.

21.4. Найти массу m радона, активность которого $a = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Решение:

Активность радиоактивного вещества (см. задачу 21.3) равна $a = \frac{mN_A ln 2}{\mu T_{1/2}}$. Отсюда масса радиоактивного вещества равна $m = \frac{a \mu T_{1/2}}{N_A ln 2} = 6{,}49 \cdot 10^{-9}$ кг.

21.5. Найти массу m полония $^{210}_{84}Po$, активность которого $a = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Решение:

Масса радиоактивного вещества (см. задачу 21.4) равна $m = \frac{a\mu T_{1/2}}{N_A \ln 2} = 0{,}22$ мг.

21.6. Найти постоянную распада λ радона, если известно, что число атомов радона уменьшается за время $t = 1$ сут на 18,2%.

Решение:

Число атомов радиоактивного вещества dN, распадающихся за время dt, пропорционально числу имеющихся атомов и определяется соотношением $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, откуда, разделив переменные, получим $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$. Интегрируя полученное выражение, получаем $\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t$, откуда постоянная распада $\lambda = -\frac{\ln(N/N_0)}{t}$ — (1). По условию задачи $N = (1-x)N_0$ — (2), где N_0 — число атомов по истечении времени t, $x = 0{,}182$ — доля атомов, распавшихся за время t. Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $\lambda = -\frac{\lambda \ln(1-x)}{t} = 2{,}33 \cdot 10^{-6}\ \text{с}^{-1}$.

21.7. Найти удельную активность a_m: а) урана $^{235}_{92}\text{U}$; б) радона $^{222}_{86}\text{Rn}$.

Решение:

Удельной активностью радиоактивного вещества называется активность его единицы массы $a_m = \frac{a}{m}$ — (1). Поскольку активность радиоактивного вещества (см. задачу 21.3) равна $a = \frac{mN_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (2), то, подставляя (2) в (1), получаем $a_m = \frac{N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$. а) Для урана $^{235}_{92}U$ $\mu = 235$ г/моль и $T_{1/2} = 7{,}1 \cdot 10^8$ лет, следовательно, $a_m = 7{,}93 \cdot 1^7$ Бк/кг. б) Для радона $^{222}_{86}Rn$ $\mu = 222$ г/моль и $T_{1/2} = 3{,}82$ сут, следовательно, $a_m = 5{,}69 \cdot 10^{18}$ Бк/кг.

21.8. Ионизационные счетчики Гейгера — Мюллера имеют и в отсутствие радиоактивного препарата определенный фон. Присутствие фона может быть вызвано космическим излучением или радиоактивными загрязнениями. Какой массе радона m соответствует фон, дающий 1 отброс счетчика за время $t = 5$ с?

Решение:
Число атомов радиоактивного вещества, распадающихся за время Δt, определяется формулой $|\Delta N| = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \Delta t$ (см. задачу 21.1). Исходное число атомов $N = \frac{m}{\mu} N_A$. По условию $\Delta N = 1$, $\Delta t = t = 5$ с. Тогда $1 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{\mu} N_A t$, откуда $m = \frac{\mu T1/2}{N_A t \ln 2}$. Подставляя числовые данные, получим $m = 3{,}5 \cdot 10^{-20}$ кг.

21.9. При помощи ионизационного счетчика исследуется активность некоторого радиоактивного изотопа. В начальный момент времени счетчик дает 75 отбросов за время $t = 10$ с. Какое число отбросов за время $t = 10$ с дает счетчик по истечении времени $t = T_{1/2}/2$? Считать $T_{1/2} >> 10$ с.

Решение:

В начальный момент времени активность радиоактивного изотопа равна $a_1 = \frac{N_0}{t}$ — (1), а спустя время $t_1 = \frac{T_{1/2}}{2}$ — (2) она станет равной $a_2 = \frac{N}{t}$ — (3), где N_0 и N — соответственно число атомов радиоактивного изотопа в начальный момент времени и через время t_1, которые связаны между собой соотношением $N = N_0 exp(-\lambda t_1)$. Отсюда $\frac{N}{N_0} = exp(-\lambda t_1)$ или, с учетом (2), $\frac{N}{N_0} = exp\left(-\frac{\lambda T_{1/2}}{2}\right)$ — (4). Период полураспада и постоянная распада связаны соотношением $T_{1/2} = \frac{ln 2}{\lambda}$, откуда $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получаем $\frac{N}{N_0} = exp\left(-\frac{ln 2}{2}\right)$ — (6). Разделив (3) на (1), получаем $\frac{a_2}{a_1} = \frac{N}{N_0}$ — (7). Сопоставляя формулы (6) и (7), находим, что $\frac{a_2}{a_1} = exp\left(-\frac{ln 2}{2}\right)$, откуда окончательно $a_2 = a_1 exp\left(\frac{ln 2}{2}\right) = 53$ отброса.

21.10. Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}\ c^{-1}$. Через какое время t распадется 75% первоначальной массы m атомов?

Решение:

Число атомов радиоактивного изотопа в начальный момент времени связано с их числом по истечении времени t соотношением $N = N_0 exp(-\lambda t)$ — (1), где

$N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (2) и $N_0 = \frac{m_0}{\mu} N_A$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $m = m_0 exp(-\lambda t)$ — (4). По условию $m = (1 - 0{,}75) m_0 = 0{,}25 m_0$ — (5). Подставляя (5) в (4), получаем $exp(-\lambda t) = 0{,}25 = \frac{1}{4}$ или $exp(\lambda t) = 4$ — (6). Логарифмируя уравнение (6), получим $\lambda t = ln 4$, откуда $t = \frac{ln 4}{\lambda} = 3{,}47 \cdot 10^6$ с $= 40{,}11$ суток.

21.11. Природный уран представляет собой смесь трех изотопов: ${}^{234}_{92}U$, ${}^{235}_{92}U$, ${}^{238}_{92}U$. Содержание ${}^{234}_{92}U$ ничтожно (0,006%), на долю ${}^{235}_{92}U$ приходится 0,71%, а остальную массу (99,28%) составляет ${}^{238}_{92}U$. Периоды полураспада $T_{1\ 2}$ этих изотопов соответственно равны $2{,}5 \cdot 10^5$ лет, $7{,}1 \cdot 10^8$лет и $4{,}5 \cdot 10^9$лет. Найти процентную долю радиоактивности, вносимую каждым изотопом в общую радиоактивность природного урана.

Решение:

Процентная доля радиоактивности, вносимая каждым из изотопов в общую радиоактивность природного урана, определяется отношением числа распадов в единицу времени каждого изотопа к общему числу распадов в единицу времени природного урана. Обозначим через m массу природного урана. Тогда массы изотопов будут равны соответственно $m_1 = 6 \cdot 10^{-5} m$, $m_2 = 7{,}1 \cdot 10^{-3} m$ и $m_3 = 99{,}28 \cdot 10^{-2} m$. Число распадов в единицу времени, даваемое изотопом, будет равно $\Delta N_1 = \frac{ln 2}{T_1} N_1 \Delta t = \frac{ln 2 N_A m_1 \Delta t}{T_1 A_1}$, $\Delta N_2 = \frac{ln 2 N_A m_2 \Delta t}{T_2 A_2}$, $\Delta N_3 = \frac{ln 2 N_A m_3 \Delta t}{T_3 A_3}$, где N_A — постоянная Авогадро, T_i — период полураспада,

изотопа (индекс 1/2 у T опущен), A_i — его молярная масса. Откуда искомое отношение для каждого изотопа равно
$$x_i = \frac{\Delta N_i}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3} = \frac{m_i/(A_i T_i)}{m_1/(A_1 T_1) + m_2/(A_2 T_2) + m_3/(A_3 T_3)}.$$
Подставляя числовые данные, нетрудно убедиться, что вся радиоактивность природного урана обусловлена изотопом $^{238}_{92}U$, радиоактивность же изотопов $^{235}_{92}U$ и $^{234}_{92}U$ исчезающе мала.

21.12. Кинетическая энергия α-частицы, вылетающей из ядра атома радия при радиоактивном распаде, $W_1 = 4{,}78$ МэВ. Найти скорость v α-частицы и полную энергию W, выделяющуюся при вылете α-частицы.

Решение:

Кинетическая энергия α-частицы $W_1 = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2W_1}{m}} = 1{,}52 \cdot 10^7$ м/с. Полная энергия W, выделяющаяся при вылете α-частицы, складывается из кинетической энергии α-частицы W_1 и кинетической энергии остаточного ядра W_2, т. е. $W = W_1 + W_2$ — (1). Кроме того, согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 = m_2 v_2$ — (2). Из (2) получим $(m_1 v_1)^2 = \frac{m_1 v_1^2 2m_1}{2} = W_1 2m_1$; $(m_1 v_1)^2 = (m_2 v_2)^2 = \frac{m_2 v_2^2 2m_2}{2} = 2m_2 W_2$. Из (1) имеем $W = W_1 + \frac{2m_1 W_1}{2m_2} = W_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = W_1 \frac{m_2 + m_1}{m_2}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 4{,}87 \cdot 10^6$ эВ.

21.13. Какое количество теплоты Q выделяется при распаде радона активностью $a = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк: а) за время $t = 1$ ч; б) за среднее время жизни τ? Кинетическая энергия вылетающей из радона α-частицы $W = 5{,}5$ МэВ.

Решение:

По закону сохранения энергии количество тепла, которое выделяется при распаде радона, равно $Q = NW$ — (1), где N — число распадов за время t, W — кинетическая энергия α-частицы. Поскольку $N = at$ — (2), где a — активность радона, то, подставляя (2) в (1), получаем $Q = atW$ — (3). а) Если $t = 1$ ч, то из формулы (3) $Q = 117{,}22$ Дж. б) По определению среднее время жизни радона $\tau = \frac{1}{\lambda}$ — (4). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.9) равна $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (5), то, подставляя (5) в (4), получаем $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$ — (6). Учитывая, что $t = \tau$, подставляя (6) в (3), окончательно получаем $Q = \frac{aWT_{1/2}}{\ln 2} = 15{,}5$ кДж.

21.14. Масса $m = 1$ г урана $^{238}_{92}U$ в равновесии с продуктами его распада выделяет мощность $P = 1{,}07 \cdot 10^{-7}$ Вт. Найти молярную теплоту Q_μ, выделяемую ураном за среднее время жизни τ атомов урана.

Решение:

Мощность, выделяемая при распаде урана $^{238}_{92}U$, равна $P = \frac{Q}{t}$ — (1), где Q — количество тепла, которое выделится при распаде $^{238}_{92}U$ за время t. По условию

$t = \tau = \frac{1}{\lambda}$ — (2), где τ — среднее время жизни атомов урана ${}^{238}_{92}U$, λ — постоянная распада, которая связана с периодом полураспада урана ${}^{238}_{92}U$ следующим соотношением: $T_{1/2} = \frac{ln2}{\lambda}$, откуда $\lambda = \frac{ln2}{T_{1/2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $t = \frac{T_{1/2}}{ln2}$ — (4), затем, подставляя (4) в (1), получим $P = \frac{Q\,ln2}{T_{1/2}}$, откуда $Q = \frac{PT_{1/2}}{ln2}$ — (5). Число молей урана ${}^{238}_{92}U$, участвующее в распаде $\nu = \frac{m}{\mu}$ — (6), где $\mu = 238$ г/моль — молярная масса урана ${}^{238}_{92}U$. Молярная теплота, выделяемая ураном ${}^{238}_{92}U$ за среднее время жизни его атомов, равна $Q_\mu = \frac{Q}{\nu}$ — (7). Подставляя (5) и (6) в (7), окончательно получаем $Q_\mu = \frac{PT_{1/2}\mu}{m\,ln2} = 5{,}21 \cdot 10^{12}$ Дж/моль.

21.15. Найти активность a радона, образовавшегося из массы $m = 1$ г радия за время $t = 1$ ч.

Решение:

Поскольку по условию задачи из радиоактивного изотопа ${}^{226}_{88}Ra$ образуется новый радиоактивный изотоп ${}^{222}_{86}Rn$, то по истечении времени t число ядер изотопа ${}^{222}_{86}Rn$ будет определяться по формуле $N_2 = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times$ $\times (exp(-\lambda_1 t) - exp(-\lambda_2 t))$ — (1), где $N_{01} = \frac{m_1}{\mu_1} N_A$ — (2) —

начальное число ядер изотопа ${}^{226}_{88}Ra$, λ_1 и λ_2 — соответственно постоянные распада ${}^{226}_{88}Ra$ и ${}^{222}_{86}Rn$. Постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (3).

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N_2 = \frac{m_1}{\mu_1} N_A \times$ $\times \frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)} - T_{1/2(2)}} \left[exp\left(-\frac{t\, ln 2}{T_{1/2(1)}} \right) - exp\left(-\frac{t\, ln 2}{T_{1/2(2)}} \right) \right]$ — (4). Активность образовавшегося радона равна $a_2 = -\lambda_2 N_2$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), окончательно получаем

$$N_2 = \frac{m_1 N_A\, ln 2}{\mu_1 \left(T_{1/2(1)} - T_{1/2(2)} \right)} \left[exp\left(-\frac{t\, ln 2}{T_{1/2(1)}} \right) - exp\left(-\frac{t\, ln 2}{T_{1/2(2)}} \right) \right];$$

$N_2 = 2{,}85 \cdot 10^8$ Бк.

21.16. В результате распада массы $m_0 = 1$ г радия за время $t = 1$ год образовалась некоторая масса гелия, занимающая при нормальных условиях объем $V = 43$ мм^3. Найти из этих данных постоянную Авогадро N_A.

Решение:

Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории $p = nkT$, откуда $n = \frac{p}{kT}$ — (1), где n — число образовавшихся атомов гелия в единице объема, $p = 101$ кПа и $T = 273$ К — соответственно давление и абсолютная температура при нормальных условиях, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. С другой стороны, $n = \frac{N_0 - N}{V}$ — (2), где $N = N_0 exp(-\lambda t)$ — (3).

Постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \dfrac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $N = N_0 \, exp\left(-\dfrac{t \, ln 2}{T_{1/2}}\right)$ — (5), затем, подставляя (5) в (2), получаем $n = \dfrac{N_0[1 - exp(-t \, ln 2 / T_{1/2})]}{V}$ — (6). Приравнивая правые части соотношений (1) и (6), получаем $\dfrac{P}{kT} = \dfrac{N_0[1 - exp(-t \, ln 2 / T_{1/2})]}{V}$ — (7). Начальное число атомов радия равно $N_0 = \dfrac{m_0}{\mu} N_A$ — (8). Подставляя (8) в (7), получаем $\dfrac{P}{kT} = \dfrac{m_0 N_A [1 - exp(-t \, ln 2 / T_{1/2})]}{\mu V}$, откуда окончательно постоянная Авогадро равна $N_A = \dfrac{pV\mu}{kTm_0[1 - exp(-t \, ln 2 / T_{1/2})]} = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

21.17. В ампулу помещен препарат, содержащий массу $m_0 = 1{,}5$ г радия. Какая масса m радона накопится в этой ампуле по истечении времени $t = T_{1/2}/2$, где $T_{1/2}$ — период полураспада радона?

Решение:

Поскольку период полураспада изотопа $^{222}_{86}Rn$ значительно меньше периода полураспада изотопа $^{226}_{88}Ra$, то число атомов радона, которое накопится в ампуле по истечении времени t, равно $N_2 = N_{01} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - exp(-\lambda_2 t))$ — (1).

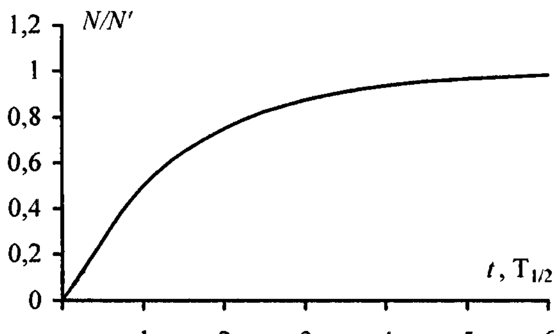
Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \dfrac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (2) и по условию $t = \dfrac{T_{1/2(2)}}{2}$ — (3), то, подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N_2 = N_{01}\frac{T_{1\ 2(2)}}{T_{1\ 2(1)}}\times$ $\times\left[1-exp\left(-\frac{ln2}{2}\right)\right]$ — (4). Поскольку $N_2 = \frac{m}{\mu_2}N_A$ — (5) и $N_{01} = \frac{m_0}{\mu_1}N_A$ — (6), то, подставляя (5) и (6) в (4), окончательно получаем $m = \frac{m_0\mu_2 T_{1\ 2(2)}}{\mu_1 T_{1\ 2(1)}}\left[1-exp\left(-\frac{ln2}{2}\right)\right] = 3\cdot10^{-9}$ кг.

21.18. Некоторое число атомов радия помещено в замкнутый сосуд. Через какое время t число атомов радона N в этом сосуде будет отличаться на 10% от того числа атомов радона N', которое соответствует радиоактивному равновесию радия с радоном в этом сосуде? Построить кривую зависимости изменения $\frac{N}{N'}$ в сосуде от времени t в интервале $0 \le t \le 6T_{1\ 2}$, принимая за единицу времени период полураспада радона $T_{1\ 2}$.

Решение:

Число атомов радона, которое накопится в замкнутом сосуде за время t (см. задачу 21.17), равно $N = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\times$ $\times\left(1-exp\left(-\lambda_2 t\right)\right)$ — (1). При радиоактивном равновесии $\frac{N_{01}}{N'} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, откуда $N' = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — (2). Разделив (1) на (2), получаем $\frac{N}{N'} = \left(1-exp\left(-\lambda_2 t\right)\right)$ — (3). По условию $\frac{N-N'}{N} = 0{,}1$ или $\frac{N}{N'} = 0{,}9$ — (4). Приравнивая правые части соотношений (3) и (4), получаем $1-exp\left(-\lambda_2 t\right) = 0{,}9$ или $exp\left(-\lambda_2 t\right) = 0{,}1$ — (5). Логарифмируя соотношение (5), получаем $-\lambda_2 t = ln\,0{,}1$ или $t = -\frac{ln\,0{,}1}{\lambda_2}$ — (6). Поскольку постоянная распада равна $\lambda = \frac{ln\,2}{T_{1\ 2}}$ — (7), то, подставляя (7) в (6), получаем $t = -\frac{T_{1\ 2(2)}\,ln\,0{,}1}{ln\,2} = 12{,}69$ суток. Подставляя (7) в (3), получаем $\frac{N}{N'} = \left[1 - exp\left(-\frac{t\,ln\,2}{T_{1\ 2(2)}}\right)\right]$. Подставляя в полученную формулу числовые данные, составим таблицу и построим график:

t	0	$T_{1/2}$	$2T_{1/2}$	$3T_{1/2}$	$4T_{1/2}$	$5T_{1/2}$	$6T_{1/2}$
N/N'	0	0,5	0,75	0,875	0,9375	0,96875	0,9844



21.19. Некоторое число атомов радона N' помещено в замкнутый сосуд. Построить кривую зависимости изменения числа атомов радона $\frac{N}{N'}$ в сосуде от времени в интервале $0 \le t \le 20$ сут через каждые 2 сут. Постоянная распада радона $\lambda = 0{,}181$ сут$^{-1}$. Из кривой $\frac{N}{N'} = f(t)$ найти период полураспада $T_{1\ 2}$ радона.

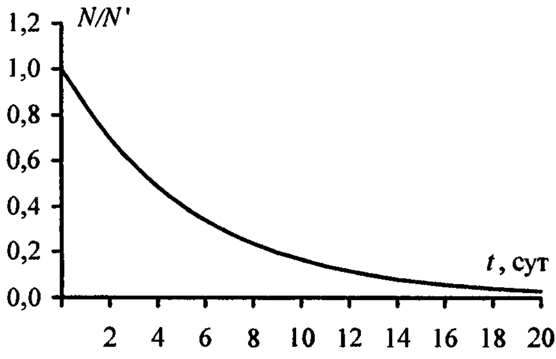
Решение:

Имеем $N = N'e^{-\lambda t}$, отсюда $\frac{N}{N'} = e^{-\lambda t} = exp(-0{,}181t)$. Для заданного интервала значений t составим таблицу и построим график. Период полураспада найдем как абсциссу точки кривой, ордината которой равна 0,5. По графику найдем $T_{1/2} = 3{,}8$ сут.

t, сут	0	2	4	6	8	10
N/N'	1	0,696	0,485	0,338	0,235	0,164

Продолжение

t, сут	12	14	16	18	20
N/N'	0,114	0,079	0,055	0,038	0,027



21.20. В нижеследующей таблице приведены результаты измерения зависимости активности a некоторого радиоактивного элемента от времени t. Найти период полураспада $T_{1/2}$ элемента.

t, ч	0	3	6	9	12	15
a, $3.7\cdot10^7$Бк	21,6	12,6	7,6	4,2	2,4	1,8

Решение:

Как видно из таблицы, измерение активности радиоактивного изотопа производилось через равные промежутки времени $\tau = 3$ часа. По определению активность $a = \left|-\lambda N\right|$ — (1), где N — число распавшихся ядер к моменту времени t. По закону радиоактивного распада $N = N_0\, exp(-\lambda t)$ — (2), где N_0 — начальное число ядер. Начальная активность из формулы (1) равна $a_0 = \lambda N_0$ — (3), а к моменту времени t она станет равной $a(t) = \lambda N(t)$ — (4). Подставляя (2) в (4), получаем $a(t) = \lambda N_0\, exp(-\lambda t)$ — (5). Сопоставляя формулы (3) и (5), нетрудно заметить, что закон изменения активности имеет вид: $a(t) = a_0\, exp(-\lambda t)$ — (6). Подставим в формулу (6) любое значение активности из таблицы, например для $t = 4\tau$, тогда $a_4 = a_0\, exp(-4\tau\lambda)$, откуда $exp(4\tau\lambda) = \frac{a_0}{a_4}$ — (7). Логарифмируя выражение (7), получаем $4\tau\lambda = ln\frac{a_0}{a_4}$, откуда постоянная распада $\lambda = \frac{ln(a_0 / a_4)}{4\tau}$ — (8). По определению период полураспада $T_{1/2} = \frac{ln 2}{\lambda}$ — (9). Подставляя (7) в (8), окончательно получаем $T_{1/2} = \frac{4\tau\, ln 2}{ln(a_0 / a_4)} = 3{,}79$ часа.

21.21. В ампулу помещен радон, активность которого $a_0 = 14{,}8 \cdot 10^9$ Бк. Через какое время t после наполнения ампулы активность радона будет равна $a = 2{,}22 \cdot 10^9$ Бк?

Решение:

В начальный момент времени активность радона в ампуле равна $a_0 = -\lambda N_0$ — (1), а спустя время t она станет равной

$a = -\lambda N$ — (2). Разделив (2) на (1), получаем $\frac{a}{a_0} = \frac{N}{N_0}$ — (3). Поскольку $N = N_0 \exp(-\lambda t)$, то отсюда $\frac{N}{N_0} = \exp(-\lambda t)$ — (4). Сопоставляя формулы (3) и (4), находим, что $\frac{a}{a_0} = \exp(-\lambda t)$, откуда, логарифмируя, получаем $\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = -\lambda t$ — (5). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (6), то, подставляя (6) в (5), получаем $\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = -\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}$, откуда окончательно находим $t = -\frac{T_{1/2} \ln(a/a_0)}{\ln 2} = 10{,}45$ суток.

21.22. Свинец, содержащийся в урановой руде, является конечным продуктом распада уранового ряда, поэтому из отношения массы урана в руде к массе свинца в ней можно определить возраст руды. Найти возраст t урановой руды, если известно, что на массу $m_{ур} = 1$ кг урана $^{238}_{82}U$ в этой руде приходится масса $m_{св} = 320$ г свинца $^{206}_{82}Pb$.

Решение:

Имеем $N_{св} = N_{ур}\left[1 - \exp\left(-\frac{0{,}693t}{T_{1/2}}\right)\right]$;

$\frac{m_{св}}{A_{св}} = \frac{m_{ур}}{A_{ур}}\left[1 - \exp\left(-\frac{0{,}693t}{T_{1/2}}\right)\right]$, где $T_{1/2}$ — период полураспада урана, $A_{св}$ и $A_{ур}$ — молярные массы свинца и урана. Отсюда $t = 3 \cdot 10^9$ лет.

21.23. Зная периоды полураспада $T_{1/2}$ радия и урана, найти число атомов урана, приходящееся на один атом радия в природной урановой руде. Указание: учесть, что радиоактивность природного урана обусловлена в основном изотопом $^{238}_{92}U$.

Решение:

В природной урановой руде атомы урана и радия находятся в радиоактивном равновесии, поэтому $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ — (1). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (2), то, подставляя (2) в (1), получаем $\frac{N_1}{N_2} = \frac{T_{1/2(1)}}{T_{1/2(2)}}$, откуда $N_2 = \frac{N_1 T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}}$, где $T_{1/2(1)}$ и $T_{1/2(2)}$ — соответственно периоды полураспада радия и урана. Учитывая, что радиоактивность природного урана обусловлена в основном изотопом $^{238}_{92}U$, то принимаем $T_{1/2(2)} = 4{,}5 \cdot 10^9$ лет. Поскольку $N_1 = 1$, то $N_2 = \frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}} = 2{,}83 \cdot 10^6$ лет.

21.24. Из какой наименьшей массы m руды, содержащей 42% чистого урана, можно получить массу $m_0 = 1$ г радия?

Решение:

В природной урановой руде (см. задачу 21.23) соотношение атомов радия и урана $\frac{N_1}{N_2} = \frac{T_{1/2(1)}}{T_{1/2(2)}}$ — (1). Количество атомов радия и урана соответственно равно $N_1 = \frac{m_0}{\mu_1} N_A$ — (2) и $N_2 = \frac{0{,}42m}{\mu_2} N_A$ — (3), поскольку по условию руда содержит 42% чистого урана. Разделив (2) на (3), получаем $\frac{N_1}{N_2}=\frac{m_0\mu_2}{0{,}42m\mu_1}$ — (4). Приравнивая правые части соотношений (4) и (1), получаем $\frac{m_0\mu_2}{0{,}42m\mu_1}=\frac{T_{1\ 2(2)}}{T_{1\ 2(1)}}=7{,}09\cdot10^3$ кг.

21.25. α-частицы из изотопа радия вылетают со скоростью $v=1{,}5\cdot10^7$ м/с и ударяются о флуоресцирующий экран. Считая, что экран потребляет на единицу силы света мощность $P_I=0{,}25$ Вт/кд, найти силу света I экрана, если на него падают все α-частицы, испускаемые массой $m=1$ мкг радия.

Решение:

Из теории относительности известно, что кинетическая энергия α-частицы зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ — (1), где $\beta=\frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость α-частицы. Подставляя (2) в (1), получаем $W_к=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)$ — (3). Полная энергия всех α-частиц, испускаемых радием, равна $W=aW_к$ — (4), где $a=|-\lambda N|$ — (5) — активность радия, $N=\frac{m}{\mu}N_A$ — (6) — число атомов радия, $\lambda=\frac{ln2}{T_{1\ 2}}$ — (7) — постоянная распада радия. Подставляя (6) и (7) в (5), получаем $a=\frac{mN_A\,ln2}{\mu T_{1\ 2}}$ — (8). Подставляя (3) и (8) в (4), получаем $W=\frac{m_0c^2mN_A\,ln2}{\mu T_{1\ 2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)$ — (9). Мощность, потребляемая экраном на единицу силы света, равна $P_I = \frac{P}{I}$, откуда сила света $I = \frac{P}{P_I}$ — (10). По определению мощность $P = \frac{W}{t}$ — (11), причем в нашем случае $t = 1$ с. Подставляя (11) в (10), получаем $I = \frac{W}{P_I t}$ — (12). Подставляя (9) в (12), окончательно получаем $I = \frac{m_0 c^2 m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2} P_I t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)$. Подставляя числовые данные, получим $I = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ Кд.

21.26. Какая доля первоначальной массы радиоактивного изотопа распадается за время жизни этого изотопа?

Решение:

Число атомов радиоактивного изотопа, которое распадается за время t, равно $N = N_0(1 - exp(-\lambda t))$, где N_0 — начальное число атомов, λ — постоянная распада. Отсюда доля первоначальной массы радиоактивного изотопа, которая распадается за время t, равна $\frac{N}{N_0} = 1 - exp(-\lambda t)$ — (1). Среднее время жизни радиоактивного атома $\tau = \frac{1}{\lambda}$, по условию $t = \tau$ — (3). Подставляя (2), с учетом (3), в (1), получаем $\frac{N}{N_0} = 1 - e^{-1} = 0{,}632$ или $\frac{N}{N_0} = 63{,}2\%$.

21.27. Найти активность a массы $m = 1$ мкг полония ${}^{210}_{84}Po$.

Решение:

Активность радиоактивного изотопа равна $a = |-\lambda N|$ — (1). Постоянная распада (см. задачу 21.14) равна

$\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (2). Число атомов полония $^{210}_{84}Po$ равно $N = \dfrac{m}{\mu} N_A$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $a = \dfrac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}} = 1{,}67 \cdot 10^8$ Бк.

21.28. Найти удельную активность a_m искусственно полученного радиоактивного изотопа стронция $^{90}_{38}Sr$.

Решение:

Удельная активность радиоактивного изотопа $a_m = \dfrac{a}{m}$ — (1), где a — активность радиоактивного изотопа, которая (см. задачу 21.27) равна $a = \dfrac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $a_m = \dfrac{N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ Бк/кг.

21.29. К массе $m_1 = 10$ мг радиоактивного изотопа $^{45}_{20}Ca$ добавлена масса $m_2 = 30$ мг нерадиоактивного изотопа $^{40}_{20}Ca$. На сколько уменьшилась удельная активность a_m радиоактивного источника?

Решение:

Первоначальная удельная активность изотопа $^{45}_{20}Ca$ равна $a_{m1} = \dfrac{\Delta N}{m_1 \Delta t} = \dfrac{\lambda N}{m_1} = \dfrac{\ln 2 N_A m_1}{T_{1/2} A_1 m_1} = \dfrac{\ln 2 N_A}{T_{1/2} A_1}$ — (1). После добавления изотопа $^{40}_{20}Ca$ удельная активность стала равна $a_{m2} = \dfrac{\Delta N}{(m_1 + m_2)\Delta t} = \dfrac{\ln 2 N_A m_1}{T_{1/2} A_1 (m_1 + m_2)}$ — (2), где A_1 — молярная масса радиоактивного изотопа. Вычитая (2) из (1), получим $\Delta a_m = \frac{\ln 2 N_A}{T_{1/2} A_1}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{\ln 2 N_A m_2}{T_{1/2} A_1 (m_1 + m_2)}$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta a_m = 4{,}9 \cdot 10^{17}$ Бк/кг.

21.30. Какую массу m_2 радиоактивного изотопа $^{210}_{83}Bi$ надо добавить к массе $m_1 = 5$ мг нерадиоактивного изотопа $^{209}_{83}Bi$, чтобы через время $t = 10$ сут после этого отношение числа распавшихся атомов к числу нераспавшихся было равно 50%? Постоянная распада изотопа $^{210}_{83}Bi$ равна $\lambda = 0{,}14$ сут$^{-1}$.

Решение:

Поскольку распадается только радиоактивный изотоп $^{210}_{83}Bi$, то число распавшихся атомов будет равно $N_р = \frac{m_2}{\mu_2} N_A (1 - exp(-\lambda t))$ — (1), а число нераспавшихся будет складываться из атомов нерадиоактивного изотопа $^{209}_{83}Bi$ и нераспавшихся атомов изотопа $^{210}_{83}Bi$ и будет равно $N_н = \frac{m_1}{\mu_1} N_A + \frac{m_2}{\mu_2} N_A\, exp(-\lambda t)$ — (2). Разделив (1) на (2), получаем $\frac{N_р}{N_н} = \frac{m_2 \mu_1 (1 - exp(-\lambda t))}{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1\, exp(-\lambda t)}$, откуда масса радиоактивного изотопа $^{210}_{83}Bi$ равна

$$m_2 = \frac{m_1 \mu_2 N_р}{N_н \mu_1 (1 - exp(-\lambda t)(1 + N_р / N_н))}.$$

Подставляя числовые данные, получим $m_2 = 4$ мг.

21.31. Какой изотоп образуется из $^{232}_{90}Th$ после четырех α-распадов и двух β-распадов?

Решение:

При α-распаде массовое число радиоактивного изотопа уменьшается на 4, а заряд на 2 единицы. В общем виде уравнение α-распада можно записать как ${}_Z^A K_1 \to {}_{Z-2}^{A-4} K_2 + {}_2^4 \alpha$ — (1). При β-распаде испускается электрон, поэтому заряд ядра возрастает на единицу, а массовое число не изменяется. Таким образом, уравнение β-распада имеет следующий вид: ${}_Z^A K_1 \to {}_{Z+1}^{A} K_2 + {}_{-1}^{0} e$ — (2). Для N распадов уравнения (1) и (2) перепишутся следующим образом: ${}_Z^A K_1 \to {}_{Z-2N}^{A-4N} K_2 + N{}_2^4\alpha$ — (3) и ${}_Z^A K_1 \to {}_{Z+N}^{A} K_2 + N{}_{-1}^{0}e$ — (4). Для $N_\alpha = 4$ из уравнения (3) для радиоактивного изотопа ${}_{90}^{232}Th$ имеем ${}_{90}^{232}Th \to {}_{82}^{216} K_2 + 4{}_2^4\alpha$. Для $N_\beta = 2$ из уравнения (4) для радиоактивного изотопа ${}_{82}^{216}K_1$ имеем ${}_{82}^{216}K_1 \to {}_{84}^{216} K_2 + 2{}_{-1}^{0}e$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп ${}_{84}^{216}Po$.

21.32. Какой изотоп образуется из ${}_{92}^{238}\mathrm{U}$ после трех α-распадов и двух β-распадов?

Решение:

Для N α-распадов и β-распадов (см. задачу 21.31) уравнения соответственно имеют вид ${}_Z^A K_1 \to {}_{Z-2N}^{A-4N} K_2 + N{}_2^4\alpha$ — (1) и ${}_Z^A K_1 \to {}_{Z+N}^{A} K_2 + N{}_{-1}^{0}e$ — (2). Для $N_\alpha = 3$ из уравнения (1) для радиоактивного изотопа ${}_{92}^{238}\mathrm{U}$ имеем ${}_{92}^{238}U \to {}_{86}^{226} K_2 + 3{}_2^4\alpha$. Для $N_\beta = 2$ из уравнения (2) для радиоактивного изотопа ${}_{86}^{226}K_1$ имеем ${}_{86}^{226}K_1 \to {}_{88}^{226} K_2 + 2{}_{-1}^{0}e$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп ${}_{88}^{226}\mathrm{Ra}$.

21.33. Какой изотоп образуется из $^{239}_{92}\mathrm{U}$ после двух β-распадов и одного α-распада?

Решение:
Для N β-распадов и одного α-распада (см. задачу 21.31) уравнения соответственно имеют вид $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A}_{Z+N}K_2 + N^{0}_{-1}e$ — (1) и $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A-4}_{Z-2}K_2 + ^{4}_{2}\alpha$ — (2). Для $N_\beta = 2$ из уравнения (1) для радиоактивного изотопа $^{239}_{92}\mathrm{U}$ имеем $^{239}_{92}U \to ^{239}_{94}K_2 + 2^{0}_{-1}e$. Из уравнения (2) для радиоактивного изотопа $^{239}_{94}K_1$ имеем $^{239}_{94}K_1 \to ^{235}_{92}K_2 + ^{4}_{2}\alpha$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп $^{235}_{92}\mathrm{U}$.

21.34. Какой изотоп образуется из $^{8}_{3}\mathrm{Li}$ после одного β-распада и одного α-распада?

Решение:
Для одного β-распада и одного α-распада (см. задачу 21.31) уравнения соответственно имеют вид $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A}_{Z+1}K_2 + ^{0}_{-1}e$ — (1) и $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A-4}_{Z-2}K_2 + ^{4}_{2}\alpha$ — (2). Из уравнения (1) для радиоактивного изотопа $^{8}_{3}\mathrm{Li}$ имеем $^{8}_{3}Li \to ^{8}_{4}K_2 + ^{0}_{-1}e$. Из уравнения (2) для радиоактивного изотопа $^{8}_{4}K_1$ имеем $^{8}_{4}K_1 \to ^{4}_{2}K_2 + ^{4}_{2}\alpha$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп $^{235}_{92}\mathrm{U}$.

21.35. Какой изотоп образуется из $^{133}_{51}\mathrm{Sb}$ после четырех β-распадов?

Решение:
Для N β-распадов (см. задачу 21.31) уравнение имеет вид $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A}_{Z+N}K_2 + N^{0}_{-1}e$. Для $N_\beta = 4$ для радиоактивного

изотопа ${}^{133}_{51}\mathrm{Sb}$ имеем ${}^{133}_{51}\mathrm{Sb} \to {}^{133}_{55}K_2 + 4{}^{0}_{-1}e$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$.

21.36. Кинетическая энергия α-частицы, вылетающей из ядра атома полония ${}^{214}_{84}\mathrm{Po}$ при радиоактивном распаде, $W_к = 7{,}68$ МэВ. Найти: а) скорость v α-частицы; б) полную энергию W, выделяющуюся при вылете α-частицы; в) число пар ионов N, образуемых α-частицей, принимая, что на образование одной пары ионов в воздухе требуется энергия $W_0 = 34$ эВ; г) ток насыщения $I_н$ в ионизационной камере от всех α-частиц, испускаемых полонием. Активность полония $a = 3{,}7 \cdot 10^4$ Бк.

Решение:

Из теории относительности известно, что кинетическая энергия α-частицы зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость α-частицы. а) Из формулы (1) относительная скорость равна $\beta = \frac{\sqrt{W_к (W_к + 2m_0c^2)}}{W_к + m_0c^2}$ — (3). Приравнивая правые части соотношений (2) и (3), находим скорость α-частицы: $v = \frac{c\sqrt{W_к (W_к + 2m_0c^2)}}{W_к + m_0c^2}$ м/с. б) Полная энергия W, выделяющаяся при вылете α-частицы, равна сумме кинетической энергии $W_{к1}$ α-частицы и кинетической энергии $W_{к2}$ остаточного ядра: $W = W_{к1} + W_{к2}$ — (4). Кроме того, имеет место закон сохранения импульса. Поскольку до распада импульс системы был равен нулю, то после распада

$m_1 v_1 = m_2 v_2$ — (5). Из (5) нетрудно получить $(m_1 v_1)^2 = \frac{m_1 v_1^2 2m_1}{2} = W_{к1} 2m_1 = (m_2 v_2)^2 = \frac{m_2 v_2^2 2m_2}{2} = W_{к2} 2m_2$.

Тогда из (4) имеем $W = W_{к1} + \frac{2m_1 W_{к1}}{2m_2} = W_{к1}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) =$ $= W_{к1}\frac{m_1 + m_2}{m_2}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 7{,}83$ МэВ. в) Число пар ионов, образуемых α-частицей, равно $N = \frac{W_{к1}}{W_0} = 2{,}26 \cdot 10^5$. г) Ток насыщения в ионизационной камере от всех α-частиц, испускаемых полонием, равен $I_н = aN|e|$, где N — число пар ионов, образуемых полонием, a — активность полония, e — элементарный заряд. Подставляя числовые данные, находим $I_н = 1{,}34 \cdot 10^{-9}$ А.

§ 22. Ядерные реакции

В этом разделе используются данные таблиц 3 и 21 из приложения. В задачах 22.22, 22.31 дан авторский вариант решения.

22.1. Найти число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов магния: а) ${}^{24}_{12}Mg$; б) ${}^{25}_{12}Mg$; в) ${}^{26}_{12}Mg$.

Решение:
Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом: ${}^{A}_{Z}X$, где X — символ химического элемента; Z — зарядовое число (атомный номер, число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов в ядре). Число нейтронов в ядре $N = A - Z$. С учетом сказанного найдем: а) ядро ${}^{24}_{12}Mg$ содержит 12 протонов и 12 нейтронов; ядро ${}^{25}_{12}Mg$ содержит 12 протонов и 13 нейтронов; ядро ${}^{26}_{12}Mg$ содержит 12 протонов и 14 нейтронов.

22.2. Найти энергию связи W ядра изотопа лития ${}^{7}_{3}Li$.

Решение:
Энергия связи ядра любого изотопа определяется соотношением $W = c^2\Delta m$, где Δm —разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра. Очевидно, $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я$, где m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона, $m_я$ — масса ядра изотопа. Т. к. $m_я = m_A - Zm_e$, где m_e — масса электрона, m_A — масса изотопа, то $\Delta m = Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_A$. С помощью таблицы 21 найдем $\Delta m = (3 \cdot 1{,}00783 + 4 \cdot 1{,}00867 - 7{,}01600) = 0{,}04217$ а.е.м. Массе 1 а.е.м. соответствует энергия 931МэВ (см. задачу 17.20), энергия связи ядра ${}^{7}_{3}Li$ будет

равна $W = 0{,}04217 \cdot 931 = 39{,}3$ МэВ. Эту энергию надо затратить, чтобы расщепить ядро ${}^{7}_{3}Li$ на нуклоны.

22.3. Найти энергию связи W ядра атома гелия ${}^{4}_{2}He$.

Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа определяется соотношением $W = c^2 \Delta m$ — (1), где $\Delta m = Zm_p + (A - Z) \times$ $\times m_n - m_я$ — (2) — разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра, Z — порядковый номер изотопа, A — массовое число, m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона, $m_я$ — масса ядра изотопа. Поскольку $m_я = m_a - Zm_e$ — (3), где m_a — масса изотопа и m_e — масса электрона, то, подставляя (3) в (2), получаем $\Delta m = Zm_{{}^{1}_{1}H} + (A - Z)m_n - m_a$ — (4). Подставляя (4) в (1), окончательно получаем $W = c^2\left[Zm_{{}^{1}_{1}H} + (A - Z)m_n - m_a\right]$.

Для гелия ${}^{4}_{2}He$: $A = 4$, $Z = 2$, $m_a = 4{,}0026$ а.е.м. Кроме того, $m_{{}^{1}_{1}H} = 1{,}0078$ а.е.м. и $m_n = 1{,}0087$ а.е.м. Подставляя числовые значения, получаем $W = 28{,}6$ МэВ.

22.4. Найти энергию связи W ядра атома алюминия ${}^{27}_{13}Al$.

Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}^{1}_{1}H} + (A - Z)m_n - m_a\right]$. Для алюминия ${}^{27}_{13}Al$: $A = 27$, $Z = 13$ и $m_a = 26{,}9815$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 227$ МэВ.

22.5. Найти энергию связи W ядер: а) ${}_{1}^{3}H$; б) ${}_{2}^{3}He$. Какое из этих ядер более устойчиво?

Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}_{1}^{1}H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$. а) Для ядра ${}_{1}^{3}H$: $A = 3$, $Z = 1$ и $m_a = 3{,}0161$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 8{,}52$ МэВ. б) Для ядра ${}_{2}^{3}He$: $A = 3$, $Z = 2$ и $m_a = 3{,}0160$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 7{,}81$ МэВ. Поскольку энергия связи ядра ${}_{1}^{3}H$ больше, чем ядра ${}_{2}^{3}He$, следовательно, ядро ${}_{1}^{3}H$ более устойчивое.

22.6. Найти энергию связи W_0, приходящуюся на один нуклон в ядре атома кислорода ${}_{8}^{16}O$.

Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}_{1}^{1}H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$ — (1). Энергия связи, приходящаяся на один нуклон в ядре, равна $W_0 = \frac{W}{A}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $W_0 = \frac{c^2}{A}\left[Zm_{{}_{1}^{1}H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$. Для кислорода ${}_{8}^{16}O$: $A = 16$, $Z = 8$ и $m_a = 15{,}9994$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W_0 = 7{,}78$ МэВ.

22.7. Найти энергию связи W ядра дейтерия ${}_{1}^{2}H$.

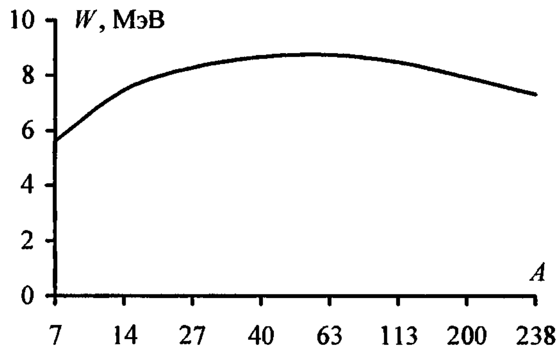
Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}_{1}^{1}H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$. Для дейтерия ${}_{1}^{2}H$: $A = 2$,

$Z = 1$ и $m_a = 2{,}0141$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 2{,}25$ МэВ.

22.8. Найти энергию связи W_0, приходящуюся на один нуклон в ядрах: а) ${}^{7}_{3}Li$; б) ${}^{14}_{7}N$; в) ${}^{27}_{13}Al$; г) ${}^{40}_{20}Ca$; д) ${}^{63}_{29}Cu$; е) ${}^{113}_{48}Cd$; ж) ${}^{200}_{80}Hg$; з) ${}^{238}_{92}U$. Построить зависимость $W_0 = f(A)$, где A — массовое число.

Решение:



Между энергией и массой любого вещества существует связь, которая дается уравнением Эйнштейна $W = mc^2$, где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Под энергией связи понимают энергию, которая высвобождается в процессе образования из нуклонов атомного ядра, т. е. $W_{св} = \Delta mc^2$, где $\Delta m = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - m_Ш\right]$ — дефект массы этого ядра, Z — атомарный номер, A — массовое число. Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, $W_0 = \dfrac{W_{св}}{A} = \dfrac{\left(Zm_p + (A - Z)m_n - m_я\right)c^2}{A}$.

а) $W_0 = \dfrac{(3\cdot 1{,}67 + 4\cdot 1{,}68 - 7\cdot 1{,}66)\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{7} =$

$= 0{,}089\cdot 10^{-11}$ Дж $= 5{,}62$ МэВ.

б) $W_0 = \dfrac{(7\cdot 1{,}67 + 7\cdot 1{,}68 - 14\cdot 1{,}66)\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{14} =$

$= 0{,}12\cdot 10^{-11}$ Дж $= 7{,}53$ МэВ.

в) $W_0 = \dfrac{(13\cdot 1{,}67 + 14\cdot 1{,}68 - 27\cdot 1{,}66)\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{27} =$

$= 0{,}134\cdot 10^{-11}$ Дж $= 8{,}35$ МэВ.

г) $W_0 = \dfrac{(20\cdot 1{,}67 + 20\cdot 1{,}68 - 40\cdot 1{,}66)\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{40} =$

$= 0{,}137\cdot 10^{-11}$ Дж $= 8{,}55$ МэВ.

д) $W_0 = \dfrac{(29\cdot 1{,}67 + 34\cdot 1{,}68 - 63\cdot 1{,}66)\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{63} =$

$= 0{,}141\cdot 10^{-11}$ Дж $= 8{,}75$ МэВ.

е) $W_0 = \dfrac{(48\cdot 1{,}67 + 65\cdot 1{,}68 - 113\cdot 1{,}66)\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{113} =$

$= 0{,}135\cdot 10^{-11}$ Дж $= 8{,}48$ МэВ.

ж) $W_0 = \dfrac{(80\cdot 1{,}67 + 120\cdot 1{,}68 - 200\cdot 1{,}66)\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{200} =$

$= 0{,}127\cdot 10^{-11}$ Дж $= 7{,}93$ МэВ.

з) $W_0 = \dfrac{(92\cdot 1{,}67 + 146\cdot 1{,}68 - 238\cdot 1{,}66)\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{238} =$

$= 0{,}0122\cdot 10^{-11}$ Дж $= 7{,}62$ МэВ.

22.9. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}_3^7Li + {}_1^1H \rightarrow {}_2^4He + {}_2^2He$.

Решение:

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ — (1). Сумма масс исходных частиц $\sum m_1 = (7{,}01600 + 1{,}00783) = 8{,}02383$ а.е.м. Сумма масс образовавшихся частиц $\sum m_2 = (4{,}00260 + 4{,}00260) = 8{,}00520$ а.е.м. Таким образом, дефект масс $\Delta m = 0{,}01863$ а.е.м. Тогда из (1) найдем $Q = 17{,}3 \cdot 10^6$ эВ.

22.10. Найти энергию Q, поглощенную при реакции ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \to {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$.

Решение:

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$, где $\sum m_1$ — сумма масс частиц до реакции, $\sum m_2$ — сумма масс частиц после реакции. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{14}_{7}N} + m_{{}^{4}_{2}He} = 18{,}0057$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{1}_{1}H} + m_{{}^{17}_{8}O} = 18{,}0069$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 1{,}13$ МэВ.

22.11. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакциях а) ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \to {}^{1}_{1}H + {}^{3}_{1}H$; б) ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \to {}^{1}_{1}H + {}^{1}_{0}n$.

Решение:

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). а) $\sum m_1 = m_{{}^{1}_{1}H} + m_{{}^{2}_{1}H} = 4{,}0566$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{1}_{1}H} + m_{{}^{3}_{1}H} = 4{,}0239$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим

$Q = 3{,}11$ МэВ. б) $\sum m_1 = m_{{}^1_1H} + m_{{}^2_1H} = 4{,}0566$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^3_2He} + m_{{}^1_0n} = 4{,}0247$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 3{,}01$ МэВ.

22.12. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакциях: а) ${}^2_1H + {}^3_2He \to {}^1_1H + {}^4_2He$; б) ${}^6_3Li + {}^2_1H \to {}^4_2He + {}^4_2He$;

в) ${}^6_3Li + {}^1_1H \to {}^3_2He + {}^4_2He$.

Решение:

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). а) $\sum m_1 = m_{{}^2_1H} + m_{{}^3_2He} = 5{,}0301$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^1_1H} + m_{{}^4_2He} = 5{,}0104$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 18{,}5$ МэВ.
б) $\sum m_1 = m_{{}^6_3Li} + m_{{}^2_1H} = 8{,}0292$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^4_2He} + m_{{}^4_2He} = 8{,}0052$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 22{,}5$ МэВ. в) $\sum m_1 = m_{{}^6_3Li} + m_{{}^1_1H} = 7{,}0229$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^3_2He} + m_{{}^4_2He} = 7{,}0186$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 4{,}04$ МэВ.

22.13. Какую массу M воды можно нагреть от $0°$ C до кипения, если использовать все тепло, выделяющееся при реакции ${}^7_3Li(p,\alpha)$, при полном разложении массы $m = 1$ г лития?

Решение:

Напишем уравнение реакции ${}_3^7Li + {}_1^1p \to {}_2^4\alpha + {}_2^4\alpha$. Количество тепла, выделяемое при распаде одного ядра, $Q_1 = c^2\left(\sum m_1 + \sum m_2\right)$. Полная энергия, выделенная при распаде, $Q = NQ_1$ — где $N = \frac{m}{\mu}N_A$ — число ядер ${}_7^3Li$; $N_А = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. Количество тепла, необходимое для нагревания воды, $Q = c_в M(t_2 - t_1)$. По условию все тепло, выделенное при реакции, идет на нагревание воды, поэтому $\frac{m}{\mu}N_А c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right) = c_в M(t_2 - t_1)$. Отсюда $M = \frac{mN_А c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)}{\mu c_в (t_2 - t_1)}$. Подставляя числовые данные, получим $M = 563$ т.

22.14. Написать недостающие обозначения в реакциях: а) ${}_{13}^{27}Al(n,\alpha)x$; б) ${}_9^{19}F(p,x){}_8^{16}O$; в) ${}_{25}^{55}Mn(x,n){}_{26}^{55}Fe$; г) ${}_{13}^{27}Al(\alpha,p)x$; д) ${}_7^{14}N(n,x){}_6^{14}C$; е) $x(p,\alpha){}_{11}^{22}Na$.

Решение:

а) Запишем уравнение реакции ${}_{13}^{27}Al + {}_0^1n \to {}_{11}^{24}x + {}_2^4\alpha$. Зная заряд ядра, по таблице Менделеева найдем, что x — Na — натрий, отсюда окончательно ${}_{13}^{27}Al(n,\alpha){}_{11}^{24}Na$.

б) Запишем уравнение реакции ${}_9^{19}F + {}_1^1p \to {}_8^{16}O + {}_2^4x$. Следовательно, x — ${}_2^4\alpha$, отсюда окончательно ${}_9^{19}F(p,\alpha){}_8^{16}O$.

в) Запишем уравнение реакции ${}_{25}^{55}Mn + {}_1^1x \to {}_{26}^{55}Fe + {}_0^1n$. Следовательно, x — ${}_1^1p$, отсюда окончательно ${}_{25}^{55}Mn(p,n){}_{26}^{55}Fe$.

г) Запишем уравнение реакции ${}^{27}_{13}Al+{}^{4}_{2}\alpha \to {}^{30}_{14}x+{}^{1}_{1}p$. Зная заряд ядра, по таблице Менделеева найдем, что x — Si — кремний, отсюда окончательно ${}^{27}_{13}Al(\alpha,p){}^{30}_{14}Si$.

д) Запишем уравнение реакции ${}^{14}_{7}N+{}^{1}_{0}n \to {}^{14}_{6}C+{}^{1}_{1}x$. Следовательно, x — ${}^{1}_{1}p$, отсюда окончательно ${}^{14}_{7}N(n,p){}^{14}_{6}C$.

е) Запишем уравнение реакции ${}^{25}_{12}x+{}^{1}_{1}p \to {}^{22}_{11}Na+{}^{4}_{2}\alpha$. Зная заряд ядра, по таблице Менделеева найдем, что x — Mg — марганец, отсюда окончательно ${}^{27}_{13}Mg(p,\alpha){}^{22}_{11}Na$.

22.15. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{7}_{3}Li+{}^{2}_{1}H \to {}^{8}_{4}Be+{}^{1}_{0}n$.

Решение:

Изменение энергии при ядерной реакции $Q=c^2\times$ $\times\left(\sum m_1-\sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). В нашем случае $\sum m_1=m_{{}^{7}_{3}Li}+m_{{}^{2}_{1}H}=9{,}0301$ а.е.м., а $\sum m_2=m_{{}^{8}_{4}Be}+m_{{}^{1}_{0}n}=$ $=9{,}0140$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1>\sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q=15{,}12$ МэВ.

22.16. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{9}_{4}Be+{}^{2}_{1}H \to {}^{10}_{5}Be+{}^{1}_{0}n$.

Решение:

Изменение энергии при ядерной реакции $Q=c^2\times$ $\times\left(\sum m_1-\sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). В нашем случае $\sum m_1=m_{{}^{9}_{4}Be}+m_{{}^{2}_{1}H}=11{,}0263$ а.е.м., а $\sum m_2=m_{{}^{10}_{5}Be}+m_{{}^{1}_{0}n}=$

$= 11{,}0216$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 4{,}42$ МэВ.

22.17. При бомбардировке изотопа азота ${}^{14}_{7}N$ нейтронами получается изотоп углерода ${}^{14}_{6}C$, который оказывается β-активным. Написать уравнения обеих реакций.

Решение:

По условию уравнение первой реакции имеет вид ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \to {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}x$. Следовательно, x — есть ${}^{1}_{1}p$ и первое уравнение окончательно запишется в виде ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \to {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}p$ или ${}^{14}_{7}N(n,p){}^{14}_{6}C$. По условию изотоп ${}^{14}_{6}C$ оказывается β-радиоактивным, т. е. испускает электроны, поэтому ${}^{14}_{6}C \to {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}x$. По заряду ядра из таблицы Менделеева найдем, что x — N — азот, отсюда уравнение второй реакции имеет вид ${}^{14}_{6}C \to {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}N$.

22.18. При бомбардировке изотопа алюминия ${}^{27}_{13}Al$ α-частицами получается радиоактивный изотоп фосфора ${}^{30}_{15}P$, который затем распадается с выделением позитрона. Написать уравнения обеих реакций. Найти удельную активность a_m изотопа ${}^{30}_{15}P$, если его период полураспада $T_{1\,2} = 130$ с.

Решение:

По условию уравнение первой реакции имеет вид ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{30}_{15}p + {}^{1}_{0}x$. Следовательно, x — есть ${}^{1}_{0}n$ и первое уравнение окончательно запишется в виде ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{30}_{15}p + {}^{1}_{0}n$ или ${}^{27}_{13}Al(\alpha,n){}^{30}_{15}p$. По условию изотоп ${}^{30}_{15}p$ оказывается радиоактивным и распадается с излучением позитрона, поэтому ${}^{30}_{15}p \to {}^{0}_{+1}e + {}^{30}_{16}x$. По заряду ядра из таблицы Менделеева найдем, что x — S — сера, отсюда уравнение второй реакции имеет вид ${}^{30}_{15}p \to {}^{0}_{+1}e + {}^{30}_{16}S$. Период полураспада определяется как $T_{1\ 2} = \frac{ln 2}{\lambda}$, отсюда $\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1\ 2}}$ — постоянная распада. Активностью вещества называется физическая величина $A = \lambda N$, где $N = \frac{m}{\mu}N_A$ — число делящихся ядер. Тогда $A = \frac{0{,}693 m N_A}{T_{1\ 2}\mu}$. Удельная активность $a_m = \frac{A}{m} = \frac{0{,}689 N_A}{T_{1\ 2}\mu} =$ $= 1{,}07 \cdot 10^{23}$ Бк/кг.

22.19. При бомбардировке изотопа ${}^{23}_{11}Na$ дейтонами образуется β-радиоактивный изотоп ${}^{24}_{11}Na$. Счетчик β-частиц установлен вблизи препарата, содержащего радиоактивный ${}^{24}_{11}Na$. При первом измерении счетчик дал 170 отбросов за 1мин, а через сутки — 56 отбросов за 1 мин. Написать уравнения обеих реакций. Найти период полураспада $T_{1\ 2}$ изотопа ${}^{24}_{11}Na$.

Решение:

По условию уравнение первой реакции имеет вид ${}^{23}_{11}Na + {}^{2}_{1}d \to {}^{24}_{11}Na + {}^{1}_{1}x$. Следовательно, x — есть ${}^{1}_{1}p$ и первое уравнение окончательно запишется в виде ${}^{23}_{11}Na + {}^{2}_{1}d \to {}^{24}_{11}Na + {}^{1}_{1}p$ или ${}^{23}_{11}Nf(d, p){}^{24}_{11}Na$. По условию изотоп ${}^{24}_{11}Na$ оказывается β-радиоактивным, т. е. испускает электроны, поэтому ${}^{24}_{11}Na \to {}^{0}_{-1}e + {}^{24}_{10}x$. По заряду ядра из таблицы Менделеева найдем, что x — Ne —

неон, отсюда уравнение второй реакции имеет вид ${}^{24}_{11}Na \to {}^{0}_{-1}e + {}^{24}_{10}Ne$. По закону радиоактивного распада $N = \dfrac{N_0}{2t/T_{1\ 2}}$, отсюда $2\dfrac{t}{T_{1\ 2}} = \dfrac{N_0}{N}$; $\dfrac{t}{T_{1\ 2}} = log_2\left(\dfrac{N_0}{N}\right) = \dfrac{ln(N_0/N)}{ln2} = \dfrac{ln(N_0/N)}{0{,}693}$. Тогда период полураспада $T_{1\ 2} = \dfrac{t\,ln2}{ln(N_0/N)} = 14{,}97$ ч.

22.20. Какая энергия Q_1 выделится, если при реакции ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \to {}^{30}_{14}Si + {}^{1}_{1}H$ подвергаются превращению все ядра, находящиеся в массе $m = 1$ г алюминия? Какую энергию Q_2 надо затратить, чтобы осуществить это превращение, если известно, что при бомбардировке ядра алюминия α-частицами с энергией $W = 8$ МэВ только одна α-частица из $n = 2\cdot10^6$ частиц вызывает превращение?

Решение:

Энергия, выделяемая при превращении одного ядра алюминия, $Q_0 = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. Число ядер алюминия, участвующих в реакции, $N = \dfrac{m}{\mu}N_A$. Тогда полная энергия, выделяемая при превращении всех ядер, $Q_1 = Q_0 N = \dfrac{m}{\mu}N_A c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. Подставляя числовые данные и учитывая, что энергетический эквивалент атомной единицы массы $(1\,а.е.м.)c^2 = 931{,}5$ МэВ, получим: $Q_1 = 5{,}3\cdot10^{22}$ МэВ. Т. к. превращение может осуществлять только одна из n частиц, то энергия, необходимая для осуществления превращения всех ядер, $Q_2 = WNn = \dfrac{WmN_A n}{\mu} = 3{,}57\cdot10^{29}$ МэВ. Таким образом,

$\frac{Q_2}{Q_1} = 5{,}71 \cdot 10^6$, т. е. чтобы осуществить это превращение, надо затратить энергии приблизительно в 6 млн раз больше, чем выделится при этой реакции.

22.21. При бомбардировке изотопа лития ${}_3^6Li$ дейтонами (ядрами дейтерия ${}_1^2H$) образуются две α-частицы. При этом выделяется энергия $Q = 22{,}3$ МэВ. Зная массы дейтона d и α-частицы, найти массу m изотопа лития ${}_3^6Li$.

Решение:

Запишем уравнение реакции ${}_3^6Li + {}_1^2d \to {}_2^4\alpha + {}_2^4\alpha$. Количество выделенной энергии $Q = c^2\left[\left(m_{Li} + m_d\right) - 2m_\alpha\right]$; $m_{Li} = \frac{Q}{c^2} - m_d + 2m_\alpha = 6{,}015$ а.е.м.

22.22. Источником энергии солнечного излучения является энергия образования гелия из водорода по следующей циклической реакции: ${}_6^{12}C + {}_1^1H \to {}_7^{13}N \to {}_6^{13}C + {}_{+1}^0e$, ${}_6^{13}C + {}_1^1H \to {}_7^{14}N$, ${}_7^{14}N + {}_1^1H \to {}_8^{15}O \to {}_7^{15}N + {}_{+1}^0e$, ${}_7^{15}N + {}_1^1H \to {}_6^{12}C + {}_2^4He$. Какая масса m_t водорода в единицу времени должна превращаться в гелий? Солнечная постоянная $K = 1{,}37$ кВт/м^2. Принимая, что масса водорода составляет 35% массы Солнца, подсчитать, на какое время t хватит запаса водорода, если излучение Солнца считать постоянным.

Решение:

В результате проведенного цикла четыре ядра водорода превращаются в одно ядро гелия. Углерод, ведущий себя как химический катализатор, может использоваться снова.

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. Для цикла реакций $\sum m_1 = 4m_{{}^1_1H} = 4{,}0312$ а.е.м., а $\sum m_2 = 4m_{{}^4_2He} = 4{,}0026$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 268{,}66$ МэВ $= 4{,}29 \cdot 10^{-12}$ Дж. С другой стороны, энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени, $W_t = 4\pi \langle R \rangle^2 K$ — (1), где $\langle R \rangle = 1{,}495 \cdot 10^{11}$ м — среднее расстояние от Земли до Солнца, K — солнечная постоянная. Число атомов водорода, необходимое для излучения энергии W_t, равно $N = \frac{4W_t}{Q}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $N = 16\pi \langle R \rangle^2 K$ — (3), тогда необходимая масса водорода в единицу времени равна $M_{Ht} = m_{{}^1_1H} N = \frac{16\pi \langle R \rangle^2 K m_{{}^1_1H}}{Q} = 6{,}03 \cdot 10^{11}$ кг. По условию $M_H = 0{,}35 M_C$ — (4), где $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца. Тогда время, на которое хватит запаса водорода, равно $t = \frac{M_H}{M_{Ht}}$ — (5). Подставляя (4) в (5), окончательно получаем $t = \frac{0{,}35 M_C}{M_{Ht}} = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ лет.

22.23. Реакция разложения дейтона γ-лучами: ${}^2_1H + h\nu \rightarrow {}^1_1H + {}^1_0n$. Найти массу m нейтрона, если известно, что энергия γ-квантов $W_1 = 2{,}66$ МэВ, а энергия вылетающих протонов, измеренная по производимой ими ионизации, оказалась равной $W_2 = 0{,}22$ МэВ. Энергию нейтрона считать равной энергии протона. Массы дейтона и протона считать известными.

Решение:

Запишем уравнение реакции ${}_1^2d + h\nu \to {}_1^1p + {}_0^1n$. Количество тепла, выделенное при реакции, $Q = c^2 \times \times\left(m_d - \left(m_p + m_n\right)\right)$. По закону сохранения энергии $W_1 = 2W_2 - Q$. Подставим Q в закон сохранения энергии $W_1 = 2W_2 - c^2\left(m_d\left(m_p + m_n\right)\right)$, откуда $m_n = m_d - m_p - \frac{2W_2 - W_1}{c^2}$; $m_n = 1{,}0087$ а.е.м.

22.24. Написать недостающие обозначения в реакциях:
а) ${}_{13}^{27}Al(\gamma,x){}_{12}^{26}Mg$; б) ${}_{13}^{27}Al(\gamma,n)x$; в) ${}_{29}^{63}Cu(\gamma,x){}_{29}^{62}Cu$; г) $x(\gamma,n){}_{74}^{181}W$.

Решение:

а) Уравнение реакции будет иметь следующий вид ${}_{13}^{27}Al + h\nu \to {}_{12}^{26}Mg + {}_1^1x$, следовательно, ${}_1^1x$ — есть ${}_1^1p$, тогда ${}_{13}^{27}Al(\gamma,p){}_{12}^{26}Mg$. б) Уравнение реакции имеет вид ${}_{13}^{27}Al + h\nu \to {}_{13}^{26}x + {}_0^1n$. По заряду ядра с помощью таблицы Менделеева находим, что x — алюминий, тогда ${}_{13}^{27}Al(\gamma,n){}_{13}^{26}Al$. в) Т. к. порядковый номер элемента не изменился, то и не изменился заряд ядра, поэтому x — есть ${}_0^1n$, значит, ${}_{29}^{63}Cu(\gamma,n){}_{29}^{62}Cu$. г) При излучении нейтрона заряд ядра не меняется (см. б и в), поэтому ${}_{74}^{182}W(\gamma,n){}_{74}^{181}W$.

22.25. Выход реакции образования радиоактивных изотопов можно охарактеризовать либо числом k_1 — отношением числа происшедших актов ядерного превращения к числу бомбардирующих частиц, либо числом k_2 [Бк] — отношением активности полученного продукта к числу единиц, бомбардирующих мишень Как связаны между собой величины k_1 и k_2?

Решение:

Пусть N_1 — число происшедших актов ядерного превращения, N_2 — число бомбардирующих частиц. Тогда $k_1 = \frac{N_1}{N_2}$ — (1); $k_2 = \frac{a}{N_2} = \frac{\lambda N_1}{N_2} = \frac{\ln 2 N_1}{T_{1/2} N_2}$ — (2). Сравнивая выражения (1) и (2), получим $k_2 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} k_1$.

22.26. При бомбардировке ^7_3Li протонами образуется радиоактивный изотоп бериллия ^7_4Be с периодом полураспада $T_{1/2} = 4{,}67 \cdot 10^6$ с. Найти выход реакции k_1 (см. задачу 22.25), если известно, что бомбардирующие протоны общим зарядом $q = 1$ мкА·ч вызывают активность полученного препарата $a = 6{,}51 \cdot 10^6$ Бк.

Решение:

По определению $k_1 = \frac{N_1}{N_2}$ — (1), где N_1 — число происшедших актов ядерного превращения за некоторый промежуток времени, N_2 — число частиц, бомбардирующих мишень за этот промежуток времени, а $k_2 = \frac{a}{N_2}$ — (3), где a — активность полученного продукта. Суммарный заряд протонов, бомбардирующих мишень, равен $q = eN_2$, откуда $N_2 = \frac{q}{e}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и (2), соответственно получаем $k_1 = \frac{N_1 e}{q}$ — (4) и $k_2 = \frac{ae}{q}$ — (5). Величины k_1 и k_2 связаны между собой соотношением: $k_2 = \frac{ln 2}{T_{1\ 2}} k_1$, где $T_{1\ 2}$ — период полураспада полученного продукта, тогда $k_1 = \frac{T_{1\ 2}}{ln 2} k_2$ — (6). Подставляя (5) в (6), окончательно получаем $k_1 = \frac{aeT_{1\ 2}}{q\, ln 2} = 2 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{500}$, значит, только один протон из 500 вызывает реакцию.

22.27. В результате ядерной реакции $^{56}_{26}Fe(p,n)$ образуется радиоактивный изотоп кобальта $^{56}_{27}Co$ с периодом полураспада $T_{1\ 2} = 80$ сут. Найти выход реакции k_1 (см. задачу 22.25), если известно, что бомбардирующие протоны общим зарядом $q = 20$ мкА·ч вызывают активность полученного препарата $a = 5{,}2 \cdot 10^7$ Бк.

Решение:

Выход реакции (см. задачу 22.26) выражается соотношением $k_1 = \frac{aeT_{1\ 2}}{q\, ln 2} = 1{,}15 \cdot 10^{-3}$.

22.28. Источником нейтронов является трубка, содержащая порошок бериллия $^{9}_{4}Be$ и газообразный радон. При реакции α-частиц радона с бериллием возникают нейтроны. Написать реакцию получения нейтронов. Найти массу m радона, введенного в источник при его изготовлении, если известно, что этот источник дает через время $t = 5$ сут после его изготовления число нейтронов в единицу времени $a_2 = 1{,}2 \cdot 10^6$ с$^{-1}$. Выход реакции $k_1 = 1/4000$, т. е. только одна α-частица из $n = 4000$ вызывает реакцию.

Решение:

Сразу после изготовления источник дает в единицу времени число распадов $a_1 = \left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)_1 = \lambda N_1$. Через время t число распадов в единицу времени $a_2 = \left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)_2 = \lambda N_2$, где $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$. По условию только одна α-частица из $n = 4000$ вызывает реакцию, тогда число атомов радона, введенного в источник, $N' = nN_1 = \frac{nN_2}{e^{-\lambda t}} = nN_2 e^{\lambda t}$. Тогда масса радона $m = \frac{\mu N'}{N_A} = \frac{\mu}{N_A} nN_2 e^{\lambda t} = \frac{\mu n e^{\lambda t} a_2}{N_A \lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $m = 2{,}1 \cdot 10^{-9}$ кг.

22.29. Источником нейтронов является трубка, описанная в задаче 22.28. Какое число нейтронов a_2 в единицу времени создают α-частицы, излучаемые радоном с активностью $a_1 = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк, попадая на порошок бериллия? Выход реакции $k_1 = 1/4000$.

Решение:

По условию выход реакции $k_1 = \frac{1}{4000}$, значит, только одна α-частица из $n = 4000$ вызывает реакцию. Поскольку активность радона равна $a_1 = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк, то число нейтронов в единицу времени, создаваемое α-частицами, равно $a_2 = \frac{a_1}{n} = a_1 k_1 = 9{,}25 \cdot 10^6$ с$^{-1}$.

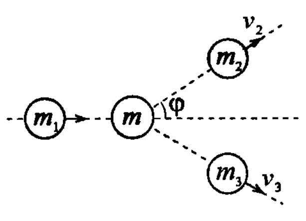
22.30. Реакция образования радиоактивного изотопа углерода $^{11}_{6}C$ имеет вид $^{10}_{5}B(d,n)$, где d-дейтон (ядро дейтерия $^{2}_{1}H$). Период полураспада изотопа $^{11}_{6}C$ $T_{1/2} = 20$ мин. Какая энергия Q выделится при этой реакции? Найти выход реакции k_2, если $k_1 = 10^{-8}$ (см. задачу 22.25).

Решение:

Запишем уравнение реакции $^{10}_{5}B + ^{2}_{1}H \rightarrow ^{11}_{6}C + ^{1}_{0}n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{^{10}_{5}B} + m_{^{2}_{1}H} = 12{,}0270$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{^{11}_{6}C} + m_{^{1}_{0}n} = 12{,}0087$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 7.12$ МэВ. Величины k_1 и k_2 связаны соотношением $k_2 = \frac{ln2}{T_{1/2}} k_1$, отсюда $k_2 = 5{,}78 \cdot 10^{-12}$ Бк.

22.31. В реакции $^{14}_{7}N(\alpha, p)$ кинетическая энергия α-частицы $W_1 = 7{,}7$ МэВ. Под каким углом φ к направлению движения α-частицы вылетает протон, если известно, что его кинетическая энергия $W_2 = 8{,}5$ МэВ?

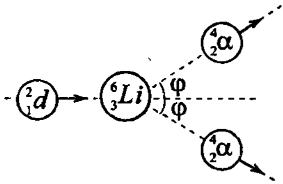
Решение:



Обозначим m_1, m_2 и m_3 — массы бомбардирующей α-частицы, протона и ядра отдачи (в нашем случае кислорода); W_1, W_2 и W_3 — их кинетические энергии. Если ядро азота (m) неподвижно, то закон сохранения энергии запишется так: $W_1+Q=W_2+W_3$ — (1), где Q — энергия реакции. Закон сохранения импульса в векторной форме имеет вид $\vec{p}_1=\vec{p}_2+\vec{p}_3$ — (2). Из (2) имеем для импульсов $p_3^2=p_1^2+p_2^2-2p_1p_2\cos\varphi$ — (3). Т. к. $p^2=(mv)^2=$ $=\frac{mv^2}{2}2m=2mW$ — (4), то уравнение (3) примет вид $2m_3W_3=2m_1W_1+2m_2W_2-2\cos\varphi\sqrt{2m_1W_12m_2W_2}$, или $W_3=\frac{m_1}{m_3}W_1+\frac{m_2}{m_3}W_2-\frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1m_2W_1W_2}$ — (5). Исключая из (1) и (5) энергию W_3, получим формулу, связывающую кинетическую энергию бомбардирующих α-частиц с кинетической энергией протонов: $W_1\left(\frac{m_3-m_1}{m_3}\right)+Q=W_2\times$ $\times\left(\frac{m_2+m_3}{m_3}\right)-\frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1m_2W_1W_2}$ —(6). Здесь $Q=-1{,}18$ МэВ. Решая (6) относительно $\cos\varphi$ и подставляя числовые данные, найдем $\cos\varphi=\frac{m_2+m_3}{2}\sqrt{\frac{W_2}{m_1m_2W_1}}-\frac{m_3-m_1}{2}\times$ $\times\sqrt{\frac{W_1}{m_1m_2W_2}}-\frac{m_3Q}{2\sqrt{m_1m_2W_1W_2}}=0{,}849$, или $\varphi=32°$.

22.32. При бомбардировке изотопа лития ${}_3^6Li$ дейтонами образуются две α-частицы, разлетающиеся симметрично под углом φ к направлению скорости бомбардирующих дейтонов. Какую кинетическую энергию W_2 имеют образующиеся α-частицы, если известно, что энергия бомбардирующих дейтонов $W_1=0{,}2$ МэВ? Найти угол φ.

Решение:



Запишем уравнение реакции $^6_3Li+^1_2d\to^4_2\alpha+^4_2\alpha$. Т. к. ядра лития покоились, то по закону сохранения энергии $W_1=2W_2-Q$, где $Q=c^2\left(m_{Li}+m_d-2m_\alpha\right)$. Тогда $2W_2=W_1+c^2\left(m_{Li}+m_d-2m_\alpha\right)$, отсюда $W_2=\dfrac{W_1+c^2\left(m_{Li}+m_d-2m_\alpha\right)}{2}=11{,}31$ МэВ. Из механики кинетическая энергия $W_к=\dfrac{mv^2}{2}=\dfrac{m^2v^2}{2m}=\dfrac{p^2}{2m}$, откуда $p^2=2mW_к$ или импульс $p=\sqrt{2mW_к}$. Импульсы дейтона и α-частиц будут соответственно равны $p_1=\sqrt{2m_dW_1}$ и $p_2=\sqrt{2m_\alpha W_2}$. По закону сохранения импульса $p_1=2\rho_2\cos\varphi$; $\cos\varphi=\dfrac{p_1}{2p_2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m_dW_1}{m_\alpha W_2}}=0{,}047$, отсюда $\varphi=\arccos(0{,}047)\approx 87{,}3°$.

22.33. Изотоп гелия ^3_2He получается бомбардировкой ядер трития ^3_1H протонами. Написать уравнение реакции. Какая энергия Q выделяется при этой реакции? Найти порог реакции, т. е. минимальную кинетическую энергию бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция. Указание: учесть, что при пороговом значении кинетической энергии бомбардирующей частицы относительная скорость частиц, возникающих в реакции, равна нулю.

Решение:

Запишем уравнение реакции $^3_1H+^1_1p\to^3_2He+^1_0n$. Энергия, выделяемая при реакции, $Q=c^2\left(\sum m_1-\sum m_2\right)$. Подставляя числовые данные и учитывая, что энергетический эквивалент атомной единицы массы $(1 а.е.м.)c^2 = 931{,}5$ МэВ, получим $Q = 931{,}5 \cdot ((3{,}01605 + 1{,}0078) - (3{,}01603 + 1{,}00867)) =$ $= -0{,}79$ МэВ. Т. к. $Q < 0$, то реакция эндотермическая, т. е. идет с поглощением энергии и обладает порогом. Если частицы покоятся друг относительно друга, то такая реакция не пойдет. Необходимо, чтобы энергия относительного движения частиц была не меньше $|Q|$, поэтому пороговая энергия определяется соотношением $W_{\text{пор}} = \dfrac{p_1^2}{2(m_1 + m_2)} + |Q|$, где p_1 — импульс центра инерции системы. С другой стороны, по определению $W_{\text{пор}}$ равна кинетической энергии протона: $W_{\text{пор}} = \dfrac{p_1^2}{2m_2}$, откуда $p_1^2 = 2m_2 W_{\text{пор}}$. Значит, $W_{\text{пор}} = \dfrac{2m_2 W_{\text{пор}}}{2(m_1 + m_2)} + |Q|$, откуда $W_{\text{пор}}\left(1 - \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = |Q|$ или $W_{\text{пор}} = \dfrac{|Q|(m_1 + m_2)}{m_1} = 1{,}04$ МэВ.

22.34. Найти порог W ядерной реакции ${}^{14}_{7}N(\alpha, p)$.

Решение:

Порог ядерной реакции, т. е. минимальная кинетическая энергия бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция (см. задачу 22.33), выражается соотношением $W = \dfrac{|Q|(m_1 + m_2)}{m_1}$. В нашем случае $m_1 = m_{{}^{14}_{7}N} =$ $= 14{,}0031$ а.е.м. — масса покоящегося ядра, $m_2 = m_{{}^{4}_{2}He} =$ $= 4{,}0026$ а.е.м. — масса бомбардирующей частицы. Запишем уравнение реакции: ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \to {}^{7}_{8}O + {}^{1}_{1}p$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{14}_{7}N} + m_{{}^{4}_{2}He} = 18{,}0057$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{17}_{8}O} + m_{{}^{1}_{1}p} = 18{,}0069$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = -1{,}13$ МэВ и $W = 1{,}45$ МэВ.

22.35. Найти порог W ядерной реакции ${}^{7}_{3}Li(p,n)$.

Решение:

Порог ядерной реакции, т. е. минимальная кинетическая энергия бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция (см. задачу 22.33), выражается соотношением $W = \dfrac{|Q|(m_1 + m_2)}{m_1}$. В нашем случае $m_1 = m_{{}^{7}_{3}Li} = 7{,}0160$ а.е.м. — масса покоящегося ядра, $m_2 = m_{{}^{1}_{1}p} = 1{,}0078$ а.е.м. — масса бомбардирующей частицы. Запишем уравнение реакции: ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}p \to {}^{7}_{4}Be + {}^{1}_{0}n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{7}_{3}Li} + m_{{}^{1}_{1}p} =$ $= 8{,}0238$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{7}_{4}Be} + m_{{}^{1}_{0}n} = 8{,}0256$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = -1{,}69$ МэВ и $W = 1{,}93$ МэВ.

22.36. Искусственный изотоп азота ${}^{13}_{7}N$ получается бомбардировкой ядер углерода ${}^{12}_{6}C$ дейтонами. Написать уравнение реакции. Найти количество теплоты Q, поглощенное при этой реакции, и порог W этой реакции. Какова суммарная кинетическая энергия W' продуктов этой реакции при пороговом значении кинетической энергии дейтонов? Ядра углерода считать неподвижными.

Решение:

Запишем уравнение реакции ${}^{12}_{6}C + {}^{2}_{1}d \rightarrow {}^{13}_{7}N + {}^{1}_{0}n$. Найдем количество тепла $Q = c^2\left[(m_C + m_d) - (m_N + m_n)\right]$;

$Q = 9\cdot 10^{16}\left[(12 + 2{,}0141) - (13{,}00574 + 1{,}0087)\right]\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}$;

$Q = -0{,}00507\cdot 10^{-11}$ Дж $= -0{,}00317\cdot 10^{-8}$ эВ $= -0{,}317$ МэВ.

Т. к. $Q < 0$, то реакция эндотермическая, т. е. она не пойдет, если частицы покоятся друг относительно друга. Необходимо, чтобы энергия относительного движения частиц была не меньше $|Q|$. Поэтому порог определяется соотношением $W = \dfrac{p_d^2}{2(m_d + m_C)} + |Q|$. С другой стороны, по определению этот порог равен кинетической энергии дейтона, т. е. $W = \dfrac{p_d^2}{2m_d}$; $\dfrac{p_d^2}{2(m_d + m_C)} + |Q| = \dfrac{p_d^2}{2m_d}$. Т. к. импульс $p_d^2 = 2m_d W$ (см. задачу 22.32), то

$$\frac{2m_d W}{2m_d} - \frac{2m_d W}{2(m_d + m_C)} = |Q|;$$

$$W - \frac{m_d W}{m_d + m_C} = W\left(1 - \frac{m_d}{m_d + m_C}\right) = |Q|;$$

$$W = \frac{|Q|}{1 - m_d/(m_d + m_C)} = \frac{|Q|(m_d + m_C)}{m_d + m_C - m_d} = |Q|\left(\frac{m_d}{m_C} + 1\right)$$ — пороговая энергия. $W = 0{,}317\left(\dfrac{2{,}0141}{12} + 1\right) = 0{,}37$ МэВ. Суммарная кинетическая энергия продуктов реакции $W' = W + Q = 0{,}37 - 0{,}317 = 0{,}053$ МэВ.

22.37. Реакция ${}^{10}_{5}B(n,\alpha)$ идет при бомбардировке бора нейтронами, скорость которых очень мала (тепловые нейтроны). Какая энергия Q выделяется при этой реакции? Пренебрегая скоростями нейтронов, найти скорость v и кинетическую энергию W α-частицы. Ядра бора считать неподвижными.

Решение:

Запишем уравнение реакции ${}^{10}_{5}B + {}^{1}_{0}n \to {}^{7}_{3}Li + {}^{4}_{2}\alpha$. Количество тепла, выделенного при реакции, $Q = c^2[(m_B + m_n) +$ $+(m_{Li} + m_\alpha)]$;

$Q = 9 \cdot 10^{16}[(10{,}01294 + 1{,}0087) - (7{,}016 + 4{,}0026)] \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} =$ $= 0{,}0454 \cdot 10^{-11}$ Дж $Q = 2{,}83$ МэВ. Т. к. по условию скоростью нейтронов можно пренебречь, то по закону сохранения импульса $m_{Li}v_{Li} = m_\alpha v_\alpha$, отсюда $v_{Li} = \dfrac{m_\alpha v_\alpha}{m_{Li}}$. По закону сохранения энергии $Q = W_{Li} + W_\alpha = \dfrac{m_{Li}v_{Li}^2}{2} + \dfrac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$;

$2Q = m_\alpha v_\alpha^2\left(\dfrac{m_\alpha}{m_{Li}} + 1\right)$, отсюда $v_\alpha = \sqrt{\dfrac{2Q}{m_\alpha(m_\alpha / m_{Li} + 1)}}$;

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}0454 \cdot 10^{-11}}{4{,}0026 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}(4{,}0026/7{,}016 + 1)}} = 9{,}33 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Кинетическая энергия α-частицы $W_\alpha = \dfrac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$;

$$W_\alpha = \frac{4{,}0026 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9{,}33^2 \cdot 10^{12}}{2} = 2{,}89 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} =$$
$= 1{,}806$ МэВ.

22.38. При бомбардировке изотопа лития ${}^{7}_{3}Li$ протонами образуются две α-частицы. Энергия каждой α-частицы в момент их образования $W_2 = 9{,}15$ МэВ. Какова энергия W_1 бомбардирующих протонов?

Решение:

Запишем уравнение реакции: ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}p \to {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{7}_{3}Li} + m_{{}^{1}_{1}p} = 8{,}0238$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{4}_{2}He} + m_{{}^{4}_{2}He} = 8{,}0052$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 17{,}37$ МэВ. По закону сохранения энергии $W_1 + Q = 2W_2$, откуда энергия бомбардирующих протонов $W_1 = 2W_2 - Q = 0{,}93$ МэВ.

22.39. Найти наименьшую энергию γ-кванта, достаточную для осуществления реакции разложения дейтона γ-лучами ${}^{2}_{1}H + h\nu \to {}^{1}_{1}H + {}^{1}_{0}n$.

Решение:

Количество тепла, поглощаемое при реакции $Q = c^2 \times$ $\times\left(m_{{}^{2}_{1}H} - \left(m_{{}^{1}_{1}H} + m_n\right)\right) = 9 \cdot 10^{16}\left[2{,}0141 - (1{,}00783 + 1{,}0086)\right] \times$ $\times 1{,}66 \cdot 10^{-27} = -0{,}035 \cdot 10^{-11}$ Дж $= -2{,}175$ МэВ. Для осуществления расщепления необходимо, чтобы γ-квант имел энергию $h\nu \geq |Q|$. В предельном случае при $h\nu = |Q|$ γ-квант расщепит ядро, но не сможет сообщить образовавшимся частицам кинетическую энергию. Значит, $h\nu_{min} = 2{,}175$ МэВ.

22.40. Найти наименьшую энергию γ-кванта, достаточную для осуществления реакции ${}^{24}_{12}Mg(\gamma, n)$.

Решение:

Запишем уравнение реакции: ${}^{24}_{12}Mg + h\nu \rightarrow {}^{23}_{12}Mg + {}^{1}_{0}n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{24}_{12}Mg} = = 23{,}9850$ а.е.м., т. к. масса покоя γ-кванта равна нулю, а $\sum m_2 = m_{{}^{23}_{12}Mg} + m_{{}^{1}_{0}n} = 24{,}0028$ а.е.м. Поскольку отношение $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = -16{,}72$ МэВ. Чтобы реакция могла произойти, энергия γ-кванта должна быть больше или равна порогу ядерной реакции, который выражается соотношением $W = \dfrac{|Q|(m_1 + m_2)}{m_1}$ (см. задачу 22.33). Однако в нашем случае масса покоя γ-кванта $m_2 = 0$, поэтому порог ядерной реакции $W = |Q|$, а следовательно, наименьшая энергия γ-кванта $h\nu = |Q| = 16{,}72$ МэВ.

22.41. Какую энергию W (в киловатт-часах) можно получить от деления массы $m = 1$ г урана ${}^{235}_{92}U$, если при каждом акте распада выделяется энергия $Q = 200$ МэВ?

Решение:

Число делящихся ядер урана ${}^{235}_{92}U$, содержащееся в определенной массе, равно $N = \dfrac{m}{\mu}N_A$ — (1), где $\mu = 0{,}235$ кг/моль — молярная масса ${}^{235}_{92}U$, $N_A = 6{,}02 \times \times 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро. Энергия, которую можно получить при образовании данной массы ${}^{235}_{92}U$, равна $W = QN$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W = \frac{m}{\mu} N_А Q = 2{,}28$ кВт·ч.

22.42. Какая масса урана ${}^{235}_{92}U$ расходуется за время $t = 1$ сут на атомной электростанции мощностью $P = 5000$ кВт? К.п.д. принять равным 17%. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия $Q = 200$ МэВ.

Решение:

Число распавшихся ядер урана $n = \frac{m}{\mu} N_А$. Полная энергия, выделяемая при распаде массы m урана, $Q_{полн} = Q_0 n = = Q_0 \frac{m}{\mu} N_А$. Тогда полезная энергия $Q_{полез} = \eta Q_{полн} = \eta Q_0 \times \times \frac{m}{\mu} N_А$. Мощность атомной электростанции $p = \frac{Q_{полез}}{t} = = \frac{\eta Q_0 m N_А}{\mu t}$. Отсюда масса распавшегося урана за время t $m = \frac{p \mu t}{\eta Q_0 N_А} = 31$ г.

22.43. При взрыве водородной бомбы протекает термоядерная реакция образования гелия из дейтерия и трития. Написать уравнение реакции. Найти энергию Q, выделяющуюся при этой реакции. Какую энергию W можно получить при образовании массы $m = 1$ г гелия?

Решение:

Запишем уравнение реакции: ${}^2_1H + {}^3_1H \rightarrow {}^4_2He + {}^1_0n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \left(\sum m_1 - \sum m_2 \right)$.

В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^2_1H} + m_{{}^3_1H} = 5.0301$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^4_2He} + m_{{}^1_0n} = 5{,}0113$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 17{,}66$ МэВ. Энергия, которую можно получить при образовании данной массы ${}^4_2He$ (см. задачу 22.41), равна $W = \frac{m}{M} N_{\text{A}} Q = 11{,}8 \cdot 10^4$ кВт·ч.

§ 23. Элементарные частицы. Ускорители частиц

В задачах данного раздела используются данные таблиц 3, 21, 22 приложения.

23.1. В ядерной физике принято число заряженных частиц, бомбардирующих мишень, характеризовать их общим зарядом, выраженным в микроампер-часах (мкА·ч). Какому числу заряженных частиц соответствует общий заряд $q = 1$ мкА·ч? Задачу решить для: а) электронов; б) α-частиц.

Решение:

а) Заряд электрона равен $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, значит, $N = \frac{q}{e} = 2{,}25 \cdot 10^{16}$ электронов. б) Заряд α-частицы равен $2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, значит, $N = \frac{q}{2e} = 1{,}125 \cdot 10^{16}$ α-частиц.

23.2. При упругом центральном столкновении нейтрона с неподвижным ядром замедляющего вещества кинетическая энергия нейтрона уменьшилась в 1,4 раза. Найти массу m ядер замедляющего вещества.

Решение:

По закону сохранения энергии $W_{к0} = W_{к1} + W_{к2}$ — (1), где $W_{к0}$ — начальная кинетическая энергия нейтрона, $W_{к1}$ — его кинетическая энергия после взаимодействия с ядром, $W_{к2}$ — кинетическая энергия ядра замедляющего вещества. По условию $\frac{W_{к0}}{W_{к1}} = k = 1{,}4$, отсюда $W_{к0} = kW_{к1}$ — (2) и после подстановки (2) в (1) получаем $(k-1)W_{к1} = W_{к2}$ — (3). По закону сохранения импульса $p_0 = p_2 - p_1$ — (4), где p_0 — начальный импульс нейтрона, p_1 — его импульс после взаимодействия с ядром, p_2 — импульс ядра замедляющего вещества. Кинетическая энергия и импульс связаны между собой соотношением $W_к = \frac{p^2}{2m}$ — (5). Подставляя (5) в (2), получаем $p_0^2 = kp_1^2$ или $p_0 = \sqrt{k}p_1$ — (6). Подставляя (6) в (4), получаем $\frac{(k-1)p_1^2}{m_n} = \frac{p_2^2}{m}$ — (8), где $m_n = 1{,}675^{-27}$ кг — масса нейтрона. Решая совместно уравнения (7) и (8), находим массу ядер замедляющего вещества $m = \frac{\left(\sqrt{k}+1\right)^2 m_n}{k-1} = 19{,}96 \cdot 10^{-27}$ кг $= 12{,}02$ а.е.м. По таблице Менделеева находим, что это углерод $^{12}_{6}C$, следовательно, замедлителем является графит.

23.3. Какую часть первоначальной скорости будет составлять скорость нейтрона после упругого центрального столкновения с неподвижным ядром изотопа $^{23}_{11}Na$?

Решение:

Масса ядер замедляющего вещества (см. задачу 23.2) равна $m = \frac{\left(\sqrt{k}+1\right)^2 m_n}{k-1}$ — (1), где $k = \frac{W_{к0}}{W_{к1}}$ — (2), $W_{к0}$ и $W_{к1}$ — соответственно начальная и кинетическая энергии бомбардирующего натрия, $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг — масса нейтрона. Поскольку кинетическая энергия равна $W_к = mv^2/2$ — (3), то, подставляя (3) в (2), получаем $k = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2$ или $\frac{v_0}{v} = \sqrt{k}$ — (4). Из формулы (1) находим $\sqrt{k} = \frac{m+m_n}{m-m_n}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получаем $\frac{v}{v_0} = \frac{m-m_n}{m+m_n} = 0{,}916 \cdot 100\% = 91{,}6\%$.

23.4. Для получения медленных нейтронов их пропускают через вещества, содержащие водород (например, парафин). Какую наибольшую часть своей кинетической энергии нейтрон массой m_0 может передать: а) протону (масса m_0); б) ядру атома свинца (масса $207m_0$)? Наибольшая часть передаваемой энергии соответствует упругому центральному столкновению.

Решение:

По закону сохранения энергии $W_{к0} = W_{к1} + W_{к2}$ — (1), где $W_{к0}$ и $W_{к1}$ — соответственно кинетическая энергия нейтрона до и после взаимодействия с ядром замедлителя, $W_{к2}$ — кинетическая энергия ядра замедляющегося вещества. Если $\dfrac{W_{к0}}{W_{к1}} = k$ — (2), то из (1) и (2) следует, что $\dfrac{W_{к2}}{W_{к0}} = 1 - \dfrac{1}{k}$ — (3). Поскольку (см. задачу 23.3) $\sqrt{k} = \dfrac{m+m_0}{m-m_0}$, то $k = \left(\dfrac{m+m_0}{m-m_0}\right)^2$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\dfrac{W_{к2}}{W_{к0}} = 1 - \left(\dfrac{m-m_0}{m+m_0}\right)^2$. а) Для протона $m \approx m_0$, поэтому $\dfrac{W_{к2}}{W_{к0}} \approx 1 \cdot 100\% = 100\%$. б) Для ядра атома свинца $m = 207m_0$, поэтому $\dfrac{W_{к2}}{W_{к0}} = 0{,}0191 \cdot 100\% = 19{,}1\%$.

23.5. Найти в предыдущей задаче распределение энергии между нейтроном и протоном, если столкновение неупругое. Нейтрон при каждом столкновении отклоняется в среднем на угол $\varphi = 45°$.

Решение:

Направление скорости $\vec{v}$ нейтрона и скорости частиц $\vec{v}_1$ показано на рисунке. Скорости частиц одинаковы и равны $v' = \frac{v\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, энергия распределится между нейтроном и протоном в среднем поровну.

23.6. Нейтрон, обладающий энергией $W_0 = 4{,}6$ МэВ, в результате столкновений с протонами замедляется. Сколько столкновений он должен испытать, чтобы его энергия уменьшилась до $W = 0{,}23$ эВ? Нейтрон отклоняется при каждом столкновении в среднем на угол $\varphi = 45°$.

Решение:

После каждого столкновения кинетическая энергия нейтрона становится в два раза меньше (см. задачу 23.5). Тогда после n столкновений энергия нейтрона $W = \left(\frac{1}{2}\right)^n W_0$.

Отсюда $n\lg 2 = \lg\left(\frac{W_0}{W}\right) = \lg\left(2\cdot 10^7\right)$; $n = \frac{\lg\left(2\cdot 10^7\right)}{\lg 2} = 24$.

23.7. Поток заряженных частиц влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 3$ Тл. Скорость частиц $v = 1{,}52\cdot 10^7$ м/с и направлена перпендикулярно к направлению поля. Найти заряд q каждой частицы, если известно, что на нее действует сила $F = 1{,}46\cdot 10^{-11}$ Н.

Решение:

В однородном магнитном поле на заряженные частицы действует сила Лоренца, которая равна $F_Л = qvB\sin\alpha$. По условию скорость частиц направлена перпендикулярно направлению поля, значит, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin\alpha = 1$, а следовательно, $F_Л = qvB$. Отсюда заряд каждой частицы $q = \frac{F_Л}{vB} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

23.8. Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл и движется по окружности с радиусом $R = 10$ см. Скорость частицы $v = 2{,}4 \cdot 10^6$ м/с. Найти для этой частицы отношение ее заряда к массе.

Решение:

В однородном магнитном поле на заряженную частицу действует сила Лоренца, которая (см. задачу 23.7) равна $F_Л = qvB$ — (1). Она является центростремительной силой и сообщает частице нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$ — (2). По второму закону Ньютона $F_Л = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $qvB = m\frac{v^2}{R}$, откуда отношение заряда частицы к ее массе равно $\frac{q}{m} = \frac{v}{BR} = 4{,}8 \cdot 10^7$ Кл/кг.

23.9. Электрон ускорен разностью потенциалов $U = 180$ кВ. Учитывая поправки теории относительности, найти для этого электрона массу m, скорость v, кинетическую энергию W и отношение его заряда к массе. Какова скорость v' этого электрона без учета релятивистской поправки?

Решение:

Электрон, ускоренный разностью потенциалов, обладает потенциальной энергией $W_п = eU$ — (1). По закону сохранения энергии $W_п = W_к$ — (2). Приравнивая правые части соотношений (1) и (2), получаем $eU = W_к$ — (3) или

$W_к = eU = 2{,}88 \cdot 10^{-14}$ Дж $= 1{,}8 \cdot 10^5$ эВ. Зависимость кинетической энергии электрона от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (3), где $m_0 = 9{,}11 \times \times 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $\beta = \frac{v}{c}$ — (4) — относительная скорость электрона, c — скорость света. Из формулы (3) имеем $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0c^2}{W_к + m_0c^2}$ — (5). Зависимость массы электрона от скорости его движения дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (6). Подставляя (5) в (6), получаем $m = \frac{W_к + m_0c^2}{c^2}$ — (7), а затем, подставляя (3) в (7), окончательно находим массу электрона $m = \frac{eU + m_0c^2}{c^2} = 1{,}23 \cdot 10^{-30}$ кг. Кинетическая энергия электрона $W_к = \frac{mv^2}{2}$, откуда релятивистская скорость электрона $v' = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 2{,}52 \cdot 10^8$ м/с. Отношение заряда электрона к его массе равно $\frac{e}{m} = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Реальное значение равно $\frac{e}{m} = 1{,}759 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. С учетом погрешностей величину, полученную в данной задаче, можно считать допустимой.

23.10. Мезон космических лучей имеет энергию $W = 3$ ГэВ. Энергия покоя мезона $W_0 = 100$ МэВ. Какое расстояние l в атмосфере сможет пройти мезон за время его жизни τ по лабораторным часам? Собственное время жизни мезона $\tau_0 = 2$ мкс.

Решение:

Имеем $\dfrac{W}{W_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 30$, отсюда найдем $v = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с. Время жизни мезона по лабораторным часам $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 30\tau_0$. Расстояние, пройденное мезоном за это время, равно $l = v\tau = v \cdot 30\tau_0 \approx 18 \cdot 10^3$ м.

23.11. Мезон космических лучей имеет кинетическую энергию $W = 7m_0c^2$, где m_0 — масса покоя мезона. Во сколько раз собственное время жизни τ_0 мезона меньше времени его жизни τ по лабораторным часам?

Решение:

Зависимость кинетической энергии мезона от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (1). По условию кинетическая энергия мезона равна $W_к = 7m_0c^2$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $7m_0c^2 = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, откуда $\sqrt{1-\beta^2} = \dfrac{1}{8}$ — (3). Время жизни мезона по лабораторным часам τ связано с его собственным временем жизни τ_0 соотношением $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, откуда $\dfrac{\tau}{\tau_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (4).

Подставляя (3) в (4), получаем $\dfrac{\tau}{\tau_0} = 8$.

23.12. Позитрон и электрон соединяются, образуя два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого из фотонов, считая, что начальная энергия частиц ничтожно мала. Какова длина волны λ этих фотонов?

Решение:

Если электрон и позитрон образуют два фотона, то по закону сохранения энергии $2m_0c^2 + W_1 + W_2 = 2h\nu$, где $2m_0c^2$ — суммарная энергия покоя электрона и позитрона, W_1 и W_2 — кинетические энергии электрона и позитрона, $2h\nu$ — суммарная энергия образовавшихся фотонов. Поскольку по условию начальная энергия частиц W_1 и W_2 ничтожно мала, то энергия каждого из фотонов равна $h\nu = m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ. Отсюда частота излучения фотона $\nu = \frac{m_0c^2}{h}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{m_0c}{h} = \frac{1}{\lambda}$, откуда длина волны фотонов $\lambda = \frac{h}{m_0c} = 2{,}42 \cdot 10^{-12}$ м.

23.13. Электрон и позитрон образуются фотоном с энергией $h\nu = 2{,}62$ МэВ. Какова была в момент возникновения полная кинетическая энергия $W_1 + W_2$ позитрона и электрона?

Решение:

По закону сохранения энергии $h\nu = 2m_0c^2 + W_1 + W_2$. Энергия покоя каждой частицы $m_0c^2 = 0{,}51 \cdot 10^6$ эВ. Тогда $W_1 + W_2 = h\nu - 2m_0c^2 = 1{,}6 \cdot 10^6$ эВ.

23.14. Электрон и позитрон, образованные фотоном с энергией $h\nu = 5{,}7$ МэВ, дают в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле, траектории с радиусом кривизны $R = 3$ см. Найти магнитную индукцию B поля.

Решение:

На электрон и позитрон в магнитном поле действует сила Лоренца, сообщая им нормальное ускорение, т. е. $qBv = \frac{mv^2}{R}$, откуда $B = \frac{mv}{qR}$ — (1). Согласно теории относительности импульс частицы $p = mv = \frac{1}{c}\sqrt{W(W + 2m_0c^2)}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $B = \frac{1}{cqR}\sqrt{W(W + 2m_0c^2)}$ — (3). Кинетическая энергия каждой частицы $W = \frac{h\nu - 2m_0c^2}{2} = 2{,}34$ МэВ (см. задачу 23.13). Подставляя числовые данные в (3), получим $B = 0{,}31$ Тл.

23.15. Неподвижный нейтральный π-мезон, распадаясь, превращается в два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого фотона. Масса покоя π-мезона $m_0(\pi) = 264{,}2m_0$, где m_0 — масса покоя электрона.

Решение:

Если неподвижный нейтральный π-мезон распадается на два фотона, то по закону сохранения энергии $m_0(\pi)c^2 = 2h\nu$ — (1). По условию масса покоя мезона $m_0(\pi) = 264{,}2m_0$ — (2), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона. Подставляя (2) в (1), получаем $h\nu = 132{,}1m_0c^2 = 67{,}7$ МэВ.

23.16. Нейтрон и антинейтрон соединяются, образуя два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого из фотонов, считая, что начальная энергия частиц ничтожно мала.

Решение:

Энергия каждого из фотонов (см. задачу 23.12) равна $h\nu = m_0 c^2 = 942$ МэВ.

23.17. Неподвижный K^0-мезон распадается на два заряженных π-мезона. Масса покоя K^0-мезона $m_0(K^0) = 965 m_0$, где m_0 — масса покоя электрона; масса каждого π-мезона $m(\pi) = 1{,}77 m_0(\pi)$, где $m_0(\pi)$ — его масса покоя. Найти массу покоя $m_0(\pi)$ π-мезонов и их скорость v в момент образования.

Решение:

Если неподвижный K^0-мезон распадается на два заряженных π-мезона, то по закону сохранения энергии $m_{0K^0} c^2 - 2 m_{0\pi} c^2 = 2(m_\pi - m_{0\pi}) c^2$ — (1). По условию задачи масса покоя K^0-мезона $m_{0K^0} = 965 m_0$ — (2), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, а масса каждого π-мезона $m_\pi = 1{,}77 m_{0\pi}$ — (3), где $m_{0\pi}$ — его масса покоя. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $965 m_0 c^2 - 2 m_{0\pi} c^2 = 2 \cdot 1{,}77 m_{0\pi} c^2$. Отсюда масса покоя π-мезонов равна $m_{0\pi} = \dfrac{965 m_0}{2 \cdot 1{,}77} = 272{,}59 m_0 = 2{,}48 \cdot 10^{-28}$ кг.

Из теории относительности известно, что кинетическая энергия тела зависит от скорости его движения следующим образом: $W_к = m_{0\pi} c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (4), где $\beta = \dfrac{v}{c}$ — (5) — относительная скорость. С другой стороны, $W_к = m_\pi c^2$, или, учитывая (3), $W_к = 1{,}77 m_{0\pi} c^2$ (6). Приравнивая правые части уравнений (4) и (6), получим $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = 1{,}77$. Отсюда относительная скорость π-мезонов равна $\beta = 0{,}932$. Тогда, учитывая (5), скорость π-мезонов в момент образования будет равна $v = 0{,}932 \cdot c = 2{,}79 \cdot 10^8$ м/с.

23.18. Вывести формулу, связывающую магнитную индукцию B поля циклотрона и частоту ν приложенной к дуантам разности потенциалов. Найти частоту приложенной к дуантам разности потенциалов для дейтонов, протонов и α-частиц. Магнитная индукция поля $B = 1{,}26$ Тл.

Решение:

На заряженную частицу в циклотроне действует сила Лоренца $F_Л = qvB\sin\alpha$, где q — заряд частицы, B — индукция магнитного поля. Т. к. $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha = 1$, отсюда $F_Л = qvB$. Она является центростремительной силой и сообщает частице центростремительное ускорение $a_{цс} = \dfrac{v^2}{R}$. По второму закону Ньютона $F_Л = ma_{цс} = m\dfrac{v^2}{R}$. Приравняем правые части уравнений $qvB = \dfrac{mv^2}{R}$, откуда $R = \dfrac{mv}{qB}$ — радиус окружности циклотрона. Период обращения циклотрона $T_ц = \dfrac{L}{v}$, где $L = 2\pi R = \dfrac{2\pi mv}{qB}$ — длина окружности циклотрона. $T_ц = \dfrac{2\pi m}{qB}$. Тогда частота $\nu_ц = \dfrac{1}{T_ц} = \dfrac{qB}{2\pi m}$. Для того чтобы частица непрерывно ускорялась, необходимо, чтобы она попадала в ускоряющий промежуток между дуантами в тот момент, когда электрическое поле изменит свою полярность, т. е. частота изменения полярности ускоряющего электрического поля должна совпадать с частотой циклотрона: $\nu = \nu_ц = \dfrac{qB}{2\pi m}$ — условие синхронизации. Подставляя числовые данные, получим $\nu_D = 9{,}7$ МГц; $\nu_p = 19{,}4$ МГц; $\nu_\alpha = 9{,}7$ МГц.

23.19. Вывести формулу, связывающую энергию W вылетающих из циклотрона частиц и максимальный радиус кривизны R траектории частиц. Найти энергию W вылетающих из циклотрона дейтонов, протонов и α-частиц, если максимальный радиус кривизны $R = 48{,}3$ см; частота приложенной к дуантам разности потенциалов $\nu = 12$ МГц.

Решение:

Радиус окружности циклотрона и частота изменения полярности ускоряющего электрического поля (см. задачу 23.18) равны: $R = \dfrac{mv}{qB}$ и $\nu = \dfrac{qB}{2\pi m}$, отсюда $qB = 2\pi m\nu$; $R = \dfrac{mv}{2\pi m\nu} = \dfrac{v}{2\pi\nu}$. Отсюда скорость вылетающих из циклотрона частиц $v = 2\pi\nu R$, а их кинетическая энергия $W = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m4\pi^2\nu^2R^2}{2} = 2\pi^2 m\nu^2R^2$. Подставляя числовые данные, получим $W_D = 13{,}8$ МэВ; $W_p = 6{,}9$ МэВ; $W_\alpha = 27{,}6$ МэВ.

23.20. Максимальный радиус кривизны траектории частиц в циклотроне $R = 35$ см; частота приложенной к дуантам разности потенциалов $\nu = 13{,}8$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля, необходимого для синхронной работы циклотрона, и максимальную энергию W вылетающих протонов.

Решение:

Частота приложенной к дуантам циклотрона разности потенциалов (см. задачу 23.18) определяется соотношением $\nu = \frac{Bq}{2\pi m}$. Отсюда индукция магнитного поля, необходимого для синхронной работы циклотрона, равна $B = \frac{2\pi m\nu}{q}$. Для протона $m = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг и $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, поэтому $B = 0{,}9$ Тл. Максимальная энергия вылетающих из циклотрона заряженных частиц (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m\nu^2 R^2$. Подставляя значения для протона, получаем $W = 4{,}8$ МэВ.

23.21. Решить предыдущую задачу для: а) дейтонов, б) α-частиц.

Решение:

Индукция магнитного поля, необходимого для синхронной работы циклотрона (см. задачу 23.20), равна $B = \frac{2\pi m\nu}{q}$. Максимальная энергия вылетающих из циклотрона заряженных частиц равна $W = 2\pi^2 m\nu^2 R^2$. а) Для дейтонов $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 3{,}346 \cdot 10^{-27}$ кг, следовательно, $B = 1{,}8$ Тл и $W = 9{,}6$ МэВ. б) Для α-частиц $q = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 6{,}692 \cdot 10^{-27}$ кг, следовательно, $B = 1{,}8$ Тл и $W = 19{,}25$ МэВ.

23.22. Ионный ток в циклотроне при работе с α-частицами $I = 15$ мкА. Во сколько раз такой циклотрон продуктивнее массы $m = 1$ г радия?

Решение:

По определению ионный ток в циклотроне $I = \frac{q}{T} = qn$ — (1), где $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд α-частицы, T — период обращения α -частицы в циклотроне, n — частота излучения α -частиц циклотроном. Активность излучения α -частиц радием равна $a = \lambda N$ — (2), где $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (3) — число делящихся ядер радия, $\mu = 226$ г/моль — молярная масса радия, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. Период полураспада радия равен $T_{1/2} = \frac{ln 2}{\lambda}$, откуда постоянная распада $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (4). Подставляя (3) и (4) в (2), получим $a = \frac{m N_A \, ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (5). Из формулы (1) $n = \frac{I}{q}$ — (6). Разделив (6) на (5), окончательно находим $\frac{n}{a} = \frac{I \mu T_{1/2}}{q m N_A \, ln 2} = 1270$.

23.23. Максимальный радиус кривизны траектории частиц в циклотроне $R = 50$ см; магнитная индукция поля $B = 1$ Тл. Какую постоянную разность потенциалов U должны пройти протоны, чтобы получить такое же ускорение, как в данном циклотроне?

Решение:

Частота разности потенциалов, приложенной к дуантам циклотрона (см. задачу 13.18), равна $\nu = \frac{Be}{2\pi m}$ — (1), а энергия вылетающих из циклотрона протонов (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W = \frac{B^2 e^2 R^2}{2m}$ — (3). Потенциальная энергия протонов, прошедших ускоряющую разность потенциалов, равна $W_п = eU$ — (4). Чтобы протоны получили такое же ускорение, как в циклотроне, по закону сохранения энергии необходимо, чтобы $W_п = W$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $U = \frac{B^2eR^2}{2m} = 11{,}98$ МВ.

23.24. Циклотрон дает дейтоны с энергией $W = 7$ МэВ. Магнитная индукция поля циклотрона $B = 1{,}5$ Тл. Найти минимальный радиус кривизны R траектории дейтона.

Решение:

Энергия дейтонов, вылетающих из циклотрона (см. задачу 23.23), равна $W = \frac{B^2q^2R^2}{2m}$. Отсюда максимальный раднус кривизны траектории дейтона равен $R = \frac{\sqrt{2mW}}{Bq} = 36$ см.

23.25. Между дуантами циклотрона радиусом $R = 50$ см приложена переменная разность потенциалов $U = 75$ кВ с частотой $\nu = 10$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля циклотрона, скорость v и энергию W вылетающих из циклотрона частиц. Какое число оборотов n делает заряженная частица до своего вылета из циклотрона? Задачу решить для дейтонов, протонов и α-частиц.

Решение:

Частота разности потенциалов, приложенной к дуантам циклотрона (см. задачу 23.18), равна $\nu = \frac{Bq}{2\pi m}$. Отсюда магнитная индукция поля циклотрона равна $B = \frac{2\pi m\nu}{q}$ — (1). Энергия вылетающих из циклотрона частиц (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m\nu^2R^2$ — (2). Из теории относительности известно, что кинетическая энергия частицы зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ — (3). Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $2\pi^2\nu^2R^2 = c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$, откуда $\beta = \frac{2\pi\nu R\sqrt{\pi^2\nu^2R^2+c^2}}{2\pi^2\nu^2R^2+c^2}$ — (4). С другой стороны, относительная скорость $\beta = \frac{u}{c}$ — (5). Приравнивая правые части уравнений (4) и (5), находим скорость частиц $u = \frac{2\pi\nu Rc\sqrt{\pi^2\nu^2R^2+c^2}}{2\pi^2\nu^2R^2+c^2}$ — (6). При каждом полном обороте заряженная частица проходит дважды расстояние между дуантами и, следовательно, дважды получит добавочный импульс. Поэтому при n оборотах заряженная частица приобретает энергию, эквивалентную ускоряющему потенциалу, $U' = 2nU$, где U — разность потенциалов, приложенная между дуантами. Отсюда $n = \frac{U'}{2U}$ — (7). Подставляя значения в формулы (1), (2), (6) и (7), получаем следующие числовые значения: а) Для дейтонов: $B_1 = 1{,}3$ Тл; $W_1 = 10{,}2$ МэВ; $u_1 = 3{,}13\cdot10^7$ м/с; $n = 68$. б) Для протонов: $B_1 = 0{,}65$ Тл; $W_1 = 5{,}12$ МэВ; $u_1 = 3{,}13\cdot10^7$ м/с; $n = 34$. в) Для α-частиц: $B_1 = 1{,}3$ Тл; $W_1 = 5{,}12$ МэВ; $u_1 = 3{,}13\cdot10^7$ м/с; $n = 68$.

23.26. До какой энергии W можно ускорить α-частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы $k = \frac{m-m_0}{m_0}$ не должно превышать 5%?

Решение:

Из теории относительности известно, что изменение массы частицы на Δm соответствует изменению ее энергии на $\Delta W = c^2 \Delta m$ — (1). По условию задачи относительное увеличение массы частицы $k = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{\Delta m}{m_0} \le 0{,}05$ — (2). Считая начальную энергию α-частицы равной нулю, можно предположить, что $W_{max} = \Delta W$ — (3). В этом случае из формулы (2) изменение массы α-частицы равно $\Delta m = 0{,}05 m_0$ — (4). Подставляя (3) и (4) в (1), получаем $W_{max} = 0{,}05 m_0 c^2 = 187$ МэВ.

23.27. Энергия дейтонов, ускоренных синхротроном, $W = 200$ МэВ. Найти для этих дейтонов отношение $\frac{m}{m_0}$ (где m — масса движущегося дейтона и m_0 — его масса покоя) и скорость v.

Решение:

Считая начальную энергию дейтонов равной нулю (см. задачу 23.26), можно предположить, что $W = c^2 \Delta m$ — (1), где $\Delta m = m - m_0$ — (2) — изменение массы дейтона, $m_0 = 2{,}0141$ а.е.м. — его масса покоя. Подставляя (2) в (1), получаем $W = c^2 (m - m_0)$, откуда $\frac{m}{m_0} = \frac{W}{c^2 m_0} = 1{,}1$. Из теории относительности известно, что масса дейтона зависит от скорости его движения следующим образом $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, откуда $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (3), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (4) — относительная скорость дейтона. Решая совместно уравнения (3) и (4), получаем $v = \frac{c\sqrt{(m/m_0)^2 - 1}}{m/m_0} = 1{,}3 \cdot 10^8$ м/с.

23.28. В фазотроне увеличение массы частицы при возрастании ее скорости компенсируется увеличением периода ускоряющего поля. Частота разности потенциалов, подаваемой на дуанты фазотрона, менялась для каждого ускоряющего цикла от $\nu_0 = 25$ МГц до $\nu = 18{,}9$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля фазотрона и кинетическую энергию W вылетающих протонов.

Решение:

Имеем $B = \dfrac{2\pi m_0 \nu_0}{q} = \dfrac{2\pi m \nu}{q} = 1{,}62$ Тл. Поскольку $\dfrac{\nu_0}{\nu} = \dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то $W = m_0 c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = \dfrac{m_0 c^2 (\nu_0 - \nu)}{\nu} = 300$ МэВ.

23.29. Протоны ускоряются в фазотроне до энергии $W = 660$ МэВ, α-частицы — до энергии $W = 840$ МэВ. Для того чтобы скомпенсировать увеличение массы, изменялся период ускоряющего поля фазотрона. Во сколько раз необходимо было изменить период ускоряющего поля фазотрона (для каждого ускоряющего цикла) при работе: а) с протонами; б) с α-частицами?

Решение:

В фазотроне при ускорении релятивистских частиц, когда их скорость приближается к скорости света, их масса заметно возрастает. Следовательно, возрастает и период обращения частицы. Чтобы сохранить синхронизацию, увеличивают период ускоряющего поля фазотрона. Начальный и конечный периоды можно найти аналогично, как в циклотроне (см. задачу 12.18): $T_0 = \dfrac{2\pi m_0}{qB}$; $T = \dfrac{2\pi m}{qB}$, где m_0 — масса покоя, m — конечная масса. $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{2\pi m}{qB} \dfrac{qB}{2\pi m_0} = \dfrac{m}{m_0}$. Релятивистская энергия частицы

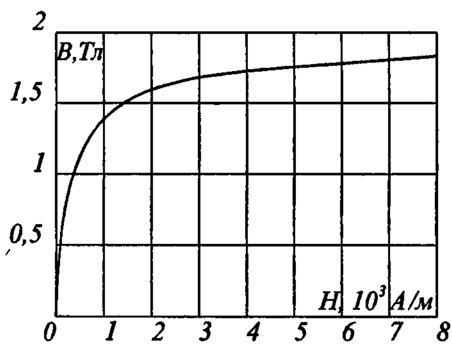
$\varepsilon = mc^2$, где c — скорость света. Энергия покоя $\varepsilon_0 = m_0c^2$. По закону сохранения энергии разность начальной и конечной энергий составит кинетическая энергия, полученная частицей при ускорении фазотроном, $W = \varepsilon - \varepsilon_0 = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2$, отсюда $m = \frac{W}{c^2} + m_0$. $\frac{T}{T_0} = \frac{W / c^2 + m_0}{m_0} = \frac{W}{c^2 m_0} + 1$. а) Для протона $W = W_p = 660 \times \times 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}06 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\frac{T}{T_0} = 1{,}7$. б) Для α-частицы $W = W_\alpha = 840 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}34 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\frac{T}{T_0} = 1{,}2$.

Приложение

1. Множители для образования десятичных кратных и дольных единиц

Наименование	Множитель	Русское обозначение	Международное обозначение
экса	10^{18}	Э	E
гета	10^{15}	П	P
тера	10^{12}	Т	T
гига	10^{9}	Г	G
мега	10^{6}	М	M
кило	10^{3}	к	k
гекто	10^{2}	г	h
дека	10	да	da
деци	10^{-1}	д	d
санти	10^{-2}	с	c
милли	10^{-3}	м	m
микро	10^{-6}	мк	μ
нано	10^{-9}	Н	n
пико	10^{-12}	П	p
фемто	10^{-15}	Ф	f
атто	10^{-18}	А	a

2. График зависимости индукции B от напряженности H магнитного поля для некоторого сорта железа



3. Фундаментальные физические константы

Абсолютный 0 температуры	$t = -273{,}15°C$
Атомная единица массы	1а.е.м. = $1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²
Заряд α-частицы	$q = 2e = 3{,}204 \cdot 10^{-19}$ Кл
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12{,}5663706144 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Магнитный момент протона	$\mu_p = 1{,}4106171 \cdot 10^{-26}$ Дж/Тл
Магнитный момент электрона	$\mu_e = 9{,}28483 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Масса α-частицы	$m_\alpha = 6{,}644 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ кг
Молярная газовая постоянная	$R = 8{,}31441$ Дж/(моль·К)
Молярный объем идеальн. газа при норм. усл.	$V_0 = 22{,}41383 \cdot 10^{-3}$ м³/моль
Норм. ускорение св. падения	$g = 9{,}81$ м/с²
Нормальные условия:	
атмосферное давление	$p_0 = 101325$ Н/м²
температура	$T = 273$ К
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}022045 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Вина	$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	$h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$Вт/(м²·К⁴)
Постоянная Фарадея	$F = 96{,}48456 \cdot 10^{3}$ Кл/моль
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ м/с
Универсальная газовая пост.	$R = 8{,}314$ Дж/(К·моль)
Элементарный заряд	$e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл

4. Некоторые данные о планетах солнечной системы

	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Среднее расстояние от Солнца, млн. км	57,91	108,21	149,59	227,94	778,3	1429,3	2875,03	4504,4	5900
Период обращения вокруг Солнца, земной год	0,24	0,62	1	1,88	11,86	29,46	84,02	164,8	249,7
Экваториальный диаметр, км	4840	12400	12742	6780	139760	115100	51000	50000	—
Объем по отношению к объему Земли	0,055	0,92	1	0,15	1345	767	73,5	59,5	—
Масса по отношению к массе Земли	0,054	0,81	1	0,107	318,4	95,2	14,58	17,26	—
Ускорение свободного падения по отношению к ускорению на поверхности Земли (g=9,80665 м/с^2)	0,38	0,85	1	0,38	2,64	1,17	0,92	1,14	—

5. Астрономические постоянные

Радиус Земли	$6{,}378164 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность Земли	$5{,}518 \cdot 10^3$ кг/м^3
Масса Земли	$5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}9599 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}737 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3{,}844 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние до Солнца	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин
Средняя плотность Солнца	$1{,}41 \cdot 10^3$ кг/м^3

6. Диаметры атомов и молекул, *нм*

Гелий	0,20	Кислород	0,30
Водород	0,23	Азот	0,30

7. Критические значения $T_к$ и $p_к$

Вещество	$T_к$, К	$p_к$, МПа	Вещество	$T_к$, К	$p_к$, МПа
Водяной пар	647	22,0	Азот	126	3,4
Углекислый газ	304	7,38	Водород	33	1,3
Кислород	154	5,07	Гелий	5,2	0,23
Аргон	151	4,87			

8. Давление водяиого пара, насыщаюшего пространство при разных температурах

t, °C	$p_н$, Па	t, °C	$p_н$, Па	t, °C	$p_н$, Па
–5	400	8	1070	40	7335
0	609	9	1145	50	12302
1	656	10	1225	60	19807
2	704	12	1396	70	31122
3	757	14	1596	80	47215
4	811	16	1809	90	69958
5	870	20	2328	100	101080
6	932	25	3165	150	486240
7	1025	30	4229	200	1549890

9. Удельная теплота парообразования воды при разных температурах

t, °C	R, 10^5 Дж/кг	t, °C	r, 10^5 Дж/кг
0	25,0	180	20,1
10	24,7	200	19,4
20	24,5	220	18,6
30	24,0	250	17,0
50	23,8	300	14,0
70	23,2	350	8,92
90	22,8	370	4,40
100	22,6	374	1,1
120	22,0	374,15	0

10. Свойства некоторых жидкостей (при 20°C)

Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Поверхностное натяжение, Н/м
Бензол	0,88	1720	0,03
Вода	1,00	4190	0,073
Глицерин	1,20	2430	0,064
Кастор. масло	0,90	1800	0,035
Керосин	0,80	2140	0,03
Ртуть	13,60	138	0,5
Спирт	0,79	2510	0,02

11. Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3	Температура плавления, °C	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температурный коэффициент линейного расширения, 10^{-5} К$^{-1}$
Алюминий	2,6	659	896	322	2,3
Железо	7,9	1530	500	272	1,2
Латунь	8,4	900	386	—	1,9
Лед	0,9	0	2100	335	—
Медь	8,6	1100	395	176	1,6
Олово	7,2	232	230	58,6	2,7
Платина	21,4	1770	117	113	0,89
Пробка	0,2	—	2050	—	—
Свинец	11,3	327	126	22,6	2,9
Серебро	10,5	960	234	88	1,9
Сталь	7,7	1300	460	—	1,06
Цинк	7,0	420	391	117	2,9

12. Свойства упругости некоторых твердых тел

Вещество	Предел прочности, МПа	Модуль Юнга, ГПа
Алюминий	110	69
Железо	294	196
Медь	245	118
Свинец	20	15,7
Серебро	290	74
Сталь	785	216

13. Теплопроводность некоторых твердых тел, Вт/(м·К)

Алюминий	210	Песок сухой	0,325
Войлок	0,046	Пробка	0,050
Железо	58,7	Серебро	460
Кварц плавлен.	1,37	Эбонит	0,174
Медь	390		

14. Диэлектрическая проницаемость диэлектриков

Воск	7,8	Парафин	2	Эбонит	2,6
Вода	81	Слюда	6	Парафинир. бумага	2
Керосин	2	Стекло	6		
Масло	5	Фарфор	6		

15. Удельное сопротивление проводников (при 0°С), мкОм·м

Алюминий	0,025	Нихром	1,00
Графит	0,039	Ртуть	0,94
Железо	0,087	Свинец	0,22
Медь	0,017	Сталь	0,10

16. Подвижности ионов в электролитах, 10^{-8} м^2/(В·с)

NO_3^-	6,4	Cl^-	6,8
H^+	32,6	Ag^+	5,6
K^+	6,7		

17. Работа выхода электронов из металла, эВ

W	4,5	Ag	4,74
W+Cs	1,6	Li	2,4
W+Th	2,63	Na	2,3
Pt+Cs	1,40	K	2,0
Pt	5,3	Cs	1,9

18. Показатели преломлеиия

Алмаз	2,42	Сероуглерод	1,63
Вода	1,33	Скипидар	1,48
Лед	1,31	Стекло	1,5 — 1,9

19. Длина волны, определяющая границу *К*-серии рентгеновских лучей для различных материалов антикатода, *нм*

Вольфрам	17,8	Платина	15,8
Золото	15,3	Серебро	48,4
Медь	138		

20. Спектральные лииии ртутной дуги, *нм*

253,7	404,7	546,1	612,8
365,0	435,8	577,0	690,8
365,5	523,5	579,1	708,2

21. Массы некоторых изотопов, *а.е.м.*

Изотоп	Масса	Изотоп	Масса	Изотоп	Масса
$^{1}_{1}H$	1,00783	$^{9}_{4}Be$	9,01218	$^{30}_{14}Si$	29,97377
$^{2}_{1}H$	2,01410	$^{10}_{5}Be$	10,01294	$^{40}_{20}Ca$	39,96257
$^{3}_{2}He$	3,01605	$^{12}_{6}C$	12,0	$^{56}_{27}Co$	55,93984
$^{4}_{2}He$	3,01603	$^{13}_{7}N$	13,00574	$^{63}_{29}Cu$	62,92960
$^{6}_{3}Li$	4,00260	$^{17}_{7}N$	14,00307	$^{112}_{48}Cd$	111,90276
$^{7}_{3}Li$	6,01512	$^{23}_{12}Mg$	16,99913	$^{200}_{80}Hg$	199,96832
$^{7}_{3}Li$	7,01600	$^{23}_{12}Mg$	22,99413	$^{235}_{92}U$	235,04393
$^{7}_{4}Be$	7,01693	$^{24}_{12}Mg$	23,98504	$^{238}_{92}U$	238,05353
$^{8}_{4}Be$	8,00531	$^{27}_{13}Al$	26,98154		

22. Периоды полураспада некоторых радиоактивных элементов

$^{45}_{20}Ca$	164 сут	$^{226}_{88}Ra$	1590 лет
$^{90}_{38}Sr$	28 лет	$^{235}_{92}U$	$7{,}1\cdot10^{8}$ лет
$^{210}_{84}Po$	138 сут	$^{238}_{92}U$	$4{,}5\cdot10^{9}$ лет
$^{222}_{86}Rn$	3,82 сут		

Периодическая система

Период	Ряд	Группы I	II	III	IV	V
1	1	H 1 1 0079 Водород				
2	2	Li 3 6 941 Литий	Be 4 9 01218 Бериллий	B 5 10 81 Бор	C 6 12 011 Углерод	N 7 14 0067 Азот
3	3	Na 11 22 98977 Натрий	Mg 12 24 305 Магний	Al 13 26 98154 Алюминий	Si 14 28 086 Кремний	P 15 30 97376 Фосфор
4	4	K 19 39 098 Калий	Ca 20 40 08 Кальций	21 Sc 44 9559 Скандий	22 Ti 47 90 Титан	23 V 50 942 Ванадий
	5	29 Cu 63 546 Медь	Zn 30 65 37 Цинк	Ga 31 69 72 Галлий	Ge 32 72 59 Германий	As 33 74 92 Мышьяк
5	6	Rb 37 85 47 Рубидий	Sr 38 87 62 Стронций	39 Y 88 905 Иттрий	40 Zr 91 22 Цирконий	41 Nb 92 906 Ниобий
	7	47 Ag 107 868 Серебро	48 Cd 112 40 Кадмий	In 49 114 82 Индий	Sn 50 118 69 Олово	Sb 51 121 75 Сурьма
6	8	Cs 55 132 905 Цезий	Ba 56 137 34 Барий	57* La 138 91 Лантан	72 Hf 178 49 Гафний	73 Ta 180 95 Тантал
	9	79 Au 196 967 Золото	80 Hg 200 59 Ртуть	Tl 81 204 37 Таллий	Pb 82 207 19 Свинец	Bi 83 208 98 Висмут
7	10	Fr 87 (223) Франций	Ra 88 (226) Радий	89** Ac (227) Актиний	Ku 104 (260) Курчатовий	

* Лантаноиды

58 Ce 140 12 Церий	59 Pr 140 91 Празеодим	60 Nd 144 24 Неодим	61 Pm (145) Прометий	62 Sm 150 35 Самарий	63 Eu 151 96 Европий	64 Gd 157 25 Гадолиний

** Актиноиды

90 Th 232 038 Торий	91 Pa (231) Протактиний	92 U 238 03 Уран	93 Np (237) Нептуний	94 Pu (242) Плутоний	95 Am (243) Америций	96 Cm (247) Кюрий

элементов Д. И. Менделеева

элементов					
VI	VII		VIII		0
					He 2 4 00260 Гелий
O 8 15 9994 Кислород	F 9 18 99840 Фтор				Ne 10 20 179 Неон
S 16 32 06 Сера	Cl 17 35 453 Хлор				Ar 18 39 948 Аргон
24 Cr 51 996 Хром	25 Mn 54 938 Марганец	26 Fe 55 847 Железо	27 Co 58 933 Кобальт	28 Ni 58 71 Никель	
Se 34 78 96 Селен	Br 35 79 90 Бром				Kr 36 83 80 Криптон
42 Mo 95 94 Молибден	43 Tc (99) Технеций	44 Ru 101 07 Рутений	45 Rh 102 905 Родий	46 Pd 106 4 Палладий	
Te 52 127 60 Теллур	I 53 126 904 Йод				Xe 54 131 30 Ксенон
74 W 183 85 Вольфрам	75 Re 186 2 Рений	76 Os 190 2 Осмий	77 Ir 192 2 Иридий	78 Pt 195 09 Платина	
Po 84 (210) Полоний	At 85 (210) Астат				Rn 86 (222) Радон

65 Tb 158 92 Тербий	66 Dy 162 50 Диспрозий	67 Ho 164 93 Гольмий	68 Er 167 26 Эрбий	69 Tu 168 93 Тулий	70 Yb 173 04 Иттербий	71 Lu 174 97 Лютеций

97 Bk (247) Берклий	98 Cf (249) Калифорний	99 Es (254) Эйнштейний	100 Fm (253) Фермий	101 Md (256) Менделевий	102 (No) (256) (Нобелий)	103 Lr (257) Лоуренсий

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Готовимся к экзаменам

ВСЕ РЕШЕНИЯ

К «СБОРНИКУ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ» В.С. ВОЛЬКЕНШТЕЙН

в двух книгах

Книга 2

Редактор *Г С Николаева*
Компьютерная верстка и графика *И.А. Изергин*
Технический редактор *Н Г Новак*
Корректор *И.И Попова*

Подписано в печать 05.03.99. Формат $84 \times 108^{1}/_{32}$.
Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 31,08.
Печать высокая. Бумага типографская № 2.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 3269.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК-00-93, том 2, 953000 — книги, брошюры

Гигиенический сертификат
№ 77 ЦС 01 952 П 01659 Т 98 от 01 09 98 г.

«Олимп»
Изд лиц ЛР № 070190 от 25 10 96
123007, Москва, а/я 92

ООО "Фирма «Издательство АСТ»"
ЛР № 066236 от 22 12 98
366720, РФ, РИ, г Назрань, ул Московская, 13 а

Наши электронные адреса
WWW AST RU
E-mail AST@POSTMAN RU

Отпечатано с готовых диапозитивов
на Книжной фабрике № 1 Госкомпечати России.
144003, г. Электросталь Московской обл., ул. Тевосяна, 25.