книга 1

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНАМ

ВСЕ РЕШЕНИЯ К «СБОРНИКУ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ» В.С.Волькенштейн

Универсальное издание

- поступающим в вузы
- студентам и преподавателям
- школьникам и учителям
- гарантия овладения навыками решения задач

Предисловие

В данной книге приведены решения всех задач одного из самых популярных задачников: «Сборник задач по общему курсу физики», автор — Валентина Сергеевна Волькенштейн. Этот сборник впервые вышел в свет в 1958 году и с тех пор переиздавался двенадцать раз. Книга В. С. Волькенштейн широко используется в качестве учебного пособия студентами высших технических учебных заведений нефизического профиля, физико-математических факультетов педагогических вузов, а также учащимися школ и других средних учебных заведений с физико-математическим уклоном. Данная книга кроме вышеперечисленных категорий учащихся может быть использована абитуриентами, учителями физики в старших классах, а также преподавателями вузов.

Книга В. С. Волькенштейн была написана достаточно давно. В ней использованы некоторые устаревшие обозначения, упоминаются не применяемые сегодня физические приборы. В издании сохранен стиль сборника, в основном используется аналитический метод. Решения нескольких задач (их номера указаны перед соответствующим параграфом) приведены в том же виде, как они даны у В. С. Волькенштейн. Ряд задач сборника снабжены, на наш взгляд, ошибочными ответами. Для таких задач приводится полное решение и расчет. В большинстве задач искомая величина записывается в виде формулы, а ответ дается без подробного счета.

Безусловно соблазн прочитать готовое решение очень велик! Но, если читатель хочет овладеть навыками самостоятельного решения, он должен сначала постараться справиться с задачей своими силами, а затем сверить полученное решение с книгой. Если же все-таки что-то не получилось, то нужно, разобрав предложенное решение задачи, попытаться повторить его самостоятельно.

Мы выражаем благодарность А. А. Воробьеву, И. Д. Датту, В. И. Плису, Г. Н. Сафоновой за консультации и помощь при решении отдельных задач.

Глава I
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

§ 1. Кинематика

В задачах данного раздела необходимо, прежде чем приступать к числовым расчетам, представить все величины в единицах системы СИ. Если в задаче приведена графическая зависимость нескольких величин от какой-либо одной и при этом все кривые изображены на одном графике, то по оси y задаются условные единицы.

1.1. Первую половину времени своего движения автомобиль двигался со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а вторую половину времени — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Какова средняя скорость $\bar{v}$ движения автомобиля?

Решение:

Средняя скорость определяется выражением: $\bar{v} = \dfrac{s}{t}$, где $s = s_1 + s_2 = v_1 \dfrac{t}{2} + v_2 \dfrac{t}{2}$, т.к. $t_1 = t_2 = \dfrac{t}{2}$. Т.е. $s = \dfrac{t}{2}(v_1 + v_2)$, отсюда: $\bar{v} = \dfrac{t(v_1 + v_2)}{2t} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$, $\bar{v} = 60$ км/ч.

1.2. Первую половину своего пути автомобиль двигался со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а вторую половину пути – со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Какова средняя скорость $\bar{v}$ движения автомобиля?

Решение:

Средняя скорость определяется выражением: $\bar{v} = \dfrac{s}{t}$ – (1), где $t = t_1 + t_2$; $s_1 = s_2 = \dfrac{s}{2}$. Тогда $t_1 = \dfrac{s}{2v_1}$; $t_2 = \dfrac{s}{2v_2}$, откуда

$t = \dfrac{s(v_1 + v_2)}{2v_1 v_2}$ – (2). Подставляя (2) в (1), получим:

$\bar{v} = \dfrac{s \cdot 2v_1 v_2}{s(v_1 + v_2)} = \dfrac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$, $\bar{v} = \dfrac{2 \cdot 80 \cdot 40}{80 + 40} \approx 53{,}3$ км/ч.

1.3. Пароход идет по реке от пункта *A* до пункта *B* со скоростью $v_1 = 10$ км/ч, а обратно – со скоростью $v_2 = 16$ км/ч. Найти среднюю скорость $\bar{v}$ парохода и скорость u течения реки.

Решение:

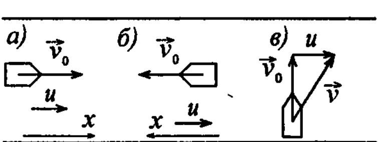
Средняя скорость $\bar{v} = \dfrac{s}{t}$ – (1), где $t = t_1 + t_2$, а $s_1 = s_2 = \dfrac{s}{2}$.

Тогда $t_1 = \dfrac{s}{2v_1}$ и $t_2 = \dfrac{s}{2v_2}$, откуда $t = \dfrac{s(v_1 + v_2)}{2v_1 v_2}$ – (2).

Подставляя (2) в (1), получим: $\bar{v} = \dfrac{s \cdot 2v_1 v_2}{s(v_1 + v_2)} = \dfrac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$ или $\bar{v} = 12{,}3$ км/ч. При движении вниз по течению $\bar{v} = v_1 + u$, а при движении вверх по течению $\bar{v} = v_2 - u$. Приравняем правые части уравнений и выразим u: $v_1 + u = v_2 - u$, $2u = v_2 - v_1$, $u = \dfrac{v_2 - v_1}{2}$; $u = 3$ км/ч.

1.4. Найти скорость v относительно берега реки: а) лодки, идущей по течению; б) лодки, идущей против течения; в) лодки, идущей под углом $\alpha = 90°$ к течению. Скорость течения реки $u = 1$ м/с, скорость лодки относительно воды $v_0 = 2$ м/с.

Решение:

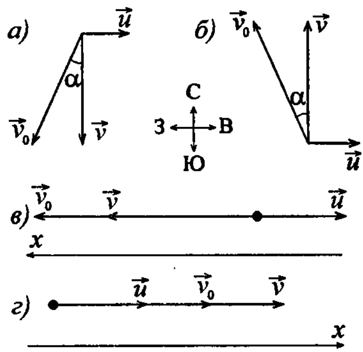


а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 + u = 3$ м/с. б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x:

$v = v_0 - u = 1$ м/с. в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, сложив вектора по правилу треугольников, получим: $v = \sqrt{v_0^2 + u^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx$ $\approx 2{,}24$ м/с.

1.5. Самолет летит относительно воздуха со скоростью $v_0 = 800$ км/ч. Ветер дует с запада на восток со скоростью $u = 15$ м/с. С какой скоростью v самолет будет двигаться относительно земли и под каким углом α к меридиану надо держать курс, чтобы перемещение было: а) на юг; б) на север; в) на запад; г) на восток?

Решение:



а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в скалярном виде: $v_0 = \sqrt{v^2 - u^2}$. Подставляя числовые данные и учитывая, что $u = 15$ м/с $= 54$ км/ч, получаем $v_0 = 798$ км/ч. Из рисунка видно, что $v = v_0 \cos\alpha$; $\cos\alpha = v / v_0$; $\cos\alpha = 0{,}998$; $\alpha \approx 4°$. Курс на юго-запад.

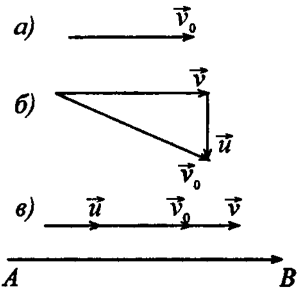
б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в скалярном виде: $v_0 = \sqrt{v^2 - u^2}$ или $v_0 = 798$ км/ч. Поскольку $v = v_0 \cos\alpha$, то $\cos\alpha = v / v_0$; $\cos\alpha = 0{,}998$; $\alpha \approx 4°$. Курс на северо-запад.

в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 - u$; $v = 800 - 54 = 746$ км/ч. Курс на запад.

г) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 + u$; $v = 800 + 54 = 854$ км/ч. Курс на восток.

1.6. Самолет летит от пункта A до пункта B, расположенного на расстоянии $l = 300$ км к востоку. Найти продолжительность t полета, если: а) ветра нет; б) ветер дует с юга на север; в) ветер дует с запада на восток. Скорость ветра $u = 20$ м/с, скорость самолета относительно воздуха $v_0 = 600$ км/ч?

Решение:



а) $t = \dfrac{l}{v_0}$; $t = 0{,}5$ ч;

б) $v_0^2 = \left(\dfrac{l}{t}\right)^2 + u^2$, отсюда найдем

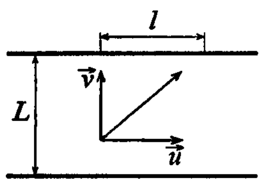
$t = \sqrt{\dfrac{l^2}{v_0^2 - u^2}}$ или $t = 0{,}504$ ч $=$

$= 30{,}2$ мин;

в) $t = \dfrac{l}{v_0 + u}$; $t = \dfrac{300}{672} = 0{,}45$ ч $= 26{,}8$ мин.

1.7. Лодка движется перпендикулярно к берегу со скоростью $v = 7{,}2$ км/ч. Течение относит ее на расстояние $l = 150$ м вниз по реке. Найти скорость u течения реки и время t, затраченное на переправу через реку. Ширина реки $L = 0{,}5$ км.

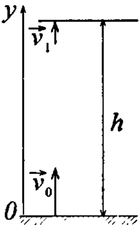
Решение:



Движение лодки относительно реки выражается формулой: $L = vt$, откуда $t = \dfrac{L}{v} = 250$ с. За это же время t лодка переместилась относительно берега на расстояние l, причем скорость лодки относительно берега равна скорости реки, тогда $u = \dfrac{l}{t}$; $u = 0{,}6$ м/с.

1.8. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через время $t = 3$ с. Какова была начальная скорость v_0 тела и на какую высоту h оно поднялось?

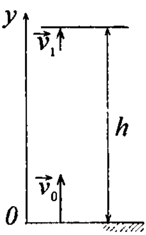
Решение.



Запишем уравнения кинематики в проекциях на ось y: $y(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ и $v(t)=v_0-gt$. В наивысшей точке подъема имеем $y(t_1)=h$; $v(t_1)=0$, т. е. $h=v_0t_1-qt_1^2/2$ и $0=v_0-qt_1$, где $t_1=\frac{t}{2}$ — время подъема. Откуда $v_0=qt_1$, $v_0=\frac{qt}{2}$, $h=qt_1^2-\frac{qt_1^2}{2}=\frac{qt_1^2}{2}$; $h=\frac{qt^2}{8}$. Подставляя числовые данные, получим $v_0=14{,}7$ м/с; $h\approx 11$ м.

1.9. Камень бросили вертикально вверх на высоту $h_0=10$ м. Через какое время t он упадет на землю? На какую высоту h поднимется камень, если начальную скорость камня увеличить вдвое?

Решение:



Воспользуемся решением задачи 1.8 и запишем систему уравнений:

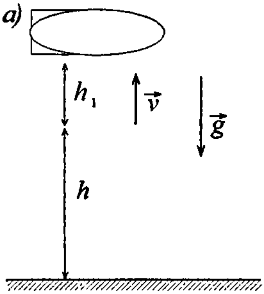
$$\begin{cases} h_0=v_0t_1-\frac{qt_1}{2} & \text{—(1)},\\ 0=v_0-qt_1 & \text{—(2)},\\ t=2t_1 & \text{—(3)},\end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} v_0=\frac{qt}{2} & \text{—(4)},\\ h_0=\frac{qt^2}{8} & \text{—(5)}.\end{cases}$$

Тогда из (5) $t=\sqrt{\frac{8h_0}{g}}$, отсюда $t=2{,}9$ с. Из (2) $t_1=\frac{v_0}{g}$. Следовательно, если v_0 увеличится в 2 раза, время подъема также увеличится в 2 раза. Из (1) $h=2v_0\cdot 2t_1-\frac{q4t_1^2}{2}$;

$$h=4\left(v_0t_1-\frac{qt_1^2}{2}\right)=4h_0=40\,\text{м}.$$

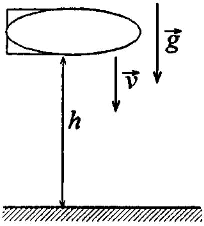
1.10. С аэростата, находящегося на высоте $h = 300$ м, упал камень. Через какое время t камень достигнет земли, если: а) аэростат поднимается со скоростью $v = 5$ м/с; б) аэростат опускается со скоростью $v = 5$ м/с; в) аэростат неподвижен?

Решение:



Решаем задачу относительно неподвижной системы отсчета — земли. Тогда скорость камня в начальный момент времени относительно земли $\vec{v}_{отн}$ равна сумме скоростей: камня относительно аэростата $\vec{v}_{отн} = 0$ и скорости v аэростата относительно земли, т.е. $\vec{v}_{отн} = 0 + \vec{v}$. Таким образом, при $t = 0$ скорость камня равна скорости аэростата. В первый момент времени камень, имея начальную скорость v, полетит вверх и за время t_1 поднимется на высоту $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$ — (1) (см задачу 1.8). Остановившись в верхней точке, он полетит вниз и за время t_2 преодолеет расстояние $h + h_1 = \frac{gt_2^2}{2}$ — (2). Общее время $t = t_1 + t_2$ — (3). При движении вверх скорость $v = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v}{g}$ — (4). Подставив (4) в (1), получим $h_1 = \frac{v^2}{(2g)}$. Преобразуем уравнение (2): $h + \frac{v^2}{2g} = \frac{gt_2^2}{2}$. Отсюда $t_2 = \frac{\sqrt{2gh + v^2}}{g}$ — (5). Подставив (4) и (5) в (3), получим $t = \frac{\left(v + \sqrt{2gh + v^2}\right)}{g}$; $t \approx 8{,}4$ с.

б)



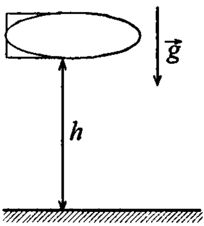
Уравнение движения камня:

$$h = vt + \frac{gt^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{gt^2}{2} + vt - h = 0.$$

Решим квадратное уравнение относительно t: $D = v^2 + 2gh$;

$t = \left(-v \pm \sqrt{v^2 + 2gh}\right)/g$. Величина t должна быть положительна, следовательно: $t \approx 7{,}3$ с.

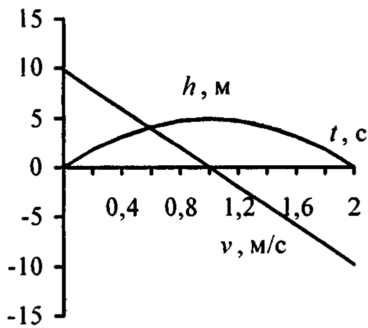
в)



Уравнение движения камня: $h = \dfrac{gt^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{2h/g}$, $t \approx 7{,}8$ с.

1.11. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 9{,}8$ м/с. Построить график зависимости высоты h и скорости v от времени t для интервала $0 \le t \le 2$ с через 0,2с.

Решение:



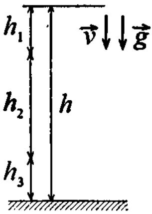
Зависимость скорости и высоты от времени выражается следующими формулами: $v = v_0 - gt$; $h = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$. Для заданного интервала составим таблицу и построим график.

t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
V, м/с	9,8	7,8	5,9	3,9	2,0	0	-2,0	-3,9	-5,9	-7,8	-9,8
H, м	0	1,8	3,1	4,1	4,7	4,9	4,7	4,1	3,1	1,8	0

1.12. Тело падает с высоты $h = 19{,}6$ м с начальной скоростью $v_0 = 0$. Какой путь пройдет тело за первую и последнюю 0,1с своего движения?

Решение:

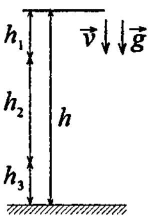
За первую 0,1 с движения тело пройдет путь $h_1 = gt_1^2/2$; $h_1 = 0{,}049$ м. Весь путь $h = gt^2/2$ тело пройдет за время $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 19{,}6}{9{,}8}} = 2$ с.



За последнюю 0,1 с движения тело пройдет путь $h_3 = h - h_2$, где h_2 — путь, пройденный телом за время $t_2 = t - 0{,}1$. Так как $h_2 = \dfrac{gt_2^2}{2}$, $h_2 = \dfrac{g(t-0{,}1)^2}{2}$, то путь $h_3 = h - \dfrac{g(t-0{,}1)^2}{2}$; $h_3 = 19{,}6 - \dfrac{9{,}8(2-0{,}1)^2}{2} = 1{,}9$ м.

1.13. Тело падает с высоты $h = 19{,}6$ м с начальной скоростью $v_0 = 0$. За какое время тело пройдет первый и последний 1 м своего пути?

Решение:



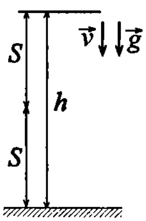
Первый 1 м пути тело пройдет за время $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h_1}{g}}$, где $h_1 = 1$м, таким образом $t_1 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 1}{9{,}8}} = 0{,}45$ с. Общее время падения $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 19{,}6}{9{,}8}} = 2$ с. Последний 1 м своего пути тело пройдет за время $t_3 = t - t_2$, где t_2 — время прохождения

пути $h_2 = h - h_3$, а $h_3 = 1$ м. Т.к. $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$, $t_2 = \sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}}$

то время $t_3 = t - \sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}}$; $t_3 = 0{,}05$ с.

1.14. Свободно падающее тело в последнюю секунду движения проходит половину всего пути. С какой высоты h падает тело и каково время t его падения?

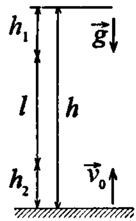
Решение:



Обозначим половину пути за S, тогда $h = 2S$ — (1). Уравнение движения тела: $h = gt^2/2$ — (2). Вторая половина пути $S = vt_2 + \frac{gt_2^2}{2}$, где $v = g(t - t_2)$; $t_2 = 1$с. Тогда $S = gt_2(t - t_2) + gt_2^2/2$ или, с учетом (1), $h = 2gt_2(t - t_2) + gt_2^2$ — (3). Приравняем (2) и (3): $\frac{gt^2}{2} = 2gt_2(t - t_2) + gt_2^2$. Умножив обе части уравнения на 2, разделив на g и раскрыв скобки, получим: $t^2 = 4t_2t - 4t_2^2 + 2t_2^2$. Для удобства вычислений подставим значение t_2: $t^2 - 4t + 2 = 0$. Решим квадратное уравнение. $D = 8$; $t = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$; значение $t = 0{,}6$ — не соответствует условию задачи, тогда $t = 3{,}4$ с; $h = 5 \cdot 3{,}4^2 = 57$ м.

1.15. Тело 1 брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0, тело 2 падает с высоты h без начальной скорости. Найти зависимость расстояния l между телами 1 и 2 от времени t, если известно, что тела начали двигаться одновременно.

Решение:

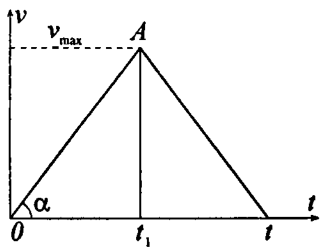


Пусть тела 1 и 2 одинаковы, тогда время движения тела 1 до верхней точки подъема равно времени падения тела 2. Путь, пройденный телом 1: $h_1 = v_0 t - gt^2/2$ — (1); путь, пройденный телом 2 : $h_2 = gt^2/2$ — (2). Расстояние между телами $l = h - (h_1 + h_2)$. Сложив (1) и (2), получим $h_1 + h_2 = v_0 t$, тогда $l = h - v_0 t$.

1.16. Расстояние между двумя станциями метрополитена $l = 1{,}5$ км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую — равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда $v = 50$ км/ч. Найти ускорение a и время t движения поезда между станциями.

Решение:

$l/2 = at_1^2/2$ — при равноускоренном движении поезда. $l/2 = vt_2 - at_2^2/2$ — при его равнозамедленном движении. Общее время движения $t = t_1 + t_2$. Максимальная скорость $v = at_1 = at_2$, следовательно $t_1 = t_2$. Весь путь $l = \dfrac{at_1^2}{2} + vt_1 - \dfrac{at_2^2}{2}$. Отсюда $t_1 = \dfrac{l}{v}$; $v = 50\ \text{км/ч} = 13{,}9\ \text{м/с}$; $t_1 = 108\ \text{с} = 1{,}8$ мин; $t = 3{,}6$ мин. $a = \dfrac{v}{t_1}$; $a = 0{,}13\ \text{м/с}^2$.



Для решения данной задачи можно также воспользоваться графическим методом. Построим график зависимости скорости поезда от времени. Путь равен площади под кривой или сумме площадей треугольников $0At_1$ и t_1At. Таким образом $l = v_{max}t_1/2 + v_{max}t_2/2$;

$l = \frac{1}{2} v_{max}(t_1 + t_2)$; $l = \frac{1}{2} v_{max} t$. Откуда $t = \frac{2l}{v_{max}} \approx 3{,}6$ мин;

$a = tg\alpha = \frac{v_{max}}{t/2} \approx 0{,}13$ м/с^2.

1.17. Поезд движется со скоростью $v_0 = 36$ км/ч. Если выключить ток, то поезд, двигаясь равнозамедленно, остановится через время $t = 20$ с. Каково ускорение a поезда? На каком расстоянии s до остановки надо выключить ток?

Решение:

Уравнение пути в проекции на направление движения: $s = v_0 t - at^2/2$. Уравнение скорости: $v = v_0 - at$. Т.к. $v = 0$, то $a = v_0/t$; $v_0 = 36$ км/ч $= 10$ м/с; $a = -0{,}5$ м/с^2; $s = 100$ м.

1.18. Поезд, двигаясь равнозамедленно, в течение времени $t = 1$ мин уменьшает свою скорость от $v_1 = 40$ км/ч до $v_2 = 28$ км/ч. Найти ускорение a поезда и расстояние s, пройденное им за время торможения.

Решение:

Уравнение скорости: $v_2 = v_1 - at$, откуда ускорение $a = \frac{v_1 - v_2}{t} = 0{,}055$ м/с^2. Путь $s = v_1 t - \frac{at^2}{2}$; $s = 567$ м.

1.19. Поезд движется равнозамедленно, имея начальную скорость $v_0 = 54$ км/ч и ускорение $a = -0{,}5$ м/с^2. Через какое время t и на каком расстоянии s от начала торможения поезд остановится?

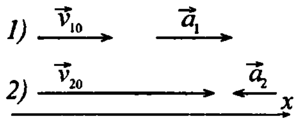
Решение:

Уравнение скорости при равнозамедленном движении: $v = v_0 - at$ — (1). Поскольку по условию ускорение уже дано со знаком «–», то из уравнения (1), с учетом $v = 0$, имеем $v_0 = at$, отсюда $t = \frac{v_0}{a}$, где $v_0 = 54$ км/ч$=15$ м/с. Подставляя числовые данные, получим $t = 30$ с. Путь, с учетом $a < 0$, найдем по формуле $S = v_0 t - at^2/2$; $S = 225$ м.

1.20. Тело 1 движется равноускоренно, имея начальную скорость v_{10} и ускорение a_1. Одновременно с телом 1 начинает двигаться равнозамедленно тело 2, имея начальную скорость v_{20} и ускорение a_2. Через какое время t после начала движения оба тела будут иметь одинаковую скорость?

Решение:

Для первого тела $v = v_{10} + a_1 t$.
Для второго тела $v = v_{20} - a_2 t$.
Следовательно

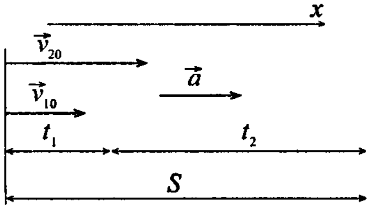


$v_{10} + a_1 t = v_{20} - a_2 t$, откуда $t = \frac{v_{20} - v_{10}}{a_1 + a_2}$; $v_{20} > v_{10}$, т.к. $t > 0$.

1.21. Тело 1 движется равноускоренно, имея начальную скорость $v_{10} = 2$ м/с и ускорение a. Через время $t = 10$ с после начала движения тела 1 из этой же точки начинает двигаться равноускоренно тело 2, имея начальную скорость $v_{20} = 12$ м/с и то же ускорение a. Найти ускорение a, при котором тело 2 сможет догнать тело 1.

Решение:

Пусть t — время от начала движения первого тела до встречи, t_1 — время, в течение которого двигалось только тело 1 ($t_1 = 10$ с), t_2 — время от начала движения



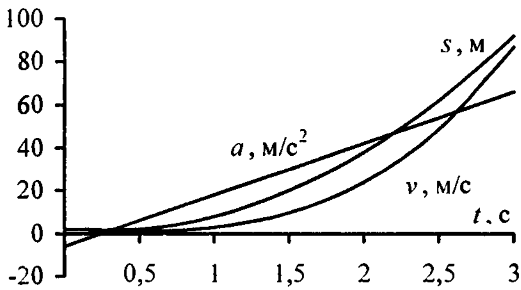
второго тела до встречи; $t = t_1 + t_2$. Путь, который тела пройдут до встречи: $S = v_{10}t + at^2/2$ — (1); $S = v_{20}t_2 + at_2^2/2$ — (2). Приравняем правые части (1) и (2). $v_{10} + a(t_1 + t_2) = v_{20} + at_2$, отсюда $a = (v_{20} - v_{10})/t_1$; $a = 1$ м/с^2.

1.22. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = At - Bt^2 + Ct^3$, где $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2 и $C = 4$ м/с^3. Найти: а) зависимость скорости v и ускорения a от времени t; б) расстояние s, пройденное телом, скорость v и ускорение a тела через время $t = 2$ с после начала движения. Построить график зависимости пути s, скорости v и ускорения a от времени t для интервала $0 \le t \le 3$ с через 0,5с.

Решение:

а) Скорость тела $v = dS/dt$; $v = A - 2Bt + 3Ct^2$; $v = 2 - 6t + {}$ $+ 12t^2$ м/с. Ускорение тела $a = dv/dt = -2B + 6Ct$; $a = -6 + {}$ $+ 24t$ м/с^2.

б) Расстояние, пройденное телом, $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. Тогда через время $t = 2$ с имеем $s = 24$ м; $v = 38$ м/с; $a = 42$ м/с^2.

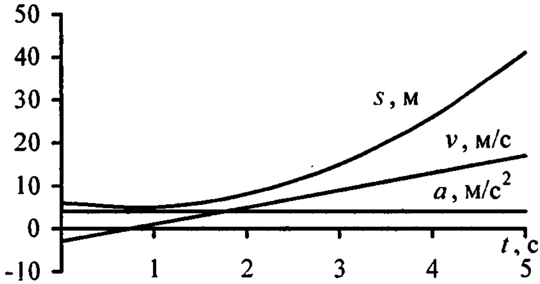


1.23. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где $a = 6$ м, $B = 3$ м/с и $C = 2$ м/с^2. Найти среднюю скорость $\overline{v}$ и среднее ускорение $\overline{a}$

тела для интервала времени $1 \le t \le 4$ с. Построить график зависимости пути s, скорости v и ускорения a от времени t для интервала $0 \le t \le 5$ с через 1с.

Решение:

Средняя скорость тела определяется соотношением $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. По условию $s = A - Bt + Ct^2$, тогда при $t_1 = 1$ с имеем $s_1 = 5$; при $t_2 = 4$ с имеем $s_2 = 26$. Отсюда $\overline{v} = 7$ м/с. Среднее ускорение $\overline{a} = \Delta\overline{v} / \Delta t$. Поскольку $v = s' = -B + {}$ $+ 2Ct^2$, то $v_1 = 1$, $v_2 = 13$, отсюда $\overline{a} = 4$ м/с^2.



1.24. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$, где $A = 3$ м, $B = 2$ м/с и $C = 1$ м/с^2. Найти среднюю скорость $\overline{v}$ и среднее ускорение $\overline{a}$ тела за первую, вторую и третью секунды его движения.

Решение:

Средняя скорость $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Пусть $t_0 = 0$; $t_1 = 1$ с; $t_2 = 2$ с; $t_3 = 3$ с. Тогда $\Delta s_1 = s_1 - s_0 = (3 + 2t_1 + t_1^2) - (3 + 2t_0 + t_0^2)$; $\Delta s_1 = 2t_1 + t_1^2$; $\overline{v}_1 = \dfrac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \dfrac{2t_1 + t_1^2}{t_1 - t_0} = 3$ м/с. Далее, $\Delta s_2 = s_2 - s_1$; $\Delta s_2 = (3 + 2t_2 + t_2^2) - (3 + 2t_1 + t_1^2) = 2(t_2 - t_1) + t_2^2 - t_1^2$; $\overline{v}_2 = \dfrac{\Delta s_2}{\Delta t_2}$

$\overline{v}_2 = \dfrac{2(t_2 - t_1) + t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = 5$ м/с. Аналогично для $\overline{v}_3 = \dfrac{\Delta s_3}{\Delta t_3}$; $\overline{v}_3 = \dfrac{2(t_3 - t_2) + t_3^2 - t_2^2}{t_3 - t_1} = 7$ м/с. Среднее ускорение $\overline{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$. Поскольку $v = \dfrac{dS}{dt} = B + 2Ct$, то $v_0 = B + 2Ct_0 = 2$ м/с; $v_0 = B + 2Ct_0 = 2$ м/с; $v_2 = B + 2Ct_2 = 6$ м/с; $v_3 = 8$ м/с. Тогда $\overline{a}_1 = \dfrac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = 2$ м/с^2; $\overline{a}_2 = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 2$ м/с^2; $\overline{a}_3 = \dfrac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$; $\overline{a}_3 = 2$ м/с^2.

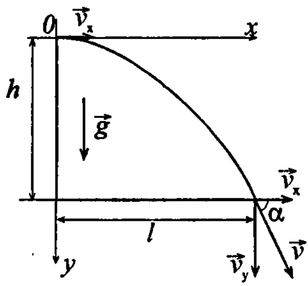
1.25. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0{,}14$ м/с^2 и $D = 0{,}01$ м/с^3. Через какое время t тело будет иметь ускорение $a = 1$ м/с^2? Найти среднее ускорение $\overline{a}$ тела за этот промежуток времени.

Решение:

Мгновенная скорость $v = \dfrac{dS}{dt}$. Ускорение $a = \dfrac{d^2S}{dt^2}$. Имеем $\dfrac{dS}{dt} = v = B + 2Ct + 3Dt^2$; $\dfrac{d^2S}{dt^2} = 2C + 6Dt$. Таким образом $a = 2C + 6Dt$, откуда $t = a - 2C / 6D$; $t = 12$ с. Среднее ускорение $\overline{a} = \Delta v / \Delta t$. Поскольку $v = B + 2Ct + 3Dt^2$, то можно найти $\Delta v = v_1 - v_0$; $\Delta t = t_1 - t_0$, где $t_1 = 12$ с, $t_0 = 0$. $v_0 = B + 2Ct_0 + 3Dt_0^2$; $v_1 = B + 2Ct_1 + 3Dt_1^2$, отсюда $\Delta v = 2C \times$ $\times (t_1 - t_0) + 3D(t_1^2 - t_0^2)$; $\overline{a} = \dfrac{2C(t_1 - t_0) + 3D(t_1^2 - t_0^2)}{t_1 - t_0}$; $\overline{a} = 2C +$ $+ 3D(t_1 - t_0)$; $\overline{a} = 0{,}64$ м/с^2.

1.26. С башни высотой $h = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_x = 15$ м/с. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью v он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение:



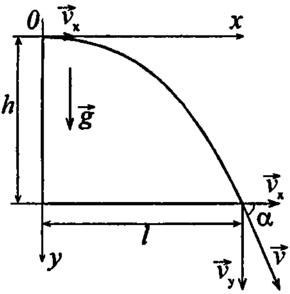
Перемещение камня по вертикали $S_y = h = gt^2/2$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x t$ — (2). Из уравнения (1): $t = \sqrt{2h/g}$; $t = 2{,}26$ с. Из уравнения (2): $l = v_x t$; $l = 33{,}9$ м. Скорость камня $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Вертикальная составляющая скорости $v_y = gt$, следовательно, $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$. Искомый угол φ — угол между направлениями вектора скорости $\vec{v}$ и вектора ее горизонтальной составляющей $\vec{v}_x$. Из рисунка видно, что $\cos\varphi = v_x/v$;

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}};\ \cos\varphi = 0{,}56;\ \varphi \approx 56°.$$

1.27. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время $t = 0{,}5$ с на расстоянии $l = 5$ м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью v_x он брошен? С какой скоростью он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение:

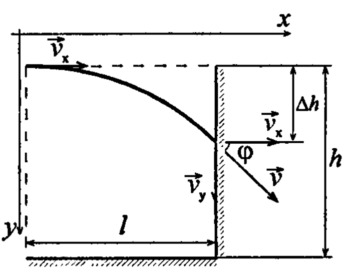
Перемещение камня по вертикали $S_y = h = gt^2/2$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x t$ — (2). Из уравнения (1)



$h = gt^2/2$; $h = 1{,}22$ м. Из уравнения (2) имеем $v_x = l/t$; $v_x = 10$ м/с. Скорость при падении на землю $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_y = gt$; $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$, т.е. $v \approx 11{,}1$ м/с. Искомый угол φ — угол между вектором скорости v и вектором ее горизонтальной составляющей $\vec{v}_x$. Из рисунка видно, что $cos\,\varphi = \frac{v_x}{v}$; $cos\,\varphi = 0{,}9$; $\varphi \approx 26°$.

1.28. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии $l = 5$ м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на $\Delta h = 1$ м меньше высоты h, с которой брошен мяч. С какой скоростью v_x брошен мяч? Под каким углом φ мяч подлетает к поверхности стенки?

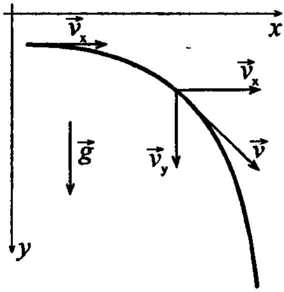
Решение:



Перемещение мяча по вертикали $S_y = h = \frac{gt^2}{2}$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x \times$ $\times t$ — (2). $v_y = gt$; $v_x = l/t$. Из уравнения (1) получим $t = \sqrt{2\Delta h/g}$. Горизонтальная составляющая скорости $v_x = l\sqrt{g}/\sqrt{2 \cdot \Delta h}$; $v_x = 11{,}1$ м/с. Вертикальная составляющая скорости $v_y = g\sqrt{2\Delta h/g}$; $v_y = \sqrt{2g\Delta h}$. Из рисунка видно, что $tg\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{l}{2\Delta h}$; $tg\varphi = 2{,}5$; $\varphi \approx 68°$.

1.29. Камень, брошенный горизонтально, через время $t = 0{,}5$ с после начала движения имел скорость v, в 1,5 раза большую скорости v_x в момент бросания. С какой скоростью v_x был брошен камень?

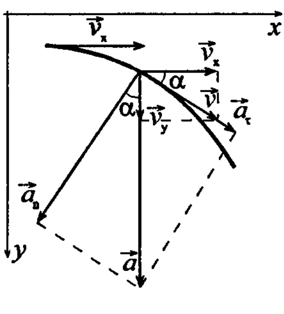
Решение:



Скорость камня $\vec{v}$ можно разложить на вертикальную $\vec{v}_y$ и горизонтальную $\vec{v}_x$ составляющие. По абсолютной величине $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ — (1), где $v_y = gt$. По условию $v = 1{,}5v_x$, тогда из уравнения (1): $v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2} = \sqrt{(1{,}5v_x)^2 - (gt)^2}$ — (2). Решая уравнение (2), найдем: $v_x^2 = 2{,}25 \cdot v_x^2 - (gt)^2$; $1{,}25v_x^2 = (gt)^2$; $v_x = \dfrac{gt}{\sqrt{1{,}25}}$; $v_x = 4{,}47$ м/с.

1.30. Камень брошен горизонтально со скоростью $v_x = 15$ м/с. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня через время $t = 1$ с после начала движения.

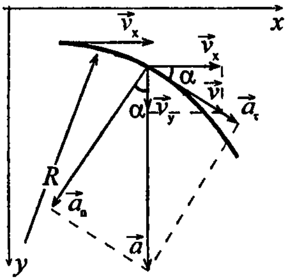
Решение:



Полное ускорение камня $a = g$; $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$. Полная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Из рисунка видно, что $\cos\alpha = v_x / v = a_n / g$; $\sin\alpha = v_y / v$; $\sin\alpha = a_\tau / g$. Тогда $a_n = gv_x / v$; $a_n = gv_x / \sqrt{v_x^2 + g^2t^2}$; $a_\tau = gv_y / v$; $a_\tau = g^2t / \sqrt{v_x^2 + g^2t^2}$; $a_n \approx 8{,}2$ м/с^2, $a_\tau \approx 5{,}4$ м/с^2.

1.31. Камень брошен горизонтально со скоростью $v_x = 10$ м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня через время $t = 3$ с после начала движения.

Решение:



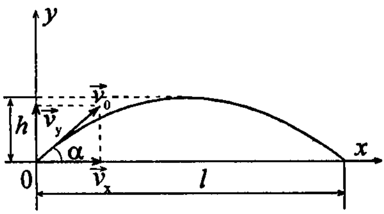
Нормальное ускорение камня $a_n = \frac{v^2}{R}$ — (1); из рисунка видно, что $a_n = g\sin\alpha$ — (2). Из уравнения (1) $R = \frac{v^2}{a_n}$, где $v = \sqrt{v_y^2 + v_x^2}$. Кроме того, $\sin\alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_y^2 + v_x^2}}$; $v_y = gt$. Сделав соответствующие подстановки, получим

$$R = \frac{\left(v_y^2 + v_x^2\right)\cdot\left(\sqrt{v_y^2 + v_x^2}\right)}{v_x g} = \frac{\left((gt)^2 + v_x^2\right)\cdot\left(\sqrt{(gt)^2 + v_x^2}\right)}{v_x g};$$

$R = 305$ м.

1.32. Мяч брошен со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 40°$ к горизонту. На какую высоту h поднимется мяч? На каком расстоянии l от места бросания он упадет на землю? Какое время t он будет в движении?

Решение:



Перемещение мяча по вертикали $S_y = (v_0 \sin\alpha)\cdot t - gt^2/2$ — (1). Вертикальная составляющая скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ — (2). Перемещение мяча по горизонтали $S_x = (v_0 \cos\alpha)t$ — (3). В момент времени

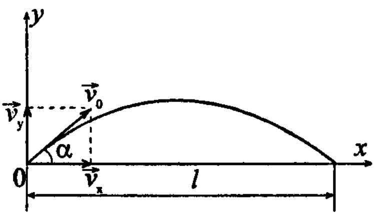
$t = t_1$ имеем $S_y = h$, $v_y = 0$, следовательно, из (2) получим $v_0 \sin\alpha = gt_1$ — (4), из (1): $h = (v_0 \sin\alpha)\cdot t_1 - gt_1^2/2$ — (5). Выразив из (4) t_1 и подставив в (5), получим: $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$;

$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{gv_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 - \sin^2\alpha}{2g}$; $h \approx 2$ м. В момент времени $t = 2t_1$ имеем $S_x = l$. Тогда $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ — (6) — полное время полета мяча; $t \approx 1{,}3$ с. Из уравнения (3) $l = (v_0 \cos\alpha)\cdot t$; $l \approx 10$ м.

1.33. На спортивных состязаниях в Ленинграде спортсмен толкнул ядро на расстояние $l_1 = 16{,}2$ м. На какое расстояние l_2 полетит такое же ядро в Ташкенте при той же начальной скорости и при том же угле наклона ее к горизонту? Ускорение свободного падения в Ленинграде $g_1 = 9{,}819$ м/с^2, в Ташкенте $g_2 = 9{,}801$ м/с^2.

Решение:

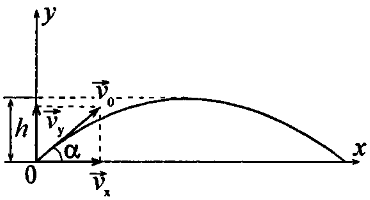
Воспользуемся формулой (6), полученной в предыдущей задаче: $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Перемещение ядра по горизонтали $s_x = l = (v_0 \cos\alpha)\cdot t$. Подставив выражение для



t, получим: $s_x = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Тогда $l_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_1}$; $l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_2}$. Отсюда отношение $\frac{l_1}{l_2} = \frac{g_2}{g_1}$, или $l_2 = \frac{l_1 g_1}{g_2} = \frac{16{,}2 \cdot 9{,}819}{9{,}801} = 16{,}23$ м.

1.34. Тело брошено со скоростью v_0 под углом к горизонту. Время полета $t = 2{,}2$ с. На какую высоту h поднимется тело?

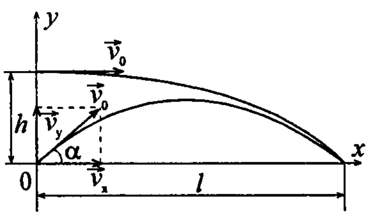
Решение:



Перемещение по вертикали $S_y = (v_0 \sin\alpha)\cdot t - \frac{gt^2}{2}$ — (1). Обозначим t_1 — время подъема тела на высоту h. Тогда из (1) получим $h = v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$. В верхней точке $v_y = 0$, но $v_y = v_0 \sin\alpha - gt_1$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$. Тогда $h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}$. Поскольку $t_1 = \frac{t}{2}$, то $h = \frac{gt^2}{8}$; $h = \frac{9{,}8 \cdot 2{,}2^2}{8} = 5{,}9$ м.

1.35. Камень, брошенный со скоростью $v_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, упал на землю на расстоянии l от места бросания. С какой высоты h надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости v_0 он упал на то же место?

Решение:



Если камень брошен под углом к горизонту, $l = v_0 \cos\alpha t_1$ — (1), где $t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (см. задачу 1.32.). Во втором случае

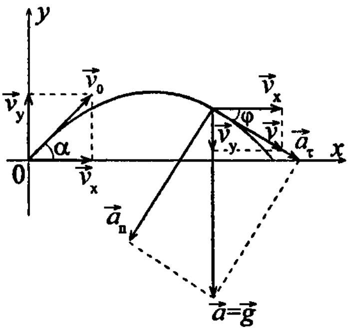
$l = v_0 t_2$. Подставив выражение для t_1 в (1), получим $l = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, откуда $t_2 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g v_0} = \dfrac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$. Высота, с которой нужно бросить камень, $h = \dfrac{g t_2^2}{2} = \dfrac{g v_0^2 \sin^2 2h}{2g^2} =$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{2g}; \; h = \frac{144 \cdot 1}{2 \cdot 9{,}8} = 7{,}3 \text{ м}.$$

1.36. Тело брошено со скоростью $v_0 = 14{,}7$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения тела через время $t = 1{,}25$ с после начала движения.

Решение:

Найдем время, за которое тело поднимется до верхней точки траектории. Вертикальная составляющая скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - g t_1$. В верхней точке $v_y = 0$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = g t_1$, откуда $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$; $t_1 = 0{,}75$ с, т.е.



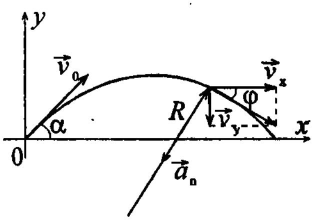
при $t = 1{,}25$ с тело находится уже на спуске; таким образом можно представить, что тело бросили горизонтально со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$, и нужно найти a_n и a_τ через время $t_2 = t - t_1 = 0{,}5$ с. Изобразим треугольник ускорений и совместим его с треугольником скоростей. Тангенциальное ускорение a_τ направлено по касательной, так же, как вектор $\vec{v}$, $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$, полное ускорение — ускорение свободного падения. Из рисунка видно, что $\cos\varphi = v_x / v = a_n / g$; $\sin\varphi = \dfrac{v_y}{v} = \dfrac{a_\tau}{g}$; отсюда $a_n = g\dfrac{v_x}{v}$;

$a_\tau = g\dfrac{v_y}{v}$. Полная скорость тела $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (gt_2)^2}$, тогда $a_n = g\dfrac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (gt_2)^2}}$;

$a_\tau = g\dfrac{gt_2}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (gt_2)^2}}$. Подставив числовые значения, получим $a_n = 9{,}15$ м/с^2; $a_\tau = 3{,}52$ м/с^2.

1.37. Тело брошено со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найти радиус кривизны R траектории тела через время $t = 1$ с после начала движения.

Решение:



Найдем время, за которое тело поднимется до верхней точки траектории. Вертикальная составляющая его скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - gt_1$. В верхней точке траектории $v_y = 0$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$, откуда $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$; $t_1 = 0{,}7$ с, т.е. при $t = 1$ с тело находится уже на спуске, таким образом можно представить, что тело бросили горизонтально со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$. Нормальное ускорение тела $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Из рисунка видно, что $a_n = g \sin\varphi$; $\sin\varphi = \dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$. Тогда $a_n = g\dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$ и

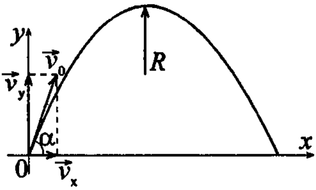
$R = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{(v_x^2 + v_y^2)\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_x g}$. Вычислим отдельно v_x и v_y:

$v_x = v_0 \cos\alpha = 5\sqrt{2}$ м/с; $v_y = g(t - t_1) = 3$ м/с. Подставив числовые значения, получим $R \approx 6{,}3$ м.

1.38. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α, если известно, что высота подъема тела $h = 3$ м и радиус кривизны траектории тела в верхней точке траектории $R = 3$ м.

Решение:

Уравнения движения тела по вертикали $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$; $s_y = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. В верхней точке траектории $v_y = 0$,

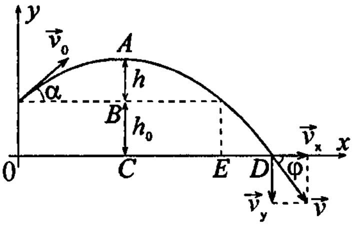


следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$, отсюда $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Высота подъема $h = s_y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ — (1). Нормальное ускорение тела в верхней точке траектории $a_n = g = \frac{v_x^2}{R}$, где $v_x = v_0 \cos\alpha$. Тогда $g = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{R}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{gR}}{\cos\alpha}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим: $h = \frac{gR \cdot \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot 2g} = tg^2\alpha \frac{R}{2}$, откуда $tg\alpha = \sqrt{\frac{2h}{R}}$; $tg\alpha = \sqrt{2}$; $\alpha \approx 60°30'$. Из уравнения (2) $v_0 = 9{,}35$ м/с.

1.39. С башни высотой $h_0 = 25$ м брошен камень со скоростью $v_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Какое время t

камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью v он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

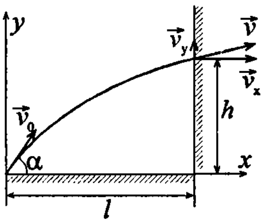
Решение:



Движение тела, брошенного с высоты h_0 под углом α к горизонту можно разложить на два этапа: движение тела до наивысшей точки А и движение тела, брошенного из точки А горизонтально со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$. Высота подъема тела $s_y = AC = h_0 + h = h_0 + \frac{\left(v_0^2 \sin^2 \alpha\right)}{2g}$. Общее время движения камня $t = t_1 + t_2$, где $t_1 = \frac{\left(v_0 \sin\alpha\right)}{g}$ — время подъема камня на высоту h и $t_2 = \sqrt{\frac{2s_y}{g}}$ — время падения камня. Подставляя данные задачи, получим $s_y = 27{,}9$ м, $t_1 = 0{,}77$ с, $t_2 = 2{,}39$ с; отсюда $t = 3{,}16$ с. Расстояние от основания башни до места падения камня на землю $l = OD = OC + CD$, где $OC = \frac{OE}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \approx 10$ м, $CD = v_x t_2 = v_0 t_2 \cos\alpha = 31{,}1$ м; отсюда $l = 41{,}1$ м. Скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0 \cos\alpha = 13$ м/с, $v_y = g t_2 = 23{,}4$ м/с; отсюда $v = 26{,}7$ м/с. Угол φ, составляемый траекторией камня с горизонтом в точке падения камня на землю, найдется из формулы $v_y = v_x tg\varphi$, откуда $tg\varphi = \frac{v_y}{v_x} = 1{,}8$ и $\varphi = 61°$.

1.40. Мяч, брошенный со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии $l = 3$ м от места бросания. Когда происходит удар мяча о стенку (при подъеме мяча или при его опускании)? На какой высоте h мяч ударит о стенку (считая от высоты, с которой брошен мяч)? Найти скорость v мяча в момент удара.

Решение:



$t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ — (1) — время подъема до верхней точки (см. задачу 1.38). Когда мяч находится в верхней точке, $s_x = (v_0 \cos\alpha)\cdot t_1$. С учетом (1) $s_x = \dfrac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$;

$s_x = \dfrac{100 \cdot 1}{2 \cdot 9{,}8} = 5{,}1$ м, следовательно, мяч ударяется в стену при подъеме. Мяч ударится о стенку, когда координата $s_y = h = (v_0 \sin\alpha)\cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$ — (2). В этот момент времени $s_x = l = (v_0 \cos\alpha)\cdot t$, откуда $t = \dfrac{l}{v_0 \cos\alpha}$ — (3). Подставив (3) в (2), получим $h = \dfrac{v_0 \sin\alpha \cdot l}{v_0 \cos\alpha} - \dfrac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} =$ $= l \cdot tg\alpha - \dfrac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$. После подстановки числовых значений $h = 2{,}1$ м. Горизонтальная составляющая скорости $v_x = v_0 \cos\alpha$; $v_x = 7{,}07$ м/с. Вертикальная составляющая скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - gt = v_0 \sin\alpha - \dfrac{gl}{v_0 \cos\alpha}$; $v_y = 2{,}91$ м/с.

Полная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; $v = \sqrt{7{,}07^2 + 2{,}91^2} = 7{,}6$ м/с.

1.41. Найти угловую скорость ω: а) суточного вращения Земли; б) часовой стрелки на часах; в) минутной стрелки на часах; г) искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите с периодом вращения $T = 88$ мин. Какова линейная скорость v движения этого искусственного спутника, если известно, что его орбита расположена на расстоянии $h = 200$ км от поверхности Земли?

Решение:

Угловая скорость $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период обращения.

а) $T = 24$ ч $= 86{,}4 \cdot 10^3$ с; $\omega = 72{,}7 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

б) $T = 12$ ч $= 43{,}2 \cdot 10^3$ с; $\omega = 145{,}4 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

в) $T = 1$ ч $=3600$ с; $\omega = 1{,}74 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

г) $T = 88$ мин $=5280$ с; $\omega = 1{,}19 \cdot 10^{-3}$ рад/с.

Линейная скорость спутника $\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right]$, в скалярном виде $v = \omega R \sin 90^o = \omega R$, где $R = R_З + h$. Здесь $R_З$ — радиус Земли. Тогда $v = \omega(R_З + h)$; $v = 7{,}83$ км/с.

1.42. Найти линейную скорость v вращения точек земной поверхности на широте Ленинграда ($\varphi = 60^o$).

Решение:

Линейная скорость $v = \omega \cdot r$ (см. задачу 1.41), где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Период вращения Земли $T = 24$ ч $= 86400$ с ; $r = R\cos\varphi$, где R — радиус Земли. Отсюда $v = \dfrac{2\pi R\cos\varphi}{T}$;

$$v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5}{86400} \approx 231 \text{ м/с}.$$

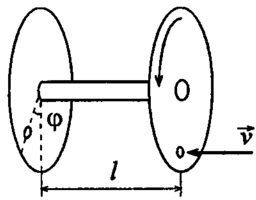
1.43. С какой линейной скоростью должен двигаться самолет на экваторе с востока на запад, чтобы пассажирам этого самолета Солнце казалось неподвижным?

Решение:

Очевидно, что самолет должен двигаться со скоростью, равной линейной скорости вращения Земли $v = \omega R = \frac{2\pi}{T} R$; где $T = 24$ ч — период вращения Земли; $R = 6378$ км — радиус Земли. Отсюда $v = 1669$ км/ч.

1.44. Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии $l = 0{,}5$ м друг от друга, вращается с частотой $n = 1600$ об/мин. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска; при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол $\varphi = 12°$. Найти скорость v пули.

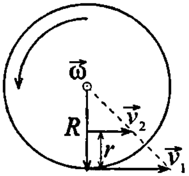
Решение:



Уравнение вращательного движения $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega} \cdot t + \frac{\vec{\beta} t^2}{2}$. Выберем $\varphi_0 = 0$. Из условия следует, что движение осуществляется с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\pi n$, следовательно, угловое ускорение равно 0, т.е. смещение $\varphi = \omega \cdot t$, откуда $t = \frac{\varphi}{\omega}$ — (1); $\omega = n \cdot 2\pi$ — (2). Скорость пули $v = \frac{l}{t}$ — (3). Подставив (2) в (1), а затем (1) в (3) получим: $v = \frac{l \cdot 2\pi n}{\varphi}$. Произведя вычисления, найдем скорость пули $v = 419$ м/с.

1.45. Найти радиус R вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость v_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости v_2 точки, лежащей на расстоянии $r = 5$ см ближе к оси колеса.

Решение:



Вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен плоскости чертежа, следовательно, в скалярном виде $v = \omega \cdot r$; $v_1 = \omega \cdot R$; $v_2 = \omega \cdot (R - r)$.

Отсюда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega \cdot R}{\omega \cdot (R - r)} = 2{,}5$; $\frac{R}{R - r} = 2{,}5$;

$1{,}5 \cdot R = 12{,}5$; $R = 8{,}3$ см.

1.46. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости $\omega = 20$ рад/с через $N = 10$ об после начала вращения. Найти угловое ускорение ε колеса.

Решение:

Уравнения движения колеса: $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$.

По условию $\omega_0 = 0$. Тогда $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$ — (1), $\omega = \varepsilon t$ — (2). Выражая из уравнения (1) ε и учитывая, что $\varphi = 2\pi N$, получим $\varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2}$ — (3). Из уравнения (2) найдем $t = \frac{\omega}{\varepsilon}$ и подставим в (3). Получим $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi N}$; $\varepsilon = 3{,}2$ рад/с^2. Поскольку $\varepsilon > 0$, то направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$ (см. рисунок к задаче 1.45).

1.47. Колесо, вращаясь равноускоренно, через время $t = 1$ мин после начала вращения приобретает частоту $n = 720$ об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

Решение:

Угловая скорость колеса $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t$. В скалярном виде при $\omega_0 = 0$ получим $\omega = \varepsilon t$, кроме того, $\omega = n \cdot 2\pi$. Отсюда $\varepsilon = \omega / t = n \cdot 2\pi / t$; $\varepsilon = 1{,}25$ рад/с^2.

1.48. Колесо, вращаясь равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшило свою частоту с $n_1 = 300$ об/мин до $n_2 = 180$ об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

Решение:

Переведем числовые данные в единицы системы СИ: $t = 1\,\text{мин} = 60\,\text{с}$; $n_1 = 300\,\text{об/мин} = 5\,\text{об/с}$; $n_2 = 180\,\text{об/мин} = 3\,\text{об/с}$. Поскольку вращение равнозамедленное, то $N = \frac{n_1 + n_2}{2} t = 240$. Угловая скорость $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$ — (1), где $\omega_0 = n_1 \cdot 2\pi$; $\omega = n_2 \cdot 2\pi$. Из (1) имеем $\varepsilon t = \omega_0 - \omega$, откуда $\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{2\pi(n_1 - n_2)}{t}$; $\varepsilon = \frac{2 \cdot 3{,}14(5-3)}{60} = 0{,}21\,\text{рад/с}^2$.

1.49. Вентилятор вращается с частотой $n = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 75$ об. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

Решение:

$n = 900\,\text{об/мин} = 15\,\text{об/с}$. Запишем уравнения движения в скалярном виде: $\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$ — (1); $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$ — (2), где $\varphi = 2\pi N$ — (3); $\omega = 0$; $\omega_0 = 2\pi n$ — (4). Тогда из (2) $t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\pi n}{\varepsilon}$ — (5). Перепишем уравнение (1) с учетом (3), (4) и (5): $2\pi N = \frac{(2\pi n)^2}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon (2\pi n)^2}{2\varepsilon^2} = \frac{(2\pi n)^2}{2\varepsilon}$; $N = \frac{2\pi n^2}{2\varepsilon} = \frac{\pi n^2}{\varepsilon}$; отсюда $\varepsilon = \frac{\pi n^2}{N}$. Подставив это уравнение в (5), получим: $t = \frac{2\pi n \cdot N}{\pi n^2} = \frac{2N}{n}$; $t = \frac{2 \cdot 75}{15} = 10\,\text{с}$.

1.50. Вал вращается с частотой $n = 180$ об/мин. С некоторого момента вал начинает вращаться равнозамедленно с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Через какое время t вал остановится? Найти число оборотов N вала до остановки.

Решение:

$n = 180$ об/мин $= 3$ об/с. Поскольку вращение равнозамедленное, то число оборотов вала до остановки $N = \frac{n}{2} \cdot t$. Угловая скорость $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$. По условию $\omega = 0$, следовательно, $\omega_0 = \varepsilon t$, кроме того, $\omega_0 = n2\pi$, тогда $\varepsilon t = n \cdot 2\pi$, откуда $t = \frac{n \cdot 2\pi}{\varepsilon} = 6{,}28$ с. $N = 9{,}4$ об/с.

1.51. Точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5$ см/с^2. Через какое время t после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет: а) равно тангенциальному; б) вдвое больше тангенциального?

Решение:

По условию вращение является равноускоренным, следовательно, $a_\tau = \frac{v}{t}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$; отсюда $t = \frac{v}{a_\tau}$, $v = \sqrt{a_n R}$. Тогда $t = \frac{\sqrt{a_n R}}{a_\tau}$. а) Если $a_n = a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2$ с; б) если $a_n = 2a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{5}} = 2.8$ с.

1.52. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки $v = 79{,}2$ см/с.

Решение:

$a_\tau = dv/dt$, по условию $a_\tau = const$, следовательно, $a_\tau = v/t$ — (1), где $v = \omega R$; $\omega = 2\pi n = 2\pi N/t$. Отсюда $t = \frac{2\pi NR}{v}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $a_\tau = \frac{v^2}{2\pi NR}$; $a_\tau = 0{,}2$ м/с.

1.53. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через время $t = 20$ с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки $v = 10$ см/с.

Решение:

Имеем $a_n = \omega^2 R$, где $\omega = \varepsilon t$; отсюда $a_n = \varepsilon^2 t^2 R$ — (1). Найдем угловое ускорение ε. При равноускоренном движении среднее число оборотов в единицу времени (по аналогии со средней скоростью при прямолинейном равноускоренном движении) $\bar{n} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N}{t_1}$, где t_1 — момент времени, соответствующий концу пятого оборота. $\bar{n} = \frac{n_0 + n}{2}$; $n_0 = 0$, следовательно, $N = \frac{n}{2} \cdot t_1$ — (2). Частота оборотов $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R}$ — (3). Выразим из (2) t_1, с учетом (3): $t_1 = \frac{4\pi NR}{v}$ — (4). Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\omega_1}{t_1}$ — (5), где $\omega_1 = v / R$ — (6). Подставив в (5) уравнения (4) и (6), получим: $\varepsilon = \dfrac{v^2}{4\pi N R^2}$. Тогда из уравнения (1)

$$a_n = \frac{v^4 t^2 R}{16\pi^2 N^2 R^3}; \quad a_n = \frac{0{,}1^4 \cdot 20^2 \cdot 0{,}1}{16 \cdot 3{,}14^2 \cdot 5^2 0{,}1^3} = 0{,}01\,\text{м/с}^2.$$

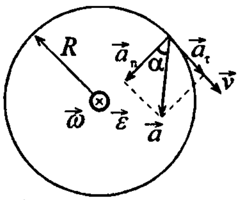
1.54. В первом приближении можно считать, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите с линейной скоростью v. Найти угловую скорость ω вращения электрона вокруг ядра и его нормальное ускорение a_n. Считать радиус орбиты $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м и линейную скорость электрона на этой орбите $v = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

Решение:

$$a_n = \frac{v^2}{r}; \quad a_n = \frac{4{,}84 \cdot 10^{12}}{0{,}5 \cdot 10^{-10}} 9{,}7 \cdot 10^{22}. \quad \omega = \frac{v}{r}; \quad \omega = \frac{2{,}2 \cdot 10^6}{0{,}5 \cdot 10^{-10}} =$$
$$= 4{,}4 \cdot 10^{16}\ \text{рад/с}.$$

1.55. Колесо радиусом $R = 10$ см вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3{,}14$ рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость v; в) тангенциальное ускорение a_τ; г) нормальное ускорение a_n; д) полное ускорение a; е) угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса.

Решение:



а) При равнопеременном вращательном движении угловая скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. По условию $\omega_0 = 0$, тогда $\omega = \varepsilon t$, при $t = 1$ с угловая скорость $\omega = 3.14$ рад/с.

б) Линейная скорость $v = \omega R$, при $t = 1$ с имеем $v = 0{,}314$ м/с.

в) Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$ постоянно во все время движения; при $t = 1$ с имеем $a_\tau = 0{,}314$ м/с^2.

г) Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$, при $t = 1$ с имеем $a_n = 0{,}986$ м/с^2.

д) Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = a_\tau \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}$; при $t = 1$ с имеем $a = 1{,}03$ м/с^2.

е) $\sin\alpha = \dfrac{a_\tau}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}}$, где α — угол между вектором полного ускорения и радиусом колеса. К концу первой секунды $\sin\alpha = \dfrac{a_\tau}{a_n} = \dfrac{0{,}314}{1{,}03} = 0{,}305$ и $\alpha = 17°46'$.

1.56. Точка движется по окружности радиусом $R = 2$ см. Зависимость пути от времени дается уравнением $s = Ct^3$, где $C = 0{,}1$ см/с^3. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки $v = 0{,}3$ м/с.

Решение:

$a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{0{,}09}{0{,}02} = 4{,}5$ м/с^2; $a_\tau = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = 6Ct$. Выразим a_n через t: $v = \dfrac{ds}{dt} = 3Ct^2$, следовательно, $a_n = \dfrac{(3Ct^2)^2}{R} = \dfrac{9C^2 t^4}{R}$. Отсюда $t^2 = \sqrt{\dfrac{a_n R}{9C^2}} = \dfrac{\sqrt{a_n R}}{3C}$; $t = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a_n R}}{3C}}$. Тогда тангенциальное ускорение $a_\tau = 6C \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{a_n R}}{3C}}$; $a_\tau = 0{,}06$ м/с^2.

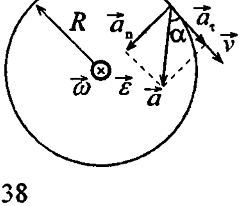
1.57. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где $B = 2$ м/с и $C = 1$ м/с^2. Найти линейную скорость v точки, ее тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения через время $t = 3$ с после начала движения, если известно, что при $t' = 2$ с нормальное ускорение точки $a'_n = 0{,}5$ м/с^2.

Решение:

Линейная скорость точки $v = \frac{ds}{dt} = -B + 2Ct$; $v = 4$ м/с. Тангенциальное ускорение $a_\tau = dv/dt = 2C = 2$ м/с^2. Нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$ — (1). Через время $t' = 2$ с точка будет иметь линейную скорость $v' = -B + 2Ct'$; $v' = 2$ м/с. Радиус окружности можно выразить следующим образом: $R = \frac{(v')^2}{a'_n}$. Тогда из (1) получим $a_n = \frac{v^2 a'_n}{(v')^2}$; $a_n = 2$ м/с^2. Полное ускорение $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 2{,}8$ м/с^2.

1.58. Найти угловое ускорение ε колеса, если известно, что через время $t = 2$ с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол $\alpha = 60°$ с вектором ее линейной скорости.

Решение:



Из рисунка видно, что $tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$ — (1). При равноускоренном вращении $a_n = \frac{v^2}{R}$; $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, но $v_0 = 0$, следовательно, $a_\tau = \frac{v}{t}$. Линейная скорость $v = \omega R$, где $\omega = \varepsilon t$, следовательно, $v = \varepsilon t R$. Тогда $a_n = \frac{\varepsilon^2 t^2 R^2}{R} = \varepsilon^2 t^2 R$; $a_\tau = \frac{\varepsilon t R}{t} = \varepsilon R$. Подставив эти выражения в (1), получим: $tg\alpha = \frac{\varepsilon^2 t^2 R}{\varepsilon R} = \varepsilon t^2$, откуда $\varepsilon = \frac{tg\alpha}{t^2}$; $\varepsilon = \frac{1,7}{4} \approx 0,43$ рад/с^2.

1.59. Колесо вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Через время $t = 0,5$ с после начала движения полное ускорение колеса $a = 13,6$ см/с^2. Найти радиус R колеса.

Решение:

Нормальное ускорение колеса $a_n = v^2 / R$ — (1). Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, но $\varepsilon = const$, следовательно, $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, откуда $\omega = \varepsilon t$. Линейная скорость точек на ободе колеса $v = \omega R = \varepsilon t R$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $a_n = \varepsilon^2 t^2 R$. Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$. Полное ускорение $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$; $a^2 = \varepsilon^4 t^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2 = \varepsilon^2 R^2 \left(\varepsilon^2 t^4 + 1\right)$. Отсюда $R = a / \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 t^4 + 1}$; $R = 0,06$ м.

1.60. Колесо радиусом $R = 0,1$ м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $B = 2$ рад/с и $C = 1$ рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через время $t = 2$ с после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость v; в) угловое ускорение ε; г) тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения.

Решение:

а) Угловая скорость вращения колеса $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2$; $\omega = 2 + 3 \cdot 4 = 14$ рад/с.

б) Линейная скорость $v = \omega R$; $v = 14 \cdot 0{,}1 = 1{,}4$ м/с.

в) Угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 6Ct$; $\varepsilon = 12$ рад/с^2.

г) Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$; $a_n = 14^2 \cdot 0{,}1 = 19{,}6$ м/с^2. Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$; $a_\tau = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$ м/с^2.

1.61. Колесо радиусом $R = 5$ см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $D = 1$ рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти изменение тангенциального ускорения Δa_τ за единицу времени.

Решение:

Изменение тангенциального ускорения связано с изменением углового ускорения следующим соотношением: $\Delta a_\tau = \Delta \varepsilon R$; где $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$. $\dfrac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2$; $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = 2C + 6Dt = \varepsilon$. Тогда $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$; $\Delta\varepsilon = (2C + 6Dt_2) - (2C + 6Dt_1) = 6D(t_2 - t_1) = 6D$, учитывая, что $t_2 - t_1 = 1$ с. Отсюда $\Delta a_\tau = 6 \cdot 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}3$ м/с^2.

1.62. Колесо радиусом $R = 5$ см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени дается уравнением $v = At + Bt^2$, где $A = 3$ см/с^2 и $B = 1$ см/с^3. Найти угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса в моменты времени t, равные: 0, 1, 2, 3, 4 и 5с после начала движения.

Решение:

Угол α можно определить следующим образом: $tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}$, где a_τ и a_n — тангенциальное и нормальное ускорения. Но $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$; следовательно, $tg\alpha = \frac{(3+2t)R}{(3t+t^2)^2}$. Подставляя в эту формулу значения $t = 0$, 1, 2, 3, 4 и 5с, получим: $t = 0$, $tg\alpha = \infty$, т.е. $\alpha = 90°$ — полное ускорение направлено по касательной. Значения при t, равном от 1 до 5с, приведены в таблице:

t, с	1	2	3	4	5
$tg\alpha$	3,13	0,7	0,278	0,14	0,081
α	72°17′	35°0′	15°32′	7°58′	4°38′

1.63. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2 и $D = 1$ рад/с^3. Найти радиус R колеса, если известно, что к концу второй секунды движения для точек, лежащих на ободе колеса, нормальное ускорение $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

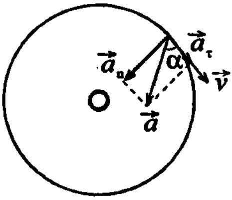
Решение:

$a_n = \omega^2 R$, где $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2$. Радиус колеса

$$R = \frac{a_n}{\omega^2} = \frac{a_n}{(B + 2Ct + 3Dt^2)^2}; \quad R = \frac{3{,}46 \cdot 10^2}{(1 + 4 + 12)^2} = 1{,}2 \text{ м.}$$

1.64. Во сколько раз нормальное ускорение a_n точки, лежащей на ободе колеса, больше ее тангенциального ускорения a_τ для того момента, когда вектор полного ускорения точки составляет угол $\alpha = 30°$ с вектором ее линейной скорости?

Решение:



Нормальное ускорение точки $a_n = a\sin\alpha$; тангенциальное ускорение $a_\tau = a\cos\alpha$, отсюда $\dfrac{a_n}{a_\tau} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \approx$ $\approx 0{,}58$.

§ 2. Динамика

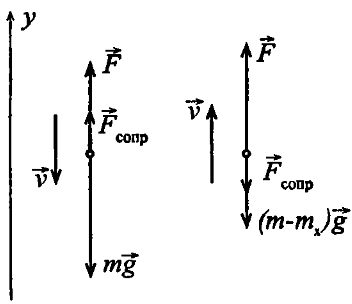
В задачах этого раздела используются данные таблиц 3 — 5 из приложения. Кроме того, следует учесть замечание к § 1.

2.1. Какой массы m_x балласт надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом $m = 1600$ кг, подъемная сила аэростата $F = 12$ кН. Считать силу сопротивления $F_{\text{сопр}}$ воздуха одной и той же при подъеме и спуске.

Решение:

По второму закону Ньютона

$$\begin{cases} \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}} = 0; \\ \vec{F} + \vec{F}_{\text{сопр}} + (m - m_x)\vec{g} = 0, \end{cases}$$



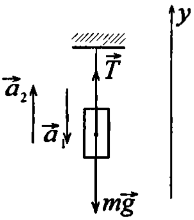
или в проекциях на ось y

$$\begin{cases} F - mg + F_{\text{сопр}} = 0; \\ F - F_{\text{сопр}} - (m - m_x)g = 0. \end{cases}$$

Здесь первое уравнение описывает опускающийся аэростат, второе — поднимающийся. Раскрыв скобки и сложив первое уравнение со вторым, получим $m_x = \frac{2(mg - F)}{g} =$ $= 2\left(m - \frac{F}{g}\right)$; $m_x = 752$ кг.

2.2. К нити подвешен груз массой $m = 1$ кг. Найти силу натяжения нити T, если нить с грузом: а) поднимать с ускорением $a = 5$ м/с^2; б) опускать с тем же ускорением $a = 5$ м/с^2.

Решение:



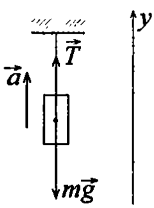
В обоих случаях, а и б, применим второй закон Ньютона.

а) $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $T-mg=ma$, отсюда $T=ma_1+mg=m(a_1+g)$; $T=14{,}8$ Н.

б) $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $-mg+T=-ma_2$, откуда $T=mg-ma_2=m(g-a_2)$; $T=4{,}8$ Н.

2.3. Стальная проволока некоторого диаметра выдерживает силу натяжения $T=4{,}4$ кН. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз массой $m=400$ кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она не разорвалась.

Решение:



По второму закону Ньютона $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $T-mg=ma$, откуда $a=\dfrac{T-mg}{m}$; $a=12$ м/с^2.

2.4. Масса лифта с пассажирами $m=800$ кг. С каким ускорением a и в каком направлении движется лифт, если известно, что сила натяжения троса, поддерживающего лифт: а) $T=12$ кН; б) $T=6$ кН.

Решение:

По второму закону Ньютона $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $T-mg=ma$ (см. рис. к задаче 2.3), откуда $a=T/m-g$. а) $a=5{,}2$ м/с^2; б) $a=-2{,}3$ м/с^2.

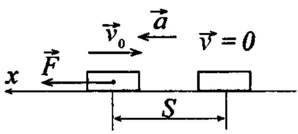
2.5. К нити подвешена гиря. Если поднимать гирю с ускорением $a_1=2$ м/с^2, то сила натяжения нити T_1 будет вдвое меньше той силы натяжения T_2, при которой нить разорвется. С каким ускорением a_2 надо поднимать гирю, чтобы нить разорвалась?

Решение:

Запишем второй закон Ньютона в скалярном виде для двух случаев: $T_1 - mg = ma_1$ — (1); $T_2 - mg = ma_2$ — (2) (см. рис. к задаче 2.3). Поскольку $T_2 = 2T_1$, то уравнение (2) можно переписать $2T_1 - mg = ma_2$, откуда $T_1 = ma_2 - ma_1 = m(a_2 - a_1)$. Подставив выражение для T_1 в (1), получим $m(a_2 - a_1) - mg = ma_1$, откуда $a_2 = 2a_1 + g$; $a_2 = 13{,}8$ м/с^2.

2.6. Автомобиль массой $m = 1020$ кг, двигаясь равнозамедленно, остановился через время $t = 5$ с, пройдя путь $s = 25$ м. Найти начальную скорость v_0 автомобиля и силу торможения F.

Решение:



По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, или в проекции на ось x: $F = ma$ — (1). Уравнения движения при равнозамедленном движении автомобиля имеют вид: $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ — (2); $v = v_0 - at$ — (3). Поскольку конечная скорость автомобиля $v = 0$, то из (3) начальная скорость автомобиля $v_0 = at$. Подставляя это выражение в (2), найдем $a = \dfrac{2S}{t^2}$ — (4). Подставив (4) в (1), получим:

$F = \dfrac{2Sm}{t^2}$; $F = 2{,}04$ кН.

2.7. Поезд массой $m = 500$ т, двигаясь равнозамедленно, в течение времени $t = 1$ мин уменьшает свою скорость от $v_1 = 40$ км/ч до $v_2 = 28$ км/ч. Найти силу торможения F.

Решение:

Запишем второй закон Ньютона в виде: $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$, откуда $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ или $m\Delta\vec{v} = \vec{F}\Delta t$. В проекции на направление движения последнее уравнение можно записать в виде $m(v_2 - v_1) = -F\Delta t$. Отсюда, при $\Delta t = t$, $F = m\frac{v_1 - v_2}{t}$. Подставляя числовые данные, получим $F = 27{,}5 \cdot 10^3$ Н.

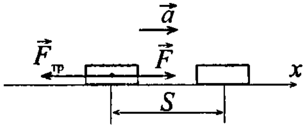
2.8. Вагон массой $m = 20$ т движется с начальной скоростью $v_0 = 54$ км/ч. Найти среднюю силу $\overline{F}$, действующую на вагон, если известно, что вагон останавливается в течение времени: а) $t = 1$ мин 40 с; б) $t = 10$ с; в) $t = 1$ с.

Решение:

Имеем $F = m\frac{v_1 - v_2}{t}$ (см. задачу 2.7). В нашем случае $v_1 = v_0$, $v_2 = 0$, т.е. $F = \frac{mv_0}{t}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $\overline{F} = 3$ кН; б) $\overline{F} = 30$ кН; в) $\overline{F} = 300$ кН.

2.9. Какую силу F надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время $t = 30$ с прошел путь $s = 11$ м? Масса вагона $m = 16$ т. Во время движения на вагон действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,05 действующей на него силы тяжести mg.

Решение:



По второму закону Ньютона $\vec{F} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$ или в проекции на ось x: $F - F_{тр} = ma$, откуда $F = ma + F_{тр}$. Поскольку движение равноускоренное и $v_0 = 0$, то путь $S = at^2/2$, откуда $a = \frac{2S}{t^2}$. По условию $F_{тр} = 0{,}05mg$, тогда $F = m \cdot \frac{2S}{t^2} + 0{,}05mg$; $F = 8{,}2$ кН.

2.10. Поезд массой $m = 500$ т после прекращения тяги паровоза под действием силы трения $F_{тр} = 98$ кН останавливается через время $t = 1$ мин. С какой скоростью v_0 шел поезд?

Решение:

Имеем $F_{тр} = \frac{mv_0}{t}$ (см. задачу 2.8), отсюда $v_0 = \frac{F_{тр} \cdot t}{m}$; $v_0 = 11{,}75$ м/с.

2.11. Вагон массой $m = 20$ т движется равнозамедленно, имея начальную скорость $v_0 = 54$ км/ч и ускорение $a = -0{,}3$ м/с^2. Какая сила торможения F действует на вагон? Через какое время t вагон остановится? Какое расстояние s вагон пройдет до остановки?

Решение:

По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, или в проекции на направление движения $-F = -ma$, откуда сила торможения по абсолютной величине равна $F = 6$ кН. Ускорение вагона $a = \frac{v - v_0}{t}$, но $v = 0$, следовательно, $a = -\frac{v_0}{t}$, откуда $t = -v_0/a$; $t = 50$ с. Пройденный путь, с учетом $a < 0$, найдем по формуле $s = vt - at^2/2$; $s = 375$ м.

2.12. Тело массой $m = 0{,}5$ кг движется прямолинейно, причем зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где $C = 5$ м/с^2 и $D = 1$ м/с^3. Найти силу F, действующую на тело в конце первой секунды движения.

Решение:

По второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = d^2s/dt^2$. $\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 2C - 6Dt = a$, отсюда $F = m \times$ $\times(2C - 6Dt)$; $F = 2$ Н.

2.13. Под действием силы $F = 10$ Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где $C = 1$ м/с^2. Найти массу m тела.

Решение:

По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ или $F = ma$, где $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. $\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 2C$, отсюда $F = m \cdot 2C$, следовательно, $m = F/2C$; $m = 5$ кг.

2.14. Тело массой $m = 0{,}5$ кг движется так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A\sin\omega \cdot t$, где $A = 5$ см и $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу F, действующую на тело через время $t = (1/6)$ с после начала движения.

Решение:

По второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. Первая производная $\frac{ds}{dt} = A\omega\cos\omega t$; вторая производная $\frac{d^2s}{dt^2} =$ $= -A\omega^2\sin\omega t = a$, отсюда $F = -mA\omega^2\sin\omega t$; $F = -0{,}125$ Н.

2.15. Молекула массой $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая по нормали к стенке сосуда со скоростью $v = 600$ м/с, ударяется о стенку и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой во время удара.

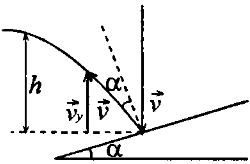
Решение:

По закону сохранения импульса $F\Delta t = (mv + 0) - (-mv + 0)$, откуда $F\Delta t = 2mv$; $F\Delta t = 5{,}6 \cdot 10^{-23}$ Н·с.

2.16. Молекула массой $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая со скоростью $v = 600$ м/с, ударяется о стенку сосуда под углом $\alpha = 60°$ к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой во время удара.

Решение:

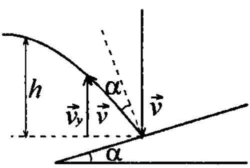
По второму закону Ньютона $F\Delta t = m\Delta v$. Считая положительным направление нормали, внешней к стенке, получим: $\Delta v = v_2 \cos\alpha - (-v_1 \cos\alpha)$; $\Delta v = v_2 \cos\alpha + v_1 \cos\alpha$. Таким образом, получим $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$; $F\Delta t = 2{,}8 \cdot 10^{-23}$ Н·с.



2.17. Шарик массой $m = 0{,}1$ кг, падая с некоторой высоты, ударяется о наклонную плоскость и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. За время удара плоскость получает импульс силы $F\Delta t = 1{,}73$ Н·с. Какое время t пройдет от момента удара шарика о плоскость до момента, когда он будет находиться в наивысшей точке траектории?

Решение:

По закону сохранения импульса $F\Delta t = m\Delta v$, где $\Delta v = v_1 \cos\alpha - (-v_2 \cos\alpha)$; $\Delta v = \cos\alpha(v_1 + v_2)$; $v_1 = v_2 = v$, отсюда $\Delta v = 2v\cos\alpha$. Тогда $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$ — (1). Из рисунка видно, что $v_y = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - gt =$



$= v\cos 2\alpha - gt$; $v_y = 0$ в верхней точке, следовательно, $v\cos 2\alpha = gt$, откуда $t = v\cos 2\alpha / g$. Из (2) найдем $v = \dfrac{F\Delta t}{2m\cos\alpha}$, тогда $t = \dfrac{F\Delta t\cos 2\alpha}{2mg\cos\alpha}$; $t = 0{,}51$ с.

2.18. Струя воды сечением $S = 6\,\text{см}^2$ ударяется о стенку под углом $\alpha = 60°$ к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти силу F, действующую на стенку, если известно, что скорость течения воды в струе $v = 12$ м/с.

Решение:

(См. рис. к задаче 2.16) За время Δt о стенку ударяется масса воды $m = lS\rho = Sv\Delta t\rho$ — (1), где S — поперечное сечение струи, ρ — плотность воды. По закону сохранения импульса $F\Delta t = m\Delta v$, откуда $F = \dfrac{m\Delta v}{\Delta t}$ — (2). Имеем $\Delta v = v_1\cos\alpha - (-v_2\cos\alpha) = \cos\alpha(v_1 + v_2)$ (см. задачу 2.16). По условию $v_1 = v_2 = v$, отсюда $\Delta v = 2v\cos\alpha$ — (3). Подставляя (1) и (3) в (2), получим $F = \dfrac{Sv\Delta t\rho \cdot 2v\cos\alpha}{\Delta t} = 2Sv^2\rho\cos\alpha$; $F = 86\,\text{Н}$.

2.19. Трамвай, трогаясь с места, движется с ускорением $a = 0{,}5\,\text{м/с}^2$. Через время $t = 12\,\text{с}$ после начала движения мотор выключается и трамвай движется до остановки равнозамедленно. Коэффициент трения на всем пути $k = 0{,}01$. Найти наибольшую скорость v и время t движения трамвая. Каково его ускорение a при его равнозамедленном движении? Какое расстояние s пройдет трамвай за время движения?

Решение:

Очевидно, что наибольшей скорости трамвай достигнет в момент времени $t_1 = 12\,\text{с}$, его скорость: $v = at$; $v = 0{,}5 \cdot 12 = 6$ м/с. Пройденный путь при равноускоренном движении: $s_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$ — (1), а при равнозамедленном $s_2 = vt_2 - \frac{a_2 t_2^2}{2}$ — (2). Согласно второму закону Ньютона $-F_{тр} = kmg = ma_2$; $a_2 = \frac{-kmg}{m} = kg$; $a_2 = -0{,}098$ м/с^2. На втором участке пути: $v = -a_2 t_2$, отсюда $t_2 = \frac{-v}{a_2}$; $t_2 = 61{,}2$ с. Тогда время движения $t = t_1 + t_2$; $t = 73{,}2$ с. Из уравнения (1) $s_1 = 36$ м. Из уравнения (2) $s_2 = 183{,}7$ м. Весь путь $s = s_1 + s_2$; $s = 219{,}7$ м.

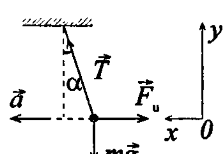
2.20. На автомобиль массой $m = 1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силе тяжести mg. Какова должна быть сила тяги F, развиваемая мотором автомобиля, чтобы автомобиль двигался: а) равномерно; б) с ускорением $a = 2$ м/с?

Решение:

а) Движение равномерное $a = 0$, следовательно уравнение движения в соответствии со вторым законом Ньютона: $F - F_{тр} = 0$, отсюда $F - F_{тр} = 0{,}1mg$; $F = 980$ Н. б) По второму закону Ньютона: $F - F_{тр} = ma$, отсюда $F = ma + F_{тр} = m \cdot (a + 0{,}1g)$; $F = 2{,}98$ кН.

2.21. Какой угол α с горизонтом составляет поверхность бензина в баке автомобиля, движущегося горизонтально с ускорением $a = 2{,}44$ м/с^2?

Решение:

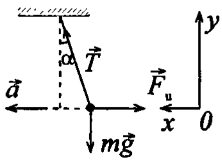


В неинерциальных системах отсчета (НИСО) второй закон Ньютона не выполняется. Запишем уравнение движения бензина в баке в НИСО

$0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_i$, где $F_i = -ma$. В проекции на ось x: $0 = N\sin\alpha - ma$. В проекции на ось y: $0 = mg - N\cos\alpha$, отсюда $mg = N\cos\alpha$; $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$; $\dfrac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha} = ma$, следовательно, $a = g \cdot tg\alpha$; $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$; $\alpha = arctg\dfrac{2{,}44}{9{,}8} \approx 14°$.

2.22. Шар на нити подвешен к потолку трамвайного вагона. Вагон тормозится, и его скорость за время $t = 3$ с равномерно уменьшается от $v_1 = 18$ км/ч до $v_2 = 6$ км/ч. На какой угол отклонится при этом нить с шаром?

Решение:



Рассмотрим положение шара относительно системы отсчета, связанной с потолком вагона. Поскольку вагон движется с ускорением, то система является неинерциальной. Уравнение движения в векторной форме: $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_и = 0$ — (1), где $F_и = -ma$, тогда уравнение (1) в проекциях на ось x: $T\sin\alpha = ma$ — (2) и на ось y: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (3). Разделив (2) на (3), получим $tg\alpha = \dfrac{a}{g}$, откуда $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$ или, учитывая, что $a = \dfrac{\Delta v}{t}$, $\alpha = arctg(\Delta v / gt)$. Подставляя числовые данные, получим $\alpha = 6°30'$.

2.23. Вагон тормозится, и его скорость за время $t = 3{,}3$ с равномерно уменьшается от $v_1 = 47{,}5$ км/ч до $v_2 = 30$ км/ч. Каким должен быть предельный коэффициент трения k между чемоданом и полкой, чтобы чемодан при торможении начал скользить по полке?

Решение:

Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета. Уравнение движения $0=\vec{F}_{тр}+\vec{F}_i$ или в проекции на ось x: $0=F_{тр}-ma$, где $a=(v_1-v_2)/t$; $F_{тр}=kmg$. Тогда $kmg=\frac{m(v_1-v_2)}{t}$; $k=\frac{v_1-v_2}{gt}$. Подставляя числовые данные, получим: $k=0{,}15$. Т.е. при $k\le 0{,}15$ чемодан начнет скользить по полке.

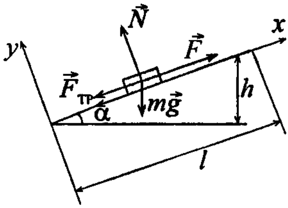
2.24. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола, и начинает скользить тогда, когда длина свешивающийся части составляет 1/4 его длины. Найти коэффициент трения k каната о стол.

Решение:

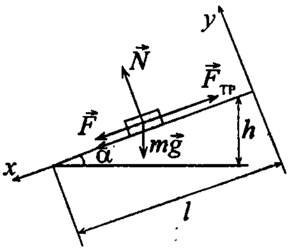
Обозначим силу тяжести, действующую на единицу длины каната, через $m_l g$. Тогда сила тяжести свешивающейся части каната равна $\frac{m_l g}{4}$. Эта сила тяжести уравновешивается силой трения $F_{тр}$, действующей на ту часть каната, которая лежит на столе: $F_{тр}=\frac{3km_l gl}{4}$. Таким образом, $\frac{m_l gl}{4}=\frac{3km_l gl}{4}$, откуда $k=0{,}33$.

2.25. На автомобиль массой $m=1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силы тяжести mg. Найти силу тяги F, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью: а) в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути; б) под гору с тем же уклоном.

Решение:



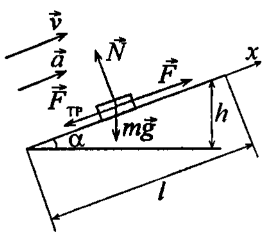
Уравнение движения автомобиля в векторной форме $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}$; $v = const$, следовательно $a = 0$. а) В проекции на ось x: $0 = -mg\sin\alpha - F_{тр} + F$, на ось y:



$0 = N - mg\cos\alpha$, где $\sin\alpha = \frac{h}{l} = 0{,}04$, $\cos\alpha = 0{,}999$, откуда $N = mg\cos\alpha$. $F_{тр} = kN = kmg \times \cos\alpha$; $F = mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha$; $F = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)$ или $F = 1{,}37$ кН. б) В проекции на ось x: $0 = F + mg\sin\alpha - F_{тр}$, на ось y: $N = mg\cos\alpha$. $F = F_{тр} - mg\sin\alpha$; $F = kmg\cos\alpha - mg \times \sin\alpha$; $F = mg(k\cos\alpha - \sin\alpha)$. $F = 590$ Н.

2.26. На автомобиль массой $m = 1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силе тяжести mg. Какова должна быть сила тяги F, развиваемая мотором автомобиля, если автомобиль движется с ускорением $a = 1$ м/с^2 в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути.

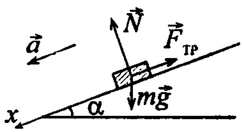
Решение:



Зададим направление оси x вдоль наклонной плоскости и запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось: $F - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$ — (1), где $\sin\alpha = h/l$ — (2). Из уравнения (1) $F = ma + mg \times \sin\alpha + F_{тр}$ или, с учетом уравнения (2), сила тяги, развиваемая мотором автомобиля равна $F = m\left(a + \frac{hg}{l} + 0{,}1g\right)$; $F = 2{,}37$ кН.

2.27. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 4°$. При каком предельном коэффициенте трения k тело начнет скользить по наклонной плоскости? С каким ускорением a будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения $k = 0{,}03$? Какое время t потребуется для прохождения при этих условиях пути $s = 100$ м? Какую скорость v будет иметь тело в конце пути?

Решение:



Для покоящегося тела по второму закону Ньютона в проекции на ось x имеем $mg\sin\alpha - F_{тр} = 0$, где $F_{Tm} \geq kmg$. Отсюда $mg\sin\alpha = kmg$; $k = \sin\alpha$; $k \leq 0{,}07$. При равноускоренном движении по второму закону Ньютона: $mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$ или $\sin\alpha - kmg = ma$, откуда $a = g(\sin\alpha - k)$; $a = 0{,}39$ м/с^2. Пройденный путь $s = \frac{at^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$; $t = 22{,}6$ с. Скорость $v = at$; $v = 8{,}8$ м/с.

2.28. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Пройдя путь $s = 36{,}4$ см, тело приобретает скорость $v = 2$ м/с. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

Решение:

См. рисунок к задаче 2.27. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось x: $mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$, или

$$mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha = ma, \text{ откуда } k = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} \quad — (1).$$

Скорость $v = at$, откуда $t = \frac{v}{a}$ — (2). Пройденный путь $s = \frac{at^2}{2}$, с учетом (2) $s = \frac{av^2}{2a^2} = \frac{v^2}{2a}$, откуда $a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$ — (3).

Подставив (3) в (1) получим $k = \frac{g\,sin\alpha - v^2/2s}{g\,cos\alpha}$;

$k = \frac{2gs \cdot sin\alpha - v^2}{2gs}$; $k = tg\alpha - \frac{v^2}{2gs \cdot cos\alpha}$; $k = 0{,}2$.

2.29. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Зависимость пройденного пути s от времени t дается уравнением $s = Ct^2$, где $C = 1{,}73$ м/с^2. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

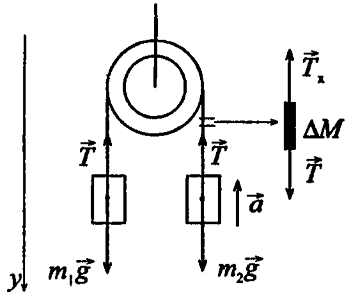
Решение:

См. рисунок к задаче 2.27. Ускорение можно найти как вторую производную пути по времени. $a = \frac{d^2 s}{dt^2} = 3{,}46$. По второму закону Ньютона $mg\,sin\alpha - F_{тр} = ma$. Поскольку $F_{тр} = kmg\,cos\alpha$, то $mg\,sin\alpha - kmg\,cos\alpha = ma$, откуда $k = \frac{mg\,sin\alpha - ma}{mg\,cos\alpha}$; $k = \frac{g\,sin\alpha - a}{g\,cos\alpha}$; $k = 0{,}5$.

2.30. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Решение:

Предположим, что нить невесома и нерастяжима. Выберем элемент нити Δm и запишем уравнение движения в проекции на ось y: $\Delta m a = T - T_x$. Поскольку $\Delta m = 0$, то $T = T_x$, т. е. сила натяжения нити во всех точках ее одинакова. Ускорения движения грузов тоже одинаковы, т. к. из-за нерастяжимости нити за одно и то же время грузы проходят один путь, т. е. $S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$; $S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$; $S_1 = S_2$, следовательно, $a_1 = a_2$. Но направление векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ противоположны. Запишем второй закон Ньютона для первой и второй гири в проекциях на ось y:



$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a & —(1); \\ m_2 g - T = -m_2 a & —(2). \end{cases}$$

Вычтем (2) из (1):

$a(m_1 + m_2) = g(m_1 - m_2)$, отсюда $a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$ — (3).

Подставим (3) в (1) $\frac{m_1 g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = m_1 g - T$, следовательно,

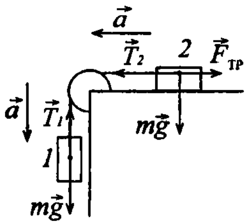
$T = m_1 g \cdot \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$; $\quad T = m_1 g \cdot \left(\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right)$;

$T = m_1 g \cdot \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2g m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Подставляя числовые данные, получим: $T = 13$ Н; $a = 3{,}27$ м/с^2.

2.31. Невесомый блок укреплен на конце стола. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири 2 о стол $k = 0{,}1$. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Решение:

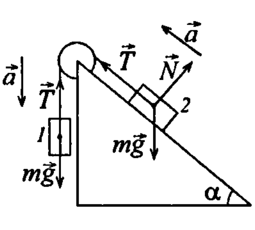
Запишем второй закон Ньютона для обоих тел в проекциях на направление их движения: $mg - T_1 = m_1 a$ — (1);



$T_2 - F_{тр} = m_2 a$ — (2). Имеем $T_1 = T_2 = T$ (см. задачу 2.30). Сложив (1) и (2), с учетом того, что $F_{тр} = km_2 g$, получим $m_1 g - kmg = a(m_1 + m_2)$, откуда найдем $a = g\dfrac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}$ — (3); $a = 4{,}4$ м/с^2. Подставим (3) в (1) и выразим T: $T = m_1(g - a)$; $T = m_1\left(g - g\dfrac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g \times \left(1 - \dfrac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g\left(\dfrac{m_1 + m_2 - m_1 + km_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g \times \dfrac{m_2(1+k)}{m_1 + m_2}$; $T = g\dfrac{m_1 m_2(1+k)}{m_1 + m_2}$. Подставив числовые данные, получим: $T_1 = T_2 = \dfrac{m_1 m_2 (1+k) g}{m_1 + m_2} = 5{,}4$ Н.

2.32. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гири о наклонную плоскость и трением в блоке пренебречь.

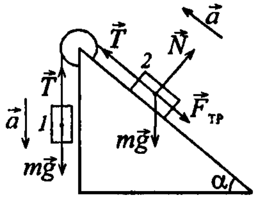
Решение:



Пусть $m_1 = m_2 = m$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для первой и второй гири в проекциях на направление их движения с учетом $T_1 = T_2 = T$ (см. задачу 2.30): $\begin{cases} mg - T = ma & —(1); \\ T - mg\sin\alpha = ma & —(2). \end{cases}$ Из (1) имеем: $T = m(g-a)$ — (3). Подставив (3) в (2), получим: $g(1-\sin\alpha) = 2a$, откуда $a = g(1-\sin\alpha)/2$. Подставив числовые значения, получим: $a = 2{,}45$ м/с^2 и $T = 7{,}35$ Н.

2.33. Решить предыдущую задачу при условии, что коэффициент трения гири 2 о наклонную плоскость $k = 0{,}1$.

Решение:



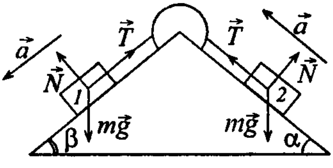
Пусть при данном значении k тело скользит. Уравнение второго закона Ньютона для первой гири останется неизменным, а в уравнении для второй появится сила трения: $F_{Тm} = kmg\cos\alpha$;

$$\begin{cases} mg - T = ma & —(1); \\ T - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma & —(2). \end{cases}$$

Выразим из (1) T: $T = mg - ma$ — (3). Подставив (3) в (2), найдем a: $mg - ma - mg(\sin\alpha + k\cos\alpha) = ma$; $g(1-\sin\alpha - k\cos\alpha) = 2a$; $a = g(1-\sin\alpha - k\cos\alpha)/2$. Из (3) $T = m(g-a)$. Подставив числовые значения, получим: $a = 2{,}02$ м/с^2; $T = 1(9{,}8 - 2{,}02) = 7{,}78$ Н.

2.34. Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гирь 1 и 2 о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

Решение:



Пусть $m_1 = m_2 = m$. Тогда по второму закону Ньютона в проекциях на направления движения гирь имеем:

$$\begin{cases} mg\sin\beta - T = ma & —(1); \\ T - mg\sin\alpha = ma & —(2). \end{cases}$$ Сложив (1) и (2), получим:

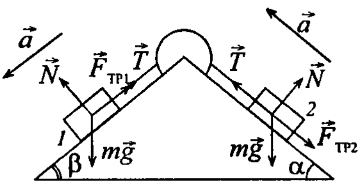
$mg(\sin\beta - \sin\alpha) = 2ma$, откуда $a = \frac{g(\sin\beta - \sin\alpha)}{2}$. Из (2):

$T = ma + mg\sin\alpha$; $\qquad T = \frac{mg(\sin\beta - \sin\alpha)}{2} + mg\sin\alpha$;

$T = mg\frac{(\sin\beta + \sin\alpha)}{2}$. Подставив числовые значения, получим: $a = 1{,}03$ м/с^2 и $T = 5{,}9$ Н.

2.35. Решить предыдущую задачу при условии, что коэффициенты трения гирь 1 и 2 о наклонные плоскости $k_1 = k_2 = 0{,}1$. Показать, что из формул, дающих решение этой задачи, можно получить, как частные случаи, решения задач 2.30 — 2.34.

Решение:



Пусть при данном значении k гири скользят. С учетом силы трения уравнение второго закона Ньютона в проекциях на направление их движения запишется в виде:

$$\begin{cases} m_1 g\sin\beta - T_1 - F_{тр} = m_1 a, \\ T_2 - m_2 g\sin\alpha - F_{тр} = m_2 a; \end{cases}$$

или $$\begin{cases} m_1 g\sin\beta - T_1 - km_1 g\cos\beta = m_1 a & —(1), \\ T_2 - m_2 g\sin\alpha - km_2 g\cos\alpha = m_2 a & —(2). \end{cases}$$ Так как

$T_1 = T_2$, то сложив (1) и (2) получим:

$m_1 g\sin\beta - m_2 g\sin\alpha - km_1 g\cos\beta - km_2 g\cos\alpha = a(m_1 + m_2)$;

$m_1 g(\sin\beta - k\cos\alpha) - m_2 g(\sin\beta + k\cos\alpha) = a(m_1 + m_2)$,

откуда $a = g\frac{m_1(\sin\beta - k\cos\beta) - m_2(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + m_2}$ — (3).

Из (2) найдем: $T_2 = m_2 a + m_2 g\sin\alpha + km_2 g\cos\alpha$, подставив

в это выражение (3), получим: $T_2 = m_2 g \times$
$$\times\frac{m_1(\sin\beta - k\cos\beta) - m_2(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + m_2} + m_2 g(\sin\alpha\cos\alpha);$$
$$T_2 = m_2 g\frac{m_1(\sin\beta - k\cos\beta) - (\sin\alpha + k\cos\alpha)(m_2 - m_1 - m_2)}{m_1 + m_2};$$
$$T_2 = gm_1m_2\frac{\sin\beta - k\cos\beta + \sin\alpha + k\cos\alpha}{m_1 + m_2};$$
$$T_2 = gm_1m_2\frac{\sin\alpha + \sin\beta + k(\cos\alpha - \cos\beta)}{m_1 + m_2};$$
$$T_2 = \frac{m_1m_2(\sin\alpha + \sin\beta + k(\cos\alpha - \cos\beta))}{m_1 + m_2}g.$$
Подставляя числовые данные, получим: $T_1 = T_2 = 6$ Н. $a = 0{,}244$ м/с^2.

2.36. При подъеме груза массой $m = 2$ кг на высоту $h = 1$ м сила F совершает работу $A = 78{,}5$ Дж. С каким ускорением a поднимается груз?

Решение:

По второму закону Ньютона в проекции на направление движения груза имеем $ma = F - mg$, откуда $F = ma + mg$. По условию работу A совершает сила F, следовательно, $A = Fh\cos 0 = Fh = mah + mgh$ — (1), т.е. работа A идет на увеличение потенциальной энергии груза и на сообщение ему ускорения. Из уравнения (1) найдем $a = \frac{A - mgh}{hm}$; $a = 29{,}4$ м/с^2.

2.37. Самолет поднимается и на высоте $h = 5$ км достигает скорости $v = 360$ км/ч. Во сколько раз работа A_1, совершаемая при подъеме против силы тяжести, больше работы A_2, идущей на увеличение скорости самолета?

Решение:

Работа A_1 идет на увеличение потенциальной энергии самолета, а работа A_2 — на увеличение его кинетической энергии. Тогда при $A_1 = mgh$ и $A_2 = mv^2/2$ получим: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2mgh}{mv^2} = \frac{2gh}{v^2}$; $\frac{A_1}{A_2} = 9{,}8$.

2.38. Какую работу A надо совершить, чтобы заставить движущееся тело массой $m = 2$ кг: а) увеличить скорость с $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 5$ м/с; б) остановиться при начальной скорости $v_0 = 8$ м/с?

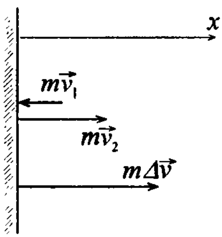
Решение:

Совершенная работа пойдет на приращение кинетической энергии: а) $A_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$; $A_1 = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$; $A_1 = 21$ Дж.

б) $A_2 = W_{к2} - W_{к1}$. Т.к. $W_{к2} = 0$, то $A_2 = -W_{к1} = -mv_0^2/2$; $A_2 = -64$ Дж. Знак «–» говорит о том, что работа совершается силой трения.

2.39. Мяч, летящий со скоростью $v_1 = 15$ м/с, отбрасывается ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью $v_2 = 20$ м/с. Найти изменение импульса $m\Delta v$ мяча, если известно, что изменение его кинетической энергии $\Delta W = 8{,}75$ Дж.

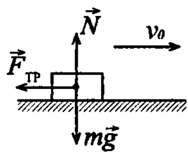
Решение:



Изменение кинетической энергии мяча: $\Delta W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$. Отсюда $m = \frac{2\Delta W}{v_2^2 - v_1^2}$ — (1). Изменение импульса в проекции на ось x: $m\Delta v = m(v_2 - (-v_1)) = m(v_2 + v_1)$. С учетом (1): $m\Delta v = \dfrac{2\Delta W(v_1 + v_2)}{v_2^2 - v_1^2} = \dfrac{2\Delta W}{v_2 - v_1}$. Подставив числовые данные, получим: $m\Delta v = 3{,}5$ кг·м/с.

2.40. Камень, пущенный по поверхности льда со скоростью $v = 3$ м/с, прошел до остановки расстояние $s = 20{,}4$ м. Найти коэффициент трения k камня о лед.

Решение:



Работа силы трения при скольжении камня по льду равна $A = F_{тр} s \cos\alpha$, где $F_{тр} = kmg$, $\cos\alpha = \cos 180° = -1$, т.е. $A = -kmgs$ — (1). С другой стороны, работа силы трения равна приращению кинетической энергии камня $A = W_2 - W_1$, поскольку $W_2 = 0$, то $A = -W_1 = -\dfrac{mv^2}{2}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $k = \dfrac{v^2}{2gs}$; $k = 0{,}02$.

2.41. Вагон массой $m = 20$ т, двигаясь равнозамедленно с начальной скоростью $v_0 = 54$ км/ч, под действием силы трения $F_{тр} = 6$ кН через некоторое время останавливается. Найти работу A сил трения и расстояние s, которое вагон пройдет до остановки.

Решение:

Работа силы трения $A = -\dfrac{mv_0^2}{2}$ (см. задачу 2.40). Подставляя числовые данные, получим $A = -2{,}25$ МДж. По второму закону Ньютона: $F_{тр} = ma$, откуда $a = \dfrac{F_{тр}}{m}$ — (1). При равнозамедленном движении путь, пройденный до остановки: $s = \frac{at^2}{2}$, где $t = \frac{v_0}{a}$, тогда $s = \frac{v_0^2}{2a}$ — (2).

Подставляя уравнение (1) в (2), получим $s = \frac{v_0^2 m}{2 \cdot F_{тр}}$; $s = 375$ м.

2.42. Шофер автомобиля, имеющего массу $m = 1$ т, начинает тормозить на расстоянии $s = 25$ м от препятствия на дороге. Сила трения в тормозных колодках автомобиля $F_{тр} = 3{,}84$ кН. При какой предельной скорости v движения автомобиль успеет остановиться перед препятствием? Трением колес о дорогу пренебречь.

Решение:

Задача аналогична 2.41. Воспользуемся полученной в предыдущей задаче формулой: $s = \frac{v_0^2 m}{2 \cdot F_{тр}}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2sF_{тр}}{m}}$. Подставив числовые значения, получим: $v = 13{,}9$ м/с; $v = 50$ км/ч.

2.43. Трамвай движется с ускорением $a = 49{,}0$ см/с. Найти коэффициент трения k, если известно, что 50% мощности мотора идет на преодоление силы трения и 50% — на увеличение скорости движения.

Решение:

Мощность мотора $N = F \cdot v$. По условию половина мощности идет на преодоление силы трения, т.е. $\frac{N}{2} = kmg \cdot v$, а вторая половина — на увеличение скорости движения, т.е. $\frac{N}{2} = ma \cdot v$. Отсюда $kmg \cdot v = ma \cdot v$, следовательно, $k = a / g$; $k \approx 0{,}05$.

2.44. Найти работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела массой $m = 1$ т от $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 6$ м/с на пути $s = 10$ м. На всем пути действует сила трения $F_{тр} = 2$ Н.

Решение:

Часть совершенной работы пойдет на приращение кинетической энергии, а другая часть — на преодоление силы трения. $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + A_{тр}$, где $A_{тр} = F_{тр} \cdot s$, тогда $A = \frac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2} + F_{тр} \cdot s$; $A = 16{,}02$ кДж.

2.45. На автомобиль массой $M = 1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силе тяжести mg. Какую массу m бензина расходует двигатель автомобиля на то, чтобы на пути $s = 0{,}5$ км увеличить скорость от $v_1 = 10$ км/ч до $v_2 = 40$ км/ч? К.п.д. двигателя $\eta = 0{,}2$, удельная теплота сгорания бензина $q = 46$ МДж/кг.

Решение:

Полезная работа, совершаемая двигателем, идет на преодоление силы трения и на приращение кинетической энергии. $A_п = F_{тр} \cdot s + \left(\frac{Mv_2^2}{2} - \frac{Mv_1^2}{2}\right)$ — (1). Затраченная работа равна затраченному количеству теплоты: $A_з = Q_з$; $Q_з = Q \cdot m$ — (2); К.п.д. двигателя $\eta = \frac{A_п}{A_з}$, откуда $A_з = \frac{A_п}{\eta}$ — (3). Подставив (3) в (2), получим: $\frac{A_п}{\eta} = q \cdot m$, отсюда $m = \frac{A_п}{q \cdot \eta}$. Подставив в данное выражение (1), получим $m=\frac{1}{q\eta}\left[F_{тр}\cdot s+\left(\frac{Mv_2^2}{2}-\frac{Mv_1^2}{2}\right)\right]$. Т.к. $F_{тр}=0{,}1mg$, то $m=\frac{M}{2q\eta}\left[2\cdot 0{,}1g\cdot s+v_2^2-v_1^2\right]$. Подставляя числовые данные, получим: $m=0{,}06$ кг.

2.46. Какую массу m бензина расходует двигатель автомобиля на пути $s=100$ км, если при мощности двигателя $N=11$ кВт скорость его движения $v=30$ км/ч? К.п.д. двигателя $\eta=0{,}22$, удельная теплота сгорания бензина $q=46$ МДж/кг.

Решение:

При перемещении автомобиля на расстояние s его двигатель совершает работу $A=\frac{Nt}{\eta}=\frac{Ns}{\eta v}$. При этом затрачивается масса бензина $m=\frac{A}{q}=\frac{Ns}{q\eta v}$; $m=13$ кг.

2.47. Найти к.п.д. η двигателя автомобиля, если известно, что при скорости движения $v=40$ км/ч двигатель потребляет объем $V=13{,}5$ л бензина на пути $s=100$ км и развивает мощность $N=12$ кВт. Плотность бензина $\rho=0{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплота сгорания бензина $q=46$ МДж/кг.

Решение:

К.п.д двигателя равен $\eta=\frac{A_п}{A_з}$ — (1). Мощность двигателя $N=\frac{A_п}{t}$, где $t=\frac{s}{v}$, тогда $A_п=\frac{Ns}{v}$ — (2); $A_з=qm$, где $m=\rho V$, отсюда $A_з=q\rho V$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим: $\eta=\frac{Ns}{vq\rho V}$; $\eta=0{,}22$.

2.48. Камень массой $m = 1$ кг брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 9{,}8$ м/с. Построить график зависимости от времени t кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергий камня для интервала $0 \le t \le 2$ с (см. решение 1.11).

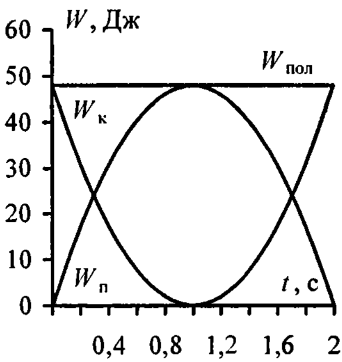
Решение:

$$W_к = \frac{mv^2}{2}; \qquad W_п = mgh; \qquad v = v_0 - gt; \qquad h = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t;$$

$$W_к = \frac{m(v_0 - gt)^2}{2}; \quad W_п = mg\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right); \quad W_к = \frac{(9{,}8 - 9{,}8t)^2}{2};$$

$W = W_к + W_п = const$; $W_п = 9{,}8\left(9{,}8t - 4{,}9t^2\right) = 96t - 48t^2$. Характер зависимости кинетической, потенциальной и полной энергии камня от времени дан на графике.

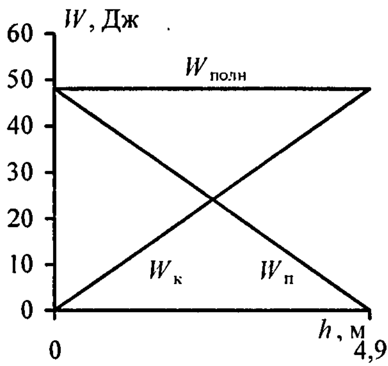
t, с	$W_к$, Дж	$W_п$, Дж
0	48	0
0,2	30,7	17,3
0,4	17,3	30,7
0,6	7,7	40,3
0,8	1,9	46,1
1	0	48
1,2	1,9	46,1
1,4	7,7	40,3
1,6	17,3	30,7
1,8	30,7	17,3
2	48	0



2.49. В условиях предыдущей задачи построить график зависимости от расстояния h кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергий камня.

Решение:

Кинетическая энергия, которой обладал камень в момент броска, будет в дальнейшем убывать за счет увеличения потенциальной энергии. $W_к = \frac{mv_0^2}{2} - mgh$; $W_п = mgh$. Для построения графика подставим числовые данные: $W_п = 9{,}8h$. Максимальную высоту, на которую поднимется камень, найдем из соотношения: $\frac{mv^2}{2} = mgh$, отсюда $h = \frac{v^2}{2g}$; $h = 4{,}9$ м. Построим график при $0 \le h \le 4{,}9$.



h, м	$W_к$, Дж	$W_п$, Дж
0	48	0
2,7	21,6	26,4
4,9	0	48

2.50. Камень падает с некоторой высоты в течение времени $t = 1{,}43$ с. Найти кинетическую $W_к$ и потенциальную $W_п$ энергии камня в средней точке пути. Масса камня $m = 2$ кг.

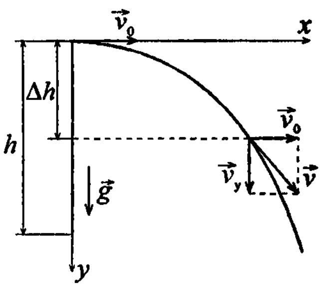
Решение:

В верхней точке камень обладал потенциальной энергией $W_п = mgH$, где $H = \frac{gt^2}{2}$ (t — время падения до земли). Потенциальная энергия камня в средней точке пути $W_п = mgh$, где $h = \frac{H}{2}$. Таким образом $W_п = mg\frac{H}{2} = \frac{mg^2t^2}{4}$;

$W_п = 98$ Дж. Кинетическую энергию камень приобрел за счет убыли потенциальной энергии. В средней точке пути $W_к = W_п = 98$ Дж, так как $mgH - mgh = mg\frac{H}{2} = W_к$.

2.51. С башни высотой $h = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Найти кинетическую $W_к$ и потенциальную $W_п$ энергии камня через время $t = 1$ с после начала движения. Масса камня $m = 0{,}2$ кг.

Решение:

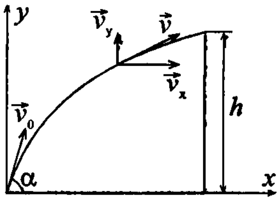


В момент времени t кинетическая энергия камня $W_к = \frac{mv^2}{2}$, а его потенциальная энергия $W_п = mg(h - \Delta h)$. Поскольку $v_y = gt$, то $v^2 = v_0^2 + (gt)^2$. Тогда $W_к = \frac{m\left(v_0^2 + (gt)^2\right)}{2}$; $W_к = 32{,}2$ Дж. Вертикальная составляющая перемещения камня $\Delta h = \frac{gt^2}{2}$, отсюда $W_п = mg\left(h - \frac{gt^2}{2}\right)$; $W_п = 39{,}4$ Дж.

2.52. Камень брошен со скоростью $v_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Найти кинетическую $W_к$, потенциальную $W_п$ и полную W энергии камня: а) через время $t = 1$ с после начала движения; б) в высшей точке траектории. Масса камня $m = 0{,}2$ кг.

Решение:

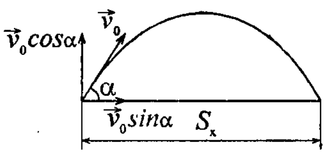
Полная скорость камня $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0 \cos\alpha$; $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$. В верхней точке траектории $v_y = 0$,



следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt$. Отсюда время подъема камня до верхней точки $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$; $t = 1{,}3$ с, следовательно в момент времени $t = 1$ с камень находится на подъеме. Его кинетическая энергия в этот момент $W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2\right)}{2}$; $W_к = 6{,}6$ Дж. По закону сохранения энергии $W_{к0} = W_к + W_п$, где $W_{к0}$ — кинетическая энергия камня в начальный момент времени. $W_{к0} = \frac{mv_0^2}{2}$. Тогда $W_п = \frac{mv_0^2}{2} - W_к$; $W_п = 15{,}9$ Дж. В верхней точке траектории кинетическая энергия камня $W_{к1} = \frac{m(v_0 \cos\alpha)^2}{2}$; $W_{к1} = 5{,}6$ Дж. Согласно закону сохранения энергии полная энергия камня останется неизменной, а его потенциальная энергия в верхней точке траектории $W_{п1} = W - W_{к1}$; $W_{п1} = 16{,}9$ Дж.

2.53. На толкание ядра, брошенного под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, затрачена работа $A = 216$ Дж. Через какое время t и на каком расстоянии s_x от места бросания ядро упадет на землю? Масса ядра $m = 2$ кг.

Решение:



Работа, затраченная на толкание ядра, пошла на сообщение ему кинетической энергии. $A = W_к = \frac{mv_0^2}{2}$, откуда

$v_0 = \sqrt{\frac{2A}{m}}$ — (1). Время подъема ядра до верхней точки

$t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ (см. задачу 2.52). Полное время полета ядра $t = 2t_1 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$; подставив (1), получим: $t = \dfrac{2\sin\alpha\sqrt{2A}}{g\sqrt{m}}$; $t = 1{,}5$ с. Расстояние от места бросания, которое пролетит ядро $s_x = t\cos\alpha\sqrt{\dfrac{2A}{m}}$; $s_x = 19{,}1$ м.

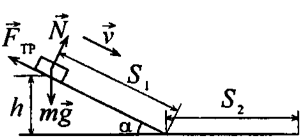
2.54. Тело массой $m = 10$ г движется по окружности радиусом $R = 6{,}4$ см. Найти тангенциальное ускорение a_τ тела, если известно, что к концу второго оборота после начала движения его кинетическая энергия $W_к = 0{,}8$ МДж.

Решение:

Найдем угловое ускорение: $a_\tau = \varepsilon R$ — (1); $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t}$ — (2). Угловая скорость $\omega = 2\pi n = \dfrac{2\pi N}{t}$, отсюда $t = \dfrac{2\pi N}{\omega}$ — (3). С другой стороны, $\omega = \dfrac{v}{R}$ — (4). Скорость v найдем из уравнения кинетической энергии: $W_к = \dfrac{mv^2}{2}$, отсюда $v = \sqrt{\dfrac{2W_к}{m}}$ — (5). Подставив уравнение (5) в (4), получим $\omega = \sqrt{\dfrac{2W_к}{mR^2}}$ — (6). Подставив уравнение (3) в (2), с учетом (6), найдем: $\varepsilon = \dfrac{\omega^2}{2\pi N} = \dfrac{2W_к}{mR\pi N}$. Тогда из (1): $a_\tau = \dfrac{W_к R}{mR^2\pi N} = \dfrac{W_к}{mR\pi N}$; $a_\tau \approx 0{,}2$ м/с^2.

2.55. Тело массой $m = 1$ кг скользит сначала по наклонной плоскости высотой $h = 1$ м и длиной склона $l = 10$ м, а затем по горизонтальной поверхности. Коэффициент трения на всем пути $k = 0{,}05$. Найти: а) кинетическую энергию $W_к$ тела у основания плоскости; б) скорость v тела у основания плоскости; в) расстояние s, пройденное телом по горизонтальной поверхности до остановки.

Решение:

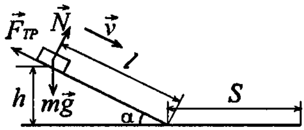


По закону изменения полной механической энергии $\Delta W = A$, где A — работа внешних сил. В нашем случае в верхней точке $W_к = 0$; $W_п = mgh$, у основания $W_к = \frac{mv^2}{2}$; $W_п = 0$, следовательно, $\frac{mv^2}{2} - mgh = A_{тр}$, где $A_{тр}$ — работа сил трения. $\frac{mv^2}{2} - mgh = -F_{тр}l$, отсюда $mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{тр}l$, т.е. потенциальная энергия гела при соскальзывании с наклонной плоскости переходит в кинетическую энергию и в работу против сил трения. Но $h = l\sin\alpha$, откуда $\sin\alpha = h/l = 0{,}1$, а $\cos\alpha = 0{,}99$, $F_{тр} = kmg\cos\alpha$, где α — угол наклона плоскости.

а) $W_к = \frac{mv^2}{2}$; $W_к = mgh - F_{тр}l$; $W_к = mgl(\sin\alpha - k\cos\alpha)$; $W_к = 4{,}9$ Дж. б) $v = \sqrt{\frac{2W_к}{m}} = 3{,}1$ м/с. в) Кинетическая энергия, которую тело имеет у основания наклонной плоскости, переходит в работу против силы трения на горизонтальной поверхности, т.е. $W_к = F_{тр}s = kmgs$, откуда найдем $s = \frac{W_к}{kmg}$; $s = 10$ м.

2.56. Тело скользит сначала по наклонной плоскости составляющей угол $\alpha = 8°$ с горизонтом, а затем по горизонтальной поверхности. Найти коэффициент трения на всем пути, если известно, что тело проходит по горизонтальной плоскости то же расстояние, что и по наклонной плоскости.

Решение:

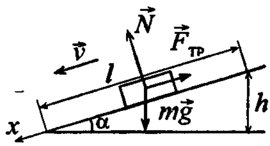


В начальный момент времени тело обладает потенциальной энергией $W_п = mgh$. Когда тело оказалось в нижней точке наклонной плоскости, часть его потенциальной энергии перешла в кинетическую энергию, а оставшаяся часть пошла на работу против сил трения. $W_п = W_к + A_{тр}$; $mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{тр}s_1$ — (1). Преобразуя уравнение (1), получим: $mgs_1 \times \sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + kmg\cos\alpha s_1$; $2gs_1(\sin\alpha - k\cos\alpha) = v^2$ — (2). На горизонтальном участке пути вся кинетическая энергия тела пошла на совершение работы против сил трения. $W_к = A_{тр}$; $\frac{mv^2}{2} = kmgs_2$, откуда $v^2 = 2kgs_2$ — (3). Решая совместно (2) и (3), получим: $2kgs_2 = 2gs_1(\sin\alpha - \cos\alpha)$; $k = \sin\alpha - k\cos\alpha$, отсюда $k(1+\cos\alpha) = \sin\alpha$; $k = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

$k = \frac{0{,}125}{1{,}992} = 0{,}06$.

2.57. Тело массой $m = 3$ кг, имея начальную скорость $v_0 = 0$, скользит по наклонной плоскости высотой $h = 0{,}5$ м и длиной склона $l = 1$ м и приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью $v = 2,45$ м/с. Найти коэффициент трения k тела о плоскость и количество теплоты Q, выделенное при трении.

Решение:

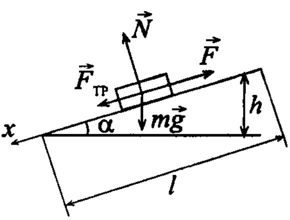


В начальный момент времени тело обладает потенциальной энергией $W_п = mgh$. Когда тело оказалось в нижней точке наклонной плоскости, часть его потенциальной энергии перешла в кинетическую энергию, а оставшаяся часть пошла на работу против сил трения. $W_п = W_k + A_{тр}$;

$mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{тр}s_1$ — (1). Преобразуя (1), получим: $kg\cos\alpha l = gh - \frac{v^2}{2} = \frac{2gh - v^2}{2}$, откуда $k = \frac{2gh - v^2}{2g\cos\alpha}$; $k = 0,22$. Количество выделившейся при трении теплоты равно $Q = F_{тр} \cdot l = kmg\cos\alpha \cdot l$; $Q = 5,7$ Дж.

2.58. Автомобиль массой $m = 2$ т движется в гору с уклоном 4 м на каждые 100 м пути. Коэффициент трения $k = 0,08$. Найти работу A, совершаемую двигателем автомобиля на пути $s = 3$ км, и мощность N, развиваемую двигателем, если известно, что путь $s = 3$ км был пройден за время $t = 4$ мин.

Решение:

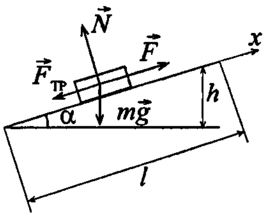


В случае равномерного движения автомобиля $a = 0$, тогда согласно второму закону Ньютона сила тяги двигателя $F = F_{тр} + mg\sin\alpha$ или $F = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)$, где $\sin\alpha = h/l$; $\sin\alpha = 0,04$; $\cos\alpha = 0,999$. Работа силы $\vec{F}$ на пути s: $A = Fs = mgs(k\cos\alpha + \sin\alpha)$; $A = 7$ МДж. Мощность двигателя $N = A/t$; $N = 29,2$ кВт.

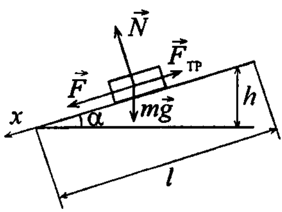
2.59. Какую мощность N развивает двигатель автомобиля массой $m = 1$ т, если известно, что автомобиль едет с постоянной скоростью $v = 36$ км/ч: а) по горизонтальной дороге; б) в гору с уклоном 5 м на каждые 100 м пути; в) под гору с тем же уклоном? Коэффициент трения $k = 0{,}07$.

Решение:

Требуется найти мощность, развиваемую двигателем автомобиля, т.е. мощность силы F. Выразим F для всех случаев из второго закона Ньютона. а) Т.к. $v = const$, то $F = F_{тр} = kmg$. При движении автомобиля по горизонтальной дороге мощность равна $N = Fv = kmgv = 6{,}9$ кВт.



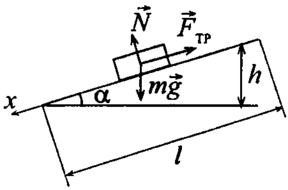
б) При движении в гору сила тяги двигателя $F = mg\sin\alpha + F_{тр}$, где $F_{тр} = kmg\cos\alpha$; следовательно, $F = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)$, тогда мощность $N = mgv(k\cos\alpha + \sin\alpha)$; Угол наклона дороги найдем из соотношения: $\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{5}{100} = 0{,}05$; $\alpha \approx 3°$; $\cos\alpha = 0{,}998$. $N = 11{,}8$ кВт.



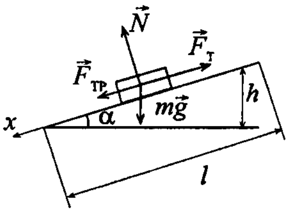
в) При движении под гору сила тяги двигателя $F = F_{тр} - mg\sin\alpha$; где $F_{тр} = kmg\cos\alpha$, тогда получим $F = kmg\cos\alpha - mg\sin\alpha$; $F = mg(k\cos\alpha - \sin\alpha)$, мощность $N = mgv(k\cos\alpha - \sin\alpha)$; $N \approx 2$ кВт.

2.60. Автомобиль массой $m = 1$ т движется при выключенном моторе с постоянной скоростью $v = 54$ км/ч под гору с уклоном 4м на каждые 100 м пути. Какую мощность N должен развивать двигатель автомобиля, чтобы автомобиль двигался с той же скоростью в гору?

Решение:



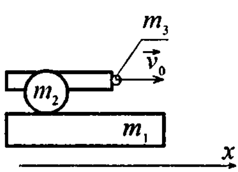
Уравнение движения автомобиля под гору $mg\sin\alpha - F_{тр} = 0$ или $F_{тр} = mg\sin\alpha$. С другой стороны, $F_{тр} = kmg\cos\alpha$, тогда $kmg\cos\alpha = mg\sin\alpha$, откуда $k = tg\alpha$.



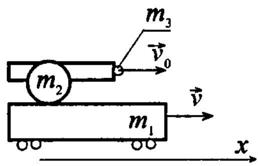
При движении автомобиля вверх по второму закону Ньютона сила тяги двигателя $F_т = F_{тр} + mg \times \sin\alpha$; $F_т = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)$. Тогда мощность, развиваемая двигателем: $N = F_т v = mgv \times (k\cos\alpha + \sin\alpha)$; $N = mgv \times \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha + \sin\alpha\right)$; $N = 2m \times gv\sin\alpha = 2mgv\dfrac{h}{l}$; $N = 11{,}8$ кВт.

2.61. На рельсах стоит платформа массой $m_1 = 10$ т. На платформе закреплено орудие массой $m_2 = 5$ т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда $m_3 = 100$ кг; его начальная скорость относительно орудия $v_0 = 500$ м/с. Найти скорость u платформы в первый момент после выстрела, если: а) платформа стоит неподвижно; б) платформа двигалась со скоростью $v = 18$ км/ч и выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению ее движения.

Решение:

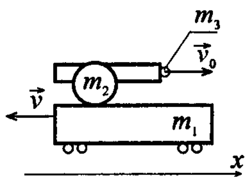


а) При неподвижной платформе начальная скорость снаряда относительно земли равна его скорости v_0 относительно орудия. Систему «платформа — орудие — снаряд» можно считать замкнутой в проекции на ось x при условии, что силой трения качения платформы можно пренебречь. Тогда в проекции на ось x импульс системы до выстрела $p_x = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = 0$, т.к. $v = 0$. Импульс системы после выстрела $p'_x = m_3 v_0 + (m_1 + m_2) \cdot u$. По закону сохранения импульса $p_x = p'_x$ или $0 = m_3 v_0 + (m_1 + m_2) \cdot u$, откуда $u = -\dfrac{m_3 v_0}{m_1 + m_2}$; $u = -12$ км/ч. Знак «–» указывает, что платформа стала двигаться в направлении, противоположном направлению движения снаряда.



б) Если выстрел был произведен в направлении движения платформы, то начальная скорость снаряда относительно земли равна $v_0 + v$. На основании закона сохранения импульса имеем: $(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = m_3 (v_0 + v) + (m_1 + m_2) \cdot u$ — (2), откуда $u = \dfrac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v - m_3 (v_0 - v)}{m_1 + m_2}$;

$u = 6$ км/ч.



в) Если выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению движения платформы, то при $v_0 > 0$ имеем $v < 0$. Тогда уравнение (2) имеет вид: $-(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = m_3 (v_0 - v) + (m_1 + m_2) \cdot u$, откуда

$$u = -\frac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v + m_3 (v_0 - v)}{m_1 + m_2};$$

$u = -30$ км/ч.

2.62. Из ружья массой $m_1 = 5$ кг вылетает пуля массой $m_2 = 5$ г со скоростью $v_2 = 600$ м/с. Найти скорость v_1 отдачи ружья.

Решение:

Согласно закону сохранения импульса $m_1v_1 - m_2v_2 = 0$, отсюда $v_1 = \frac{m_2v_2}{m_1}$; $v_1 = 0{,}6$ м/с.

2.63. Человек массой $m_1 = 60$ кг, бегущий со скоростью $v_1 = 8$ км/ч, догоняет тележку массой $m_2 = 80$ кг, движущуюся со скоростью $v_2 = 2{,}9$ км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью u будет двигаться тележка? С какой скоростью u' будет двигаться тележка, если человек бежал ей навстречу?

Решение:

Система «человек — тележка» замкнута в проекции на горизонтальную ось. а) Человек догоняет тележку. По закону сохранения импульса $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\cdot u$, откуда $u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u = 5{,}14$ км/ч. б) Человек бежит навстречу тележке. По закону сохранения импульса $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)\cdot u'$, откуда $u' = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u' = 1{,}71$ км/ч.

2.64. Снаряд массой $m_1 = 100$ кг, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью $v_1 = 500$ м/с, попадает в вагон с песком, масса которого $m_2 = 10$ т, и застревает в нем. Какую скорость u получит вагон, если: а) вагон стоял неподвижно; б) вагон двигался со скоростью $v_2 = 36$ км/ч в том же направлении, что и снаряд; в) вагон двигался со скоростью $v_2 = 36$ км/ч в направлении, противоположном движению снаряда?

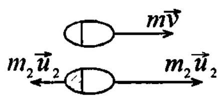
Решение:

а) Будем считать удар абсолютно неупругим, тогда в проекции на горизонтальную ось по закону сохранения импульса: $m_1v_1 = (m_1 + m_2)u$, отсюда $u = \dfrac{m_1v_1}{m_1 + m_2}$; $u \approx 5$ м/с.

б) $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$, следовательно, $u = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u \approx 15$ м/с. в) $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$, следовательно, $u = \dfrac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u \approx -5$ м/с, т. е. вагон продолжает двигаться в том же направлении, но с меньшей скоростью.

2.65. Граната, летящая со скоростью $v = 10$ м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла 0,6 массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью $u_1 = 25$ м/с. Найти скорость u_2 меньшего осколка.

Решение:



При взрыве внутренние силы намного превышают внешние. Следовательно, можно считать, что система замкнута и закон сохранения импульса использовать в векторной форме. Импульс системы до разрыва $\vec{p} = m\vec{v}$. Импульс системы после разрыва $\vec{p}' = 0{,}6m\vec{u} + 0{,}4m\vec{u}_2$. В проекции на горизонтальную ось закон сохранения импульса: $mv = m_1u_1 + m_2u_2$ или $mv = 0{,}6m \cdot u_1 + 0{,}4m \cdot u_2$; $v = 0{,}6u_1 + 0{,}4u_2$, откуда $u_2 = \dfrac{v - 0{,}6u_1}{0{,}4} = -12{,}5$ м/с. Полученный результат от массы не зависит. Пусть масса всей гранаты $m = 1$ у.е., масса большего осколка $m_1 = 0{,}6$ у.е., масса меньшего осколка $m_2 = 0{,}4$ у.е. Тогда вектор импульса: всей гранаты — $mv = 10$ у.е.; большего осколка — $m_1u_1 = 15$ у.е.; меньшего осколка — $m_2u_2 = 5$ у.е. Направление векторов показано на рисунке.

2.66. Тело массой $m_1 = 1$ кг, движущееся горизонтально со скоростью $v_1 = 1$ м/с, догоняет второе тело массой $m_2 = 0{,}5$ кг и неупруго соударяется с ним. Какую скорость u получат тела, если: а) второе тело стояло неподвижно; б) второе тело двигалось со скоростью $v_2 = 0{,}5$ м/с в направлении, что и первое тело; в) второе тело двигалось со скоростью $v_2 = 0{,}5$ м/с в направлении, противоположном направлению движения первого тела.

Решение:

В каждом случае запишем закон сохранения импульса и выразим скорость u. а) $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u$; $u = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$; $u = 0{,}67$ м/с. б) $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$; $u = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$; $u = 0{,}87$ м/с. в) $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$; $u = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$; $u = 0{,}5$ м/с.

2.67. Конькобежец массой $M = 70$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 3$ кг со скоростью $v = 8$ м/с. На какое расстояние s откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $k = 0{,}02$?

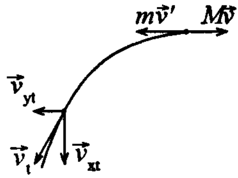
Решение:

Движение конькобежца является равнозамедленным, пройденный им путь $s = v_0^2 / 2a$ — (1). По закону сохранения импульса $Mv_0 = mv$, откуда $v_0 = mv / M$ — (2). Ускорение a можно найти по второму закону Ньютона: $F_{\text{тр}} = ma$. Т.к. $F_{\text{тр}} = kmg$, то $kmg = ma$; $a = kg$ — (3). Подставив (2) и (3) в (1), получим $s = \dfrac{m^2 v^2}{2M^2 kg}$; $s = 0{,}3$ м.

2.68. Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 2$ кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент бросания ее скорость была $v = 0{,}1$ м/с. Масса тележки с человеком $M = 100$ кг. Найти кинетическую энергию $W_к$ брошенного камня через время $t = 0{,}5$ с после начала движения.

Решение:

Обозначим v' — скорость камня в начальный момент времени, v_t — его скорость в момент времени $t = 0{,}5$ с. По закону сохранения импульса $Mv = mv'$ — (1); $W_k = \dfrac{mv_t^2}{2}$ — (2);



$v_t^2 = v_{xt}^2 + v_{yt}^2$, где $v_{xt} = v'$; $v_{yt} = gt$. Из (1) $v' = \dfrac{Mv}{m_1}$, тогда

$v_t^2 = \dfrac{M^2v^2}{m^2} + g^2t^2 = \dfrac{M^2v^2 + m^2g^2t^2}{m^2}$ — (3). Подставив (3) в

(2), получим $W_k = \dfrac{M^2v^2 + m^2g^2t^2}{2m}$; $W_k = 49$ Дж.

2.69. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется навстречу второму телу массой $m_2 = 1{,}5$ кг и неупруго соударяется с ним. Скорости тел непосредственно перед ударом были $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Какое время t будут двигаться эти тела после удара, если коэффициент трения $k = 0{,}05$?

Решение:

Будем считать удар абсолютно неупругим. По закону сохранения импульса $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)\cdot u$, отсюда

$u = \dfrac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$ — (1). С другой стороны, $u = at$ — (2), где

ускорение a можно выразить из второго закона Ньютона $F_{тр}=(m_1+m_2)\cdot a$; $k(m_1+m_2)\cdot g=(m_1+m_2)\cdot a$, откуда $a=kg$ — (3). Выразим из (2): $t=\frac{u}{a}$. Подставим в данное уравнение (1) и (3): $t=\frac{m_2v_2-m_1v_1}{kg(m_1+m_2)}$; $t=0{,}58$ с.

2.70. Автомат выпускает пули с частотой $n=600$ мин$^{-1}$. Масса каждой пули $m=4$ г, ее начальная скорость $v=500$ м/с. Найти среднюю силу отдачи $\overline{F}$ при стрельбе.

Решение:
Среднюю силу отдачи можно найти по второму закону Ньютона $F=ma=m\frac{v}{t}$, где $t=\frac{1}{n}$ — время, за которое автомат выпускает одну пулю. По условию $n=600$ мин$^{-1}=10$ с$^{-1}$. Отсюда $F=mvn$; $F=20$ Н.

2.71. На рельсах стоит платформа массой $m_1=10$ т. На платформе закреплено орудие массой $m_2=5$ т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда $m_3=100$ кг, его скорость относительно орудия $v_0=500$ м/с. На какое расстояние s откатится платформа при выстреле, если: а) платформа стояла неподвижно; б) платформа двигалась со скоростью $v=18$ км/ч и выстрел был произведен в направлении ее движения; в) платформа двигалась со скоростью $v=18$ км/ч и выстрел был произведен в направлении противоположном направлению ее движения? Коэффициент трения платформы о рельсы $k=0{,}002$.

Решение:
а) По закону сохранения импульса $m_3v_0=(m_1+m_2)\cdot u$, откуда $u=\frac{m_3v_0}{m_1+m_2}$ — (1). По второму закону Ньютона $F_{тр}=(m_1+m_2)\cdot a$ или $k(m_1+m_2)\cdot g=(m_1+m_2)\cdot a$, откуда

$a = kg$ — (2). Расстояние, на которое откатится платформа, $s = ut - \frac{at^2}{2}$, где $u = at$ — скорость платформы в первый момент после выстрела. $t = \frac{u}{a}$, тогда $s = \frac{u^2}{a} - \frac{au^2}{2a^2} = \frac{u^2}{2a}$. Подставив (1) и (2), получим, $s = \frac{m_3^2 v_0^2}{2(m_1 + m_2)^2 kg}$; $s = 284$ м.

б) По закону сохранения импульса $m_3 v_0 - (m_1 + m_2) \times u = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot v$, откуда $u = \frac{m_3 v_0 - (m_1 + m_2 + m_3) \cdot v}{m_1 + m_2}$; $u = -1{,}7$ м/с и будет направлено в обратную сторону относительно v_0 и v. Расстояние, на которое откатится платформа: $s = \frac{u^2}{2a} = \frac{u^2}{2kg}$; $s = 73{,}7$ м.

в) По закону сохранения импульса $(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = (m_1 + m_2) \cdot u - m_3 v_0$, откуда $u = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v + m_3 v_0}{m_1 + m_2}$; $u = 8{,}4$ м/с направление выбрано правильно. Пройденный платформой путь $s = \frac{u^2}{2kg}$; $s = 1800$ м.

2.72. Из орудия массой $m_1 = 5$ т вылетает снаряд массой $m_2 = 100$ кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете $W_{к2} = 7{,}5$ МДж. Какую кинетическую энергию $W_{к1}$ получает орудие вследствие отдачи?

Решение:

Согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 = m_2 v_2$ — (1). Кинетическая энергия орудия сразу после выстрела

$W_{к1}=\frac{m_1v_1^2}{2}$ — (2). Кинетическая энергия снаряда $W_{к2}=\frac{m_1v_2^2}{2}$ — (3). Из (1) $v_1=\frac{m_2v_2}{m_1}$; из (3) $v_2^2=\frac{2W_{к2}}{m_2}$, тогда $v_1^2=\frac{m_2^2\cdot 2W_{к2}}{m_1^2\cdot m_2}=\frac{2m_2W_{к2}}{m_1^2}$ — (4). Подставив (4) в (2), получим $W_{к1}=\frac{m_1 2m_2W_{к2}}{2m_1^2}=\frac{m_2}{m_1}W_{к1}$; $W_{к1}=150$ кДж.

2.73. Тело массой $m_1=2$ кг движется со скоростью $v_1=3$ м/с и нагоняет тело массой $m_2=8$ кг, движущееся со скоростью $v_2=1$ м/с. Считая удар центральным, найти скорости u_1 и u_2 тел после удара, если удар а) неупругий; б) упругий.

Решение:

Считаем, что движение происходит вдоль горизонтальной оси в одном направлении. а) По закону сохранения импульса $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)\cdot u$, где u — общая скорость двух тел после неупругого удара. Отсюда $u=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$; $u_1=u_2=u=1{,}4$ м/с*. б) Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии: $m_1v_1+m_2v_2=m_2u_2+m_1u_1$ — (1); $\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+$ $+\frac{m_2u_2^2}{2}$ — (2). Из (2) получим $m_1v_1^2+m_2v_2^2=m_1u_1^2+$ $+m_2u_2^2$ — (3). Преобразовав (1) и (3), решим систему уравнений: $\begin{cases} m_1(v_1-u_1)=m_2(u_2-v_2), \\ m_1(v_1^2-u_1^2)=m_2(u_2^2-v_2^2). \end{cases}$ Разделив первое

---

* Ответ в данной задаче не совпадает с ответом первоисточника: а) $u_1=u_2=1{,}8$ м/с; б) $u_1=0{,}6$ м/с, $u_2=2{,}6$ м/с.

уравнение на второе, получим: $\frac{v_1 - u_1}{v_1^2 - u_1^2} = \frac{u_2 - v_2}{u_2^2 - v_2^2}$, откуда $v_1 + u_1 = u_2 + v_2$ или $u_2 = v_1 + u_1 - v_2$ — (4). Тогда из (1) $u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2(v_1 + u_1 - v_2)}{m_1}$; $u_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = v_1 + \frac{m_2}{m_1} \times$ $\times(2v_2 - v_1)$; $u_1 = \frac{v_1 + m_2(2v_2 - v_1)/m_1}{1 + m_2/m_1}$ — (5). Подставляя числовые данные в (5) и (4), получим $u_1 = -0{,}2$ м/с; $u_2 = 1{,}8$ м/с.

2.74. Каково должно быть соотношение между массами m_1 и m_2 тел предыдущей задачи, чтобы при упругом ударе первое тело остановилось?

Решение:
Воспользовавшись формулой, полученной в предыдущей задаче, и приравняв скорость первого тела после удара u_1 к нулю, найдем соотношение масс m_1 и m_2. Имеем $u_1 = \frac{v_1 + m_2(2v_2 - v_1)/m_1}{1 + m_2/m_1} = 0$. Следовательно, $v_1 + \frac{m_2}{m_1} \times$ $\times(2v_2 - v_1) = 0$; $\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_1 - 2v_2}$, откуда $\frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{3-2} = 3$ или $m_2 = 3m_1$.

2.75. Тело массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $v_1 = 4$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Решение:
Первое тело до удара обладало кинетической энергией $W_к = \frac{m_1 v^2}{m_1 + m_2}$. После удара оба тела начали двигаться с

общей скоростью $u=\frac{m_1 v}{m_1+m_2}$. Кинетическая энергия обоих тел после удара стала $W'_к=\frac{(m_1+m_2)\cdot u^2}{2}$; $W'_к=\frac{m_1^2 v^2}{2(m_1+m_2)}$. Разность $W_{к1}-W'_к$ равна количеству теплоты Q, выделившемуся при ударе: $Q=(m_1 v^2/2)-\frac{m_1^2 v^2}{2(m_1+m_2)}$; $Q=12$ Дж.

2.76. Тело массой $m_1=5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2=2{,}5$ кг, которое после удара начинает двигаться с кинетической энергией $W'_{к2}=5$ Дж. Считая удар центральным и упругим, найти кинетическую энергию $W_{к1}$ и $W'_{к1}$ первого тела до и после удара.

Решение:

Система тел m_1 и m_2 замкнута в проекции на горизонтальную ось. В соответствии с условием движение происходит также вдоль горизонтальной оси. Согласно закону сохранения импульса в проекции на ось $m_1 v_1=m_1 v'_1+m_2 v'_2$ — (1), где v'_1 и v'_2 — скорости первого и второго тела после удара. Часть своей кинетической энергии первое тело в момент удара передает второму телу. $W_{к1}=W'_{к1}+W'_{к2}$ — (2); $\frac{m_1 v_1^2}{2}=\frac{m_1(v'_1)^2}{2}+W'_{к2}$ или $m_1 v_1^2=m_1(v'_1)^2+2W'_{к2}$ — (3). Кинетическая энергия второго тела после удара $W'_{к2}=\frac{m_2(v'_2)^2}{2}$, откуда $(v'_2)^2=\frac{2W'_{к2}}{m_2}$ — (4).

Подставив (4) в (1), получим $m_1 v_1=m_1 v'_1+m_2\sqrt{\frac{2W'_{к2}}{m_2}}=$

$= m_1 v_1' + \sqrt{2m_2 W_{к2}'}$, отсюда $v_1 = \dfrac{m_1 v_1' + \sqrt{2m_2 W_{к2}'}}{m_1}$ — (5). Подставив (5) в (3), найдем скорость первого тела после удара.

$m_1 \dfrac{\left(m_1 v_1' + \sqrt{2m_2 W_{к2}'}\right)^2}{m_1^2} = m_1 (v_1')^2 + 2W_{к2}'$; $\left(m_1 v_1' + \sqrt{2m_2 W_{к2}'}\right)^2 = (m_1 v_1')^2 + 2m_1 W_{к2}'$; $(m_1 v_1')^2 + 2m_1 v_1' \sqrt{2m_2 W_{к2}'} + 2m_2 W_{к2}' = (m_1 v_1')^2 + 2m_1 W_{к2}'$, откуда $v_1' = \dfrac{2W_{к2}'(m_1 - m_2)}{2m_1 \sqrt{2m_2 W_{к2}'}} = \dfrac{\sqrt{W_{к2}'}(m_1 - m_2)}{m_1 \sqrt{2m_2}}$. Поскольку $W_{к1}' = \dfrac{m_1 (v_1')^2}{2}$, то

$W_{к1}' = \dfrac{m_1 W_{к2}'(m_1 - m_2)^2}{4m_1^2 m_2} = \dfrac{W_{к2}'(m_1 - m_2)^2}{4m_1 m_2}$; $W_{к1}' = 0{,}62$ Дж.

Тогда из (2) $W_{к1} = 5{,}62$ Дж.

2.77. Тело массой $m_1 = 5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2 = 2{,}5$ кг. Кинетическая энергия системы двух тел непосредственно после удара стала $W_к' = 5$ Дж. Считая удар центральным и неупругим, найти кинетическую энергию $W_{к1}$ первого тела до удара.

Решение:

Движение осуществляется вдоль горизонтальной оси. Согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u$ — (1), где v_1 — скорость первого тела до удара, u — скорость системы двух тел после удара. Кинетическая энергия первого тела до удара $W_{к1} = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}$ — (2). Из (1) $v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2) \cdot u}{m_1}$. Найдем u из выражения для кинетической энергии системы двух тел после удара.

$W_к = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2}$, откуда $u = \sqrt{\frac{2W_к}{m_1 + m_2}}$, тогда

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)\sqrt{\frac{2W_к}{m_1 + m_2}}}{m_1}; \quad v_1 = \frac{\sqrt{2W_к(m_1 + m_2)}}{m_1} \quad — \quad (3).$$

Подставив (3) в (2), получим $W_{к1} = \frac{m_1 2W_к(m_1 + m_2)}{2m_1^2}$;

$W_{к1} = \frac{W_к(m_1 + m_2)}{m_1}$; $W_{к1} = 7{,}5$ Дж.

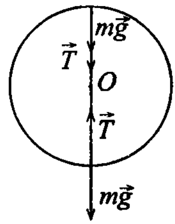
2.78. Два тела движутся навстречу друг другу и соударяются неупруго. Скорости тел до удара были $v_1 = 2$ м/с и $v_2 = 4$ м/с. Общая скорость тел после удара $u = 1$ м/с и по направлению совпадает с направлением скорости v_1. Во сколько раз кинетическая энергия $W_{к1}$ первого тела была больше кинетической энергии $W_{к2}$ второго тела?

Решение:

Отношение кинетических энергий первого и второго тела до удара можно выразить следующим образом: $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2}$ — (1). Согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$ или $m_1(v_1 - u) = m_2(u + v_2)$, откуда $\frac{m_1}{m_2} = \frac{u + v_2}{v_2 - u}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{v_1^2(u + v_2)}{v_2^2(v_1 - u)}$; $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = 1{,}25$.

2.79. Два шара с массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}1$ кг подвешены на нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Первый шар отклоняют на высоту $h_0 = 4{,}5$ см и отпускают. На какую высоту h поднимутся шары после удара, если удар: а) упругий; б) неупругий?

Решение:



Систему шаров будем считать замкнутой. а) Упругий удар. Пусть v_1 — скорость первого шара в момент удара, v_1' и v_2' — скорости первого и второго шаров непосредственно после удара. Согласно закону сохранения импульса $m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$ — (1). Если принять за нулевой уровень потенциальной энергии положение равновесия, то при отклонении первого шара он приобрел потенциальную энергию m_1gh_0, которая после удара распределилась между двумя шарами, сначала перейдя в кинетическую энергию, а затем, когда они отклонились на высоту h_1 — первый и h_2 — второй, — в потенциальную: $m_1gh_0 = m_1gh_1 + m_2gh_2$ — (2); $m_1gh_0 = \frac{m_1v_1^2}{2}$ — (3); $m_1gh_1 = \frac{m_1(v_1')^2}{2}$ — (4); $m_2gh_2 = \frac{m_2(v_2')^2}{2}$ — (5); Из уравнения (2) $m_1h_0 = m_1h_1 + m_2h_2$, откуда $h_2 = \frac{m_1}{m_2}(h_0 - h_1)$ — (6). Из уравнений (3) и (4) выразим скорости шаров: $v_1 = \sqrt{2gh_0}$; $v_1' = \sqrt{2gh_1}$; $v_2' = \sqrt{2gh_2}$. Подставив полученные выражения в (1), произведем преобразования: $m_1\sqrt{2gh_0} = m_1\sqrt{2gh_1} + m_2\sqrt{2gh_2}$; $m_1\sqrt{h_0} = m_1\sqrt{h_1} + m_2\sqrt{h_2}$ или с учетом (6); $m_1\sqrt{h_0} = m_1\sqrt{h_1} + m_2\sqrt{\frac{m_1}{m_2}(h_0 - h_1)}$;

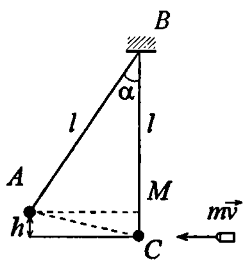
$m_1\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right) = \sqrt{m_2m_1(h_0 - h_1)}$; $m_1^2\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right)^2 = m_2m_1 \times (h_0 - h_1)$; $m_1^2\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right)^2 = m_2m_1(h_0 - h_1)$; $m_1\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right) =$

$= m_2\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right)$; $\sqrt{h_0}(m_1 - m_2) = \sqrt{h_1}(m_1 + m_2)$; $\sqrt{h_1} =$ $= \frac{\sqrt{h_0}(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$, отсюда $h_1 = h_0\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$; $h_1 = 0{,}005$ м.

Тогда из уравнения (6) $h_2 = 0{,}08$ м. б) Неупругий удар. Потенциальная энергия первого шара при прохождении положения равновесия перешла в кинетическую энергию. $m_1 g h_0 = \frac{m_1 v^2}{2}$ — (1), где v — скорость первого шара в нижней точке. После соударения шаров по закону сохранения импульса $m_1 v = (m_1 + m_2)\cdot u$ — (2), где u — скорость системы двух шаров непосредственно после удара. Кинетическая энергия системы после отклонения шаров на высоту h перешла в потенциальную энергию. $\frac{(m_1 + m_2)\cdot u^2}{2} = (m_1 + m_2)\cdot gh$ — (3). Выразим из (1) v и подставим в (2) $v = \sqrt{2gh_0}$; $m_1\sqrt{2gh_0} = (m_1 + m_2)\cdot u$, откуда $u = \frac{m_1\sqrt{2gh_0}}{m_1 + m_2}$. Подставив полученное выражение в (3), получим $\frac{(m_1 + m_2)m_1^2 \cdot 2gh_0}{2(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2)\cdot gh$, отсюда $h = \frac{m_1^2 h_0}{(m_1 + m_2)^2}$; $h = 0{,}02$ м.

2.80. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от центра шара до точки подвеса стержня $l = 1$ м. Найти скорость v пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол $\alpha = 10°$.

Решение:



Силу сопротивления воздуха не учитываем, следовательно, систему «пуля — шар» можно считать замкнутой. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для данной системы: $mv=(m+M)\cdot u$ — (1), где u — скорость шара вместе с пулей после удара. В результате взаимодействия шара с пулей, он приобрел кинетическую энергию, которая после отклонения стержня на $\angle\alpha$ перешла в потенциальную энергию $\frac{(m+M)\cdot u^2}{2}=(m+M)\cdot gh$ — (2).

Из (1) выразим u: $u=\frac{mv}{m+M}$, или $u=\frac{mv}{1001m}=\frac{v}{1001}$. Из (2) получим: $\frac{u^2}{2}=gh$, $\frac{v^2}{2\cdot(1001)^2}=gh$. Найдем h: $BM=l\cos\alpha$, $h=l-BM$; $h=l-l\cos\alpha=l(1-\cos\alpha)$, тогда $v=1001\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$. $v\approx 550$ м/с.

2.81. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули $m_1=5$ г, масса шара $m_2=0{,}5$ кг. Скорость пули $v_1=500$ м/с. При каком предельном расстоянии l от центра шара до точки подвеса стержня шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности?

Решение:

См. рисунок к задаче 2.80. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для данной системы. $m_1v_1=(m_1+m_2)\cdot v_2$ — (1); $\frac{(m_1+m_2)\cdot v_2^2}{2}=(m_1+m_2)gh$ — (2), где v_2 — скорость шара с пулей после удара. Высота, на которую поднимется шар $h = 2l$. Из (2) $\frac{v_2^2}{2} = 2gl$, откуда $l = \frac{v_2^2}{4g}$. Из (1) $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$, тогда $l = \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2 \cdot 4g}$; $l = 0{,}64$ м.

2.82. Деревянным молотком, масса которого $m_1 = 0{,}5$ кг, ударяют о неподвижную стенку. Скорость молотка в момент удара $v_1 = 1$ м/с. Считая коэффициент восстановления при ударе молотка о стенку $k = 0{,}5$, найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе. (Коэффициентом восстановления материала тела называют отношение скорости после удара к его скорости до удара.)

Решение:

По условию $\frac{v_2}{v_1} = k$. Количество теплоты, выделившееся при ударе, равно убыли кинетической энергии молотка $Q = W_{к1} - W_{к2}$, где $W_{к1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$; $W_{к2} = \frac{m_1 v_2^2}{2}$. Т.к. $v_2 = kv_1$, то $Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{k^2 m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2 (1 - k^2)}{2}$; $Q = 0{,}188$ Дж.

2.83. В условиях предыдущей задачи найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой за время удара.

Решение:

Согласно закону изменения импульса $F\Delta \vec{t} = m_1 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_1$ в проекции на горизонтальную ось $F\Delta t = m_1 v_1 - (-m_1 v_2) = m_1 (v_1 + v_2)$. Учитывая, что $v_2 = kv_1$, $F\Delta t = m_1 (v_1 + kv_1) = m_1 v_1 (1 + k)$; $F\Delta t = 0{,}75$ Н·с.

2.84. Деревянный шарик массой $m = 0{,}1$ кг падает с высоты $h_1 = 2$ м. Коэффициент восстановления при ударе шарика о пол $k = 0{,}5$. Найти высоту h_2, на которую поднимется шарик после удара о пол, и количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Решение:

Потенциальная энергия шарика mgh_1 в момент удара о пол переходит в кинетическую энергию: $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ — (1), где v_1 — скорость шарика в момент удара. Когда шарик отскакивает от пола, он обладает кинетической энергией $\frac{mv_2^2}{2}$, которая переходит в потенциальную $mgh_2 = \frac{mv_1^2}{2}$. По условию $v_2 = kv_1$, тогда $mgh_2 = \frac{k^2mv_1^2}{2}$ — (2). Из уравнения (1) $g = \frac{v_1^2}{2h_1}$, из уравнения (2) $g = \frac{k^2v_1^2}{2h_2}$. Приравняв правые части уравнений, получим $\frac{v_1^2}{2h_1} = \frac{k^2v_1^2}{2h_2}$, откуда $h_2 = k^2h_1$; $h_2 = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5$ м. Количество теплоты, выделившееся при ударе, равно убыли потенциальной энергии $Q = W_{п1} - W_{п2} = mgh_1 - mgh_2 = mg(h_1 - h_2)$; $Q = 1{,}47$ Дж.

2.85. Пластмассовый шарик, падая с высоты $h_1 = 1$ м несколько раз отскакивает от пола. Найти коэффициент восстановления k при ударе шарика о пол, если с момента падения до второго удара о пол прошло время $t = 1{,}3$ с.

Решение:

Падая с высоты h_1, шарик подлетает к полу со скоростью v_1, а отскакивает от него со скоростью $v_2 = kv_1$. Согласно закону сохранения механической энергии $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ и $mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2}$, откуда $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, а $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. После почленного деления получим $\frac{v_2}{v_1} = \frac{kv_1}{v_1} = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}}$, т.е. $h_2 = k^2 h_1$. Промежуток времени с момента падения шарика до второго удара о пол $t = t_1 + 2t_2$, где t_1 — время падения шарика с высоты h_1 и t_2 — время падения шарика с высоты h_2. Так как $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ и $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = k\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, то $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}(1 + 2k)$; отсюда $k = \frac{t - \sqrt{2h_1 / g}}{2\sqrt{2h_1 / g}}$; $k = 0{,}94$.

2.86. Стальной шарик, падая с высоты $h_1 = 1{,}5$ м на стальную плиту, отскакивает от нее со скоростью $v_2 = 0{,}75 \cdot v_1$, где v_1 — скорость, с которой он подлетает к плите. На какую высоту h_2 он поднимется? Какое время t пройдет с момента падения до второго удара о плиту?

Решение:

Рассуждая как в задаче 2.84, запишем $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ — (1); $mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{0{,}75^2 mv_1^2}{2}$ — (2). Из уравнения (1) имеем $gh_1 = \frac{v_1^2}{2}$ — (3). Из уравнения (2) $\frac{gh_2}{0{,}56} = \frac{v_1^2}{2}$ — (4). Тогда $\frac{gh_2}{0{,}56} = gh_1$, откуда $h_2 = 0{,}56h_1$; $h_2 = 0{,}56 \cdot 1{,}5 = 0{,}84$ м. Время t можно разложить на три составляющие: t_1 — время от начала падения до первого удара о плиту; t_2 — время от первого удара о плиту до подъема на высоту h_2; t_3 — время от начала падения с высоты h_2 до второго удара о плиту. $t = t_1 + t_2 + t_3$. Скорости шарика на этих участках: $v_1 = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{\sqrt{2gh_1}}{g} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, с учетом (3); $v_2 = gt_2$, откуда $t_2 = 0{,}75t_1$, т.к. по условию $v_2 = 0{,}75v_1$; $v_3 = v_2 = gt_3$, следовательно, $t = t_1 + 2 \cdot 0{,}75t_1 = 2{,}5t_1 = 2{,}5\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$; $t = 1{,}4$ с.

2.87. Металлический шарик, падая с высоты $h_1 = 1$ м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту $h_2 = 81$ см. Найти коэффициент восстановления k при ударе шарика о плиту.

Решение:

Воспользуемся уравнением (3) из задачи 2.84 $h_2 = k^2 h_1$, отсюда $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$; $k = 0{,}9$.

2.88. Стальной шарик массой $m = 20$ г, падая с высоты $h_1 = 1$ м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту $h_2 = 81$ см. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный плитой за время удара, и количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Решение:

Рассуждая аналогично 2.84, запишем $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ — (1); $mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2}$ — (2). Тогда из (1) $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ — (3), из (2) соответственно $v_2 = \sqrt{2gh_2}$ — (4). Согласно закону изменения импульса $F\Delta \vec{t} = m_1\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1$ или в проекции на горизонтальную ось: $F\Delta t = m\Delta v = m(v_1 - (-v_2)) = m(v_1 + v_2)$. Подставляя (3) в (4) получим $F\Delta t = m\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}\right)$; $F\Delta t = 0{,}17$ Н·с. Количество выделившейся теплоты равно убыли потенциальной энергии $Q = mgh_1 - mgh_2 = mg \times \times (h_1 - h_2)$; $Q = 37{,}2$ мДж.

2.89. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар неупругим и центральным, найти, какая часть кинетической энергии $W_{к1}$ первого тела переходит при ударе в тепло. Задачу решить сначала в общем виде, а затем рассмотреть случаи: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 = 9m_2$.

Решение:

Кинетическая энергия первого тела до удара $W_{к1} = \dfrac{m_1 v^2}{2}$; кинетическая энергия второго тела до удара $W_{к2} = 0$. После удара кинетические энергии обоих тел $W'_к = \dfrac{(m_1 + m_2)\cdot u^2}{2}$, где $u = \dfrac{m_1 v}{m_1 + m_2}$ — общая скорость тел.

Следовательно, $W'_к = \dfrac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$. Тогда кинетическая энергия, перешедшая при ударе в тепло: $W_{к1} - W'_к = \dfrac{m_1 v^2}{2} - \dfrac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \dfrac{m_1 v^2}{2}\left(1 - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$. Искомое отношение: $\dfrac{W_{к1} - W'_к}{W_{к1}} = 1 - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$. а) Если $m_1 = m_2$, то $\dfrac{W_{к1} - W'_к}{W_{к1}} = 0{,}5$; б) Если $m_1 = 9m_2$, то $\dfrac{W_{к1} - W'_к}{W_{к1}} = 0{,}1$.

2.90. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар упругим и центральным, найти, какую часть кинетической энергии $W_{к1}$ первое тело передает второму при ударе. Задачу решить сначала в общем виде, а затем рассмотреть случаи: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 = 9m_2$.

Решение:

Кинетическая энергия первого тела до удара $W_{к1} = \frac{m_1 v^2}{2}$; кинетическая энергия второго тела до удара $W_{к2} = 0$. После удара второе тело приобрело кинетическую энергию $W'_{к2} = \frac{m_2 u^2}{2}$, где $u = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$. Таким образом, первое тело передало второму телу кинетическую энергию $W'_{к2} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}\right)^2$. Искомое отношение: $\frac{W'_{к2}}{W_{к1}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$. а) Если $m_1 = m_2$, то $\frac{W'_{к2}}{W_{к1}} = 1$; б) если $m_1 = 9m_2$, то $\frac{W'_{к2}}{W_{к1}} = 0{,}36$.

2.91. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Каким должно быть отношение масс m_1 / m_2, чтобы при центральном упругом ударе скорость первого тела уменьшилась в 1,5 раза? С какой кинетической энергией $W'_{к2}$ начинает двигаться при этом второе тело, если первоначальная кинетическая энергия первого тела $W_{к1} = 1$ кДж?

Решение:

Из условия следует, что движение происходит вдоль горизонтальной оси. Система тел m_1 и m_2 замкнута в проекции на горизонтальную ось. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для данного взаимодействия: $m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2$ — (1); $\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$ — (2). Умножив (2) на 2 и учитывая, что $v_1 = 1{,}5u_1$, получим $m_1 \cdot 1{,}5u_1 = m_1u_1 + m_2u_2$; $m_1 \cdot 2{,}25u_1^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2$ или $m_1 \cdot 0{,}5u_1 = m_2u_2$ — (3); $m_1 \cdot 1{,}25u_1^2 = m_2u_2^2$ — (4). Выразим u_2 из (3) $u_2 = \frac{0{,}5m_1u_1}{m_2}$ — (5). Подставим это выражение в (4): $1{,}25m_1u_1^2 = m_2\left(\frac{0{,}5m_1u_1}{m_2}\right)^2$; $1{,}25 = \frac{0{,}25m_1}{m_2}$. Отсюда $\frac{m_1}{m_2} = 5$. После столкновения первоначальная кинетическая энергия первого тела перераспределилась между первым и вторым телом, которые стали двигаться со скоростями u_1 и u_2 соответственно. $W_{к1} = W'_{к1} + W'_{к2}$, где $W'_{к1} = \frac{m_1u_1^2}{2}$; $W'_{к2} = \frac{m_2u_2^2}{2}$; $u_2^2 = \frac{1{,}25m_1u_1^2}{2}$. По условию $W_{к1} = \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1 \cdot 2{,}25u_1^2}{m_2}$, откуда $u_1^2 = \frac{2W_{к1}}{2{,}25m_1}$. Из (5) найдем $u_2^2 = \frac{1{,}25m_1 \cdot 2W_{к1}}{m_2 \cdot 2{,}25m_1} = \frac{2{,}5W_{к1}}{2{,}25m_2}$. Тогда $W'_{к2} = \frac{m_2 \cdot 2{,}5 \cdot W_{к1}}{2 \cdot 2{,}25 \cdot m_2} = \frac{0{,}5 \cdot W_{к1}}{0{,}9} = \frac{5}{9}W_{к1}$; $W'_{к2} = \frac{5}{9}$ кДж.

2.92. Нейтрон (масса m_0) ударяется о неподвижное ядро атома углерода $(m = 12m_0)$. Считая удар центральным и упругим, найти, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия $W_к$ нейтрона при ударе.

Решение:

Кинетическая энергия нейтрона до и после удара выражается следующими соотношениями: $W_{к1}=\frac{m_0v_1^2}{2}$ — (1); $W_{к2}=\frac{m_0v_2^2}{2}$ — (2), откуда $\frac{W_{к1}}{W_{к2}}=\frac{v_1^2}{v_2^2}$. По закону сохранения энергии $W_{к1}=W_{к2}+W'_к$ — (3), где $W'_к$ — кинетическая энергия ядра атома углерода после взаимодействия, $W'_к=\frac{12m_0u^2}{2}$ — (4). Решая совместно уравнения (1) — (4), получим $m_0v_1^2=m_0v_2^2+12m_0u^2$, откуда $v_1^2=v_2^2+12u^2$ — (5). Согласно закону сохранения импульса $m_0v_1=m_0v_2+12m_0u$, откуда $v_1=v_2+12u$ или $u=\frac{v_1-v_2}{12}$ — (6). Подставим (6) в (5) и произведем преобразования: $v_1^2=v_2^2+12\cdot\left(\frac{v_1-v_2}{12}\right)^2$; $v_1^2=v_2^2+\frac{(v_1-v_2)^2}{12}$; $v_1^2-v_2^2=\frac{(v_1-v_2)^2}{12}$; $v_1+v_2=\frac{v_1-v_2}{12}$; $12\left(\frac{v_1}{v_2}+1\right)=\frac{v_1}{v_2}-1$; $11\frac{v_1}{v_2}=-13$. Отсюда $\frac{v_1^2}{v_2^2}=1{,}4$, т.е. $\frac{W_{к1}}{W_{к2}}=1{,}4$.

2.93. Нейтрон (масса m_0) ударяется о неподвижное ядро: а) атома углерода $(m=12m_0)$; б) атома урана $(m=235m_0)$. Считая удар центральным и упругим, найти, какую часть скорости v потеряет нейтрон при ударе.

Решение:

а) Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии данной системы тел. $m_0v=-m_0(v-\Delta v)+$ $+12m_0u$ — (1). Знак «–» указывает на изменение направления скорости нейтрона на противоположный. $\frac{m_0v^2}{2}=\frac{m_0(v-\Delta v)^2}{2}+\frac{12m_0u^2}{2}$ — (2). Скорость нейтрона после удара $v-\Delta v$; u — скорость ядра атома углерода после удара. Разделив (1) на m_0, получим $v=-(v-\Delta v)+12u$, откуда $u=\frac{2(v-\Delta v)}{12}$. Подставим в уравнение (2) выражение для u и преобразуем его: $v^2=(v-\Delta v)^2+12u^2$, $v^2=(v-\Delta v)^2+12\left(\frac{2v-\Delta v}{12}\right)^2$, $v^2-(v-\Delta v)^2=\frac{(2v-\Delta v)^2}{12}$, $\Delta v(2v-\Delta v)=\frac{(2v-\Delta v)^2}{12}$, $12\Delta v=$ $=2v-\Delta v$, $13\frac{\Delta v}{v}=2$ и получаем $\frac{\Delta v}{v}=\frac{2}{13}$.

б) Рассуждая аналогично случаю а), запишем: $m_0v=-m_0(v-\Delta v)+235m_0u$, $m_0v^2/2=m_0(v-\Delta v)^2/2+$ $+\frac{235m_0u^2}{2}$, $2v-\Delta v=235u$ и $u=\frac{2v-\Delta v}{235}$. Подставляя в формулу (2) новые значения и преобразуя ее, получим: $v^2=(v-\Delta v)^2+235u^2$, $v^2-(v-\Delta v)^2=\frac{(2v-\Delta v)^2}{235}$, $235\Delta v=2v-\Delta v$; $235\Delta v=2v-\Delta v$, $236\Delta v=2v$ и $\frac{\Delta v}{v}=\frac{1}{118}$.

2.94. На какую часть уменьшится вес тела на экваторе вследствие вращения Земли вокруг оси?

Решение:

На экваторе на тело действует сила тяготения $F=G\frac{mM}{R^2}$ — (1) (M — масса Земли, m — масса тела, R — раднус Земли, G — гравитационная постоянная) и сила реакции опоры N, при этом тело, участвуя в суточном вращении Земли, движется по окружности радиусом R. Составим уравнение на основании второго закона Ньютона $F-N=m\omega^2R$, где $\omega=\frac{2\pi}{T}$ — угловая скорость; T — период вращения Земли вокруг своей оси: $T=86400$ с. Тогда $F-N=m\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R$, откуда $N=F-\frac{4\pi^2mR}{T^2}$ — (2). По третьему закону Ньютона вес тела на экваторе $P_э=N$ — (3). Вес покоящегося тела для любой точки Земли численно равен силе тяжести: $P=mg$ — (4). Относительное изменение веса тела $\delta=\frac{P-P_э}{P}$ — (5). Решая совместно уравнения (1) — (3), получим $P_э=G\frac{mM}{R^2}-\frac{4\pi^2mR}{T^2}$ — (6). Подставляя (4) и (6) в (5), получим $\delta=1-\frac{GM}{gR^2}+\frac{4\pi^2R}{gT^2}$ — (7). Примем ускорение свободного падения $g=9{,}8\ \text{м/с}^2$. Подставляя числовые данные в (7), получим $\delta=0{,}34\%$.

2.95. Какой продолжительности T должны были бы быть сутки на Земле, чтобы тела на экваторе не имели веса.

Решение:

Вес тела на экваторе $P_э=G\frac{mM}{R^2}-\frac{4\pi^2mR}{T^2}$ (см. задачу 2.94). По условию $P_э=0$, тогда $\frac{GM}{R^2}=\frac{4\pi^2R}{T^2}$. Отсюда $T=\sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM}}$. Подставляя числовые данные, получим $T=5056\ \text{с}=1\ \text{ч}\ 24\ \text{мин}$.

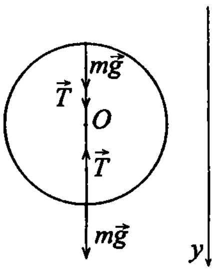
2.96. Трамвайный вагон массой $m = 5$ т идет по закруглению радиусом $R = 128$ м. Найти силу бокового давления F колес на рельсы при скорости движения $v = 9$ км/ч.

Решение:

При равномерном движении по окружности $a_\tau = 0$ и $a = a_n$. Тогда второй закон Ньютона запишется в виде: $F = ma_n = m\dfrac{v^2}{R}$, отсюда $F = 245$ Н.

2.97. Ведерко с водой, привязанное к веревке длиной $l = 60$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти наименьшую скорость v вращения ведерка, при которой в высшей точке вода из него не выливается. Какова сила натяжения веревки T при этой скорости в высшей и низшей точках окружности? Масса ведерка с водой $m = 2$ кг.

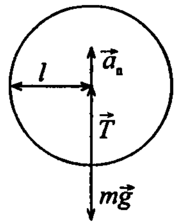
Решение:



Поскольку вращение вокруг оси О является равномерным, то $a = a_n = \dfrac{v^2}{l}$. На воду в ведерке в высшей точке действует центробежная сила равная $m\dfrac{v^2}{l}$, направленная вверх и сила тяжести mg, направленная вниз. Вода не будет выливаться из ведерка при условии, что $m\dfrac{v^2}{l} = mg$ или $g = \dfrac{v^2}{l}$, откуда $v = \sqrt{lg}$; $v = 2{,}43$ м/с. В проекции на ось y уравнение движения ведра с водой в верхней точке: $ma = mg + T$, в нижней точке $ma = T - mg$. Учитывая, что $g = \dfrac{v^2}{l} = a_n$, получим: в верхней точке $T = 0$, в нижней точке $T = 2mg = 39{,}2$ Н.

2.98. Камень, привязанный к веревке длиной $l = 50$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой частоте вращения n веревка разорвется, если известно, что она разрывается при десятикратной силе тяжести, действующей на камень?

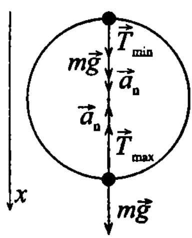
Решение:



По второму закону Ньютона $T - mg = ma_n$ — (1), где $a_n = \dfrac{v^2}{l}$ — (2). Линейная скорость $v = \omega \cdot l$; $\omega = 2\pi n$, тогда $v = 2\pi nl$, откуда $n = \dfrac{v}{2\pi l}$ — (3). Из (1) $v = \sqrt{a_n l}$; Из (2) $a_n = \dfrac{T - mg}{m} = \dfrac{9mg}{m} = 9g$, тогда $v = 3\sqrt{lg}$ — (4). Подставив (4) в (3), получим $n = \dfrac{3\sqrt{lg}}{2\pi l} = \dfrac{3}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$; $n = 2{,}12$ об/с.

2.99. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу m камня, если известно, что разность между максимальной и минимальной силами натяжения веревки $\Delta T = 10$ Н.

Решение:



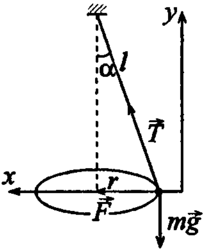
По второму закону Ньютона для верхней и нижней точек соответственно

$$\begin{cases} mg + T_{min} = ma_n & \text{— (1)}, \\ mg - T_{max} = -ma_n & \text{— (2)}. \end{cases}$$

Сложив (1) и (2), получим $2mg - \Delta T = 0$; $2mg = \Delta T$, отсюда $m = \dfrac{\Delta T}{2g}$; $m \approx 0{,}5$ кг.

2.100. Гирька, привязанная к нити длиной $l = 30$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом $R = 15$ см. С какой частотой n вращается гирька?

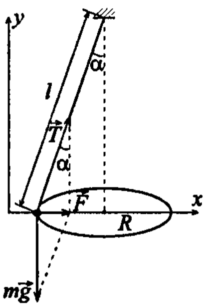
Решение:



В горизонтальной плоскости на гирьку действует сила: $F = T\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \frac{R}{l}$. Тогда по второму закону Ньютона $T\sin\alpha = ma_n$ ($a_\tau = 0$, т.к. движение равномерное) или $TR/l = ma_n$. По оси y: $T\cos\alpha - mg = 0$, $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - R^2/l^2}$. Тогда $mgR/l\cos\alpha = ma_n$ или $a_n = \frac{gR}{l\cos\alpha} = \frac{gR}{l\sqrt{1 - R^2/l^2}} = \frac{gR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$, но $a_n = \omega^2 R$; $\omega = 2\pi n$, следовательно, $a_n = 4\pi^2 n^2 R$, откуда $n = (1/2\pi)\times \times\sqrt{a_n/R}$ или $n = 1/2\pi\sqrt{g/\sqrt{l^2 - R^2}}$; $n = 59$ об/мин.

2.101. Гирька массой $m = 50$ г, привязанная к нити длиной $l = 25$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гирьки $n = 2$ об/с. Найти силу натяжения нити T.

Решение:

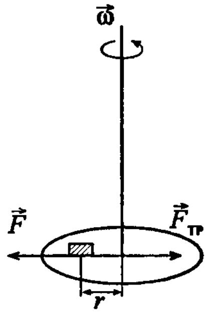


В горизонтальной плоскости на гирьку действует сила $F = T\sin\alpha$. Тогда по второму закону Ньютона $T\sin\alpha = ma_n$, где $\sin\alpha = \frac{R}{l}$. Учитывая, что $a_n = \omega^2 R = (2\pi n)^2 R$, запишем: $m(2\pi n)^2 R = T\frac{R}{l}$, откуда $T = ml(2\pi n)^2$; $T = 1{,}96$ Н.

2.102. Диск вращается вокруг вертикальной оси с частотой $n = 30$ об/мин. На расстоянии $r = 20$ см от оси вращения на диске лежит тело. Каким должен быть коэффициент трения k между телом и диском, чтобы тело не скатилось с диска?

Решение:

Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета, в системе диска, тогда при вращении диска на тело вдоль нормальной оси действует центробежная сила $\vec{F}$ и сила трения $F_{тр}$. Тело не будет соскальзывать с диска, если $F_{тр} \geq F$, т.е. $kmg \geq m\frac{v^2}{r}$ или $k \geq \frac{v^2}{rg}$. Т.к. $v = \omega \times$ $\times r = 2\pi nr$, то $k \geq \frac{4\pi^2 n^2 r}{g}$; $k \geq 0{,}2$.



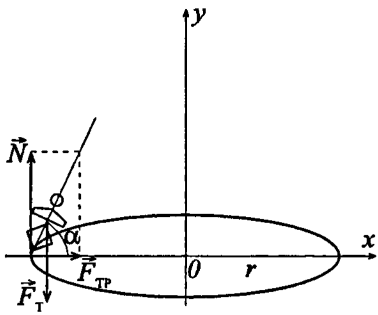
2.103. Самолет, летящий со скоростью $v = 900$ км/ч, делает «мертвую петлю». Каким должен быть радиус «мертвой петли» R, чтобы наибольшая сила F, прижимающая летчика к сидению, была равна: а) пятикратной силе тяжести, действующей на летчика; б) десятикратной силе тяжести, действующей на летчика?

Решение:

Искомая сила $F = ma_n = \frac{mv^2}{R}$. а) $5mg = \frac{mv^2}{R}$, отсюда $R = \frac{v^2}{5g}$; $R \approx 1600$ м. б) $10mg = \frac{mv^2}{R}$, отсюда $R = \frac{v^2}{10g}$; $R \approx 711$ м.

2.104. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью $v = 72$ км/ч, делая поворот радиусом $R = 100$ м. На какой угол α при этом он должен наклониться, чтобы не упасть при повороте?

Решение:



Силы, действующие на мотоциклиста: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила, которая может обеспечить движение мотоциклиста по окружности, — сила трения $\vec{F}_{тр}$. Согласно законам статики, для того, чтобы мотоциклист не потерял равновесия, необходимо, чтобы равнодействующая сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ была направлена по прямой, проходящей через центр тяжести. Тогда $tg\alpha = \frac{N}{F_{тр}} = \frac{1}{k}$. Запишем основной закон механики в проекциях на оси x и y: $ma_n = F_{тр}$ — (1), $0 = N - mg$ — (2), $F_{тр} = kN = kmg$ — (3). Решая совместно уравнения (1) — (3), учитывая, что $a_n = \frac{v^2}{R}$, получим $\frac{v^2}{R} = kg$ — (4). Выразив k из (4), найдем $tg\alpha = \frac{gR}{v^2}$, откуда $\alpha = 22°$.

2.105. К потолку трамвайного вагона подвешен на нити шар. Вагон идет со скоростью $v = 9$ км/ч по закруглению радиусом $R = 36{,}4$ м. На какой угол α отклонится при этом нить с шаром?

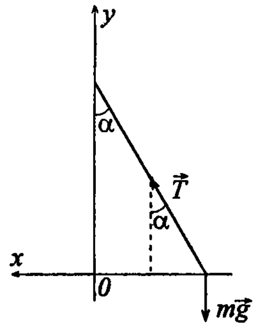
Решение:

Запишем основной закон механики в проекциях на оси x и y: $T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}$ — (1), $T\cos\alpha - mg = 0$ — (2). Из (2)

$T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, тогда $mg\,tg\alpha = m\dfrac{v^2}{R}$,

откуда $tg\alpha = \dfrac{v^2}{gR}$; $tg\alpha = 0{,}018$;

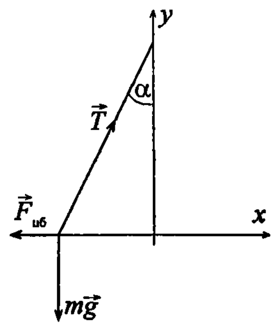
$\alpha \approx 1^o$.



2.106. Длина стержней центробежного регулятора $l = 12{,}5$ см. С какой частотой n должен вращаться центробежный регулятор, чтобы грузы отклонялись от вертикали на угол, равный: а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 30°$?

Решение:

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y: $T\sin\alpha = ma_n$ — (1); $mg - T\cos\alpha = 0$ — (2). Из (2) $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, тогда (1) запишем в виде $mg \cdot tg\alpha = ma_n$, откуда $a_n = g\,tg\alpha$ — (3). С другой стороны, нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где $R = l\sin\alpha$, т. е. $a_n = \omega^2 l\sin\alpha = 4\pi^2 n^2 \cdot l\sin\alpha$ — (4).



Решая совместно (3) и (4), получим $n = \sqrt{\dfrac{a_n}{4\pi^2 l\sin\alpha}}$;

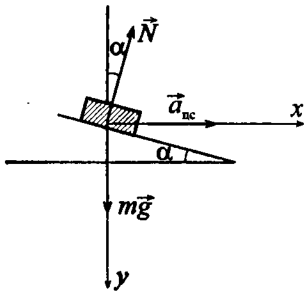
$n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g\,tg\alpha}{l\sin\alpha}}$; $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}$.

а) $n = 2$ об/с;

б) $n = 1{,}5$ об/с.

2.107. Шоссе имеет вираж с уклоном $\alpha = 10°$ при радиусе закругления дороги $R = 100$ м. На какую скорость v рассчитан вираж?

Решение:



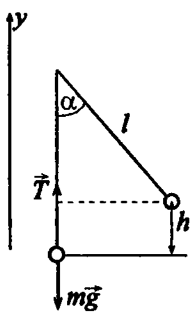
Данную задачу решаем без учета силы трения. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y: $N\sin\alpha = ma_n$; $mg - N \times \times \cos\alpha = 0$. Нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$; $mg = N\cos\alpha$;

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha}; \qquad mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = m\frac{v^2}{R};$$

$g \cdot tg\alpha = \frac{v^2}{R}$; $v^2 = gRtg\alpha$, отсюда $v = \sqrt{gRtg\alpha}$; $v = 13{,}5$ м/с= =47,3км/ч.

2.108. Груз массой $m = 1$ кг, подвешенный на нити, отклоняют на угол $\alpha = 30°$ и отпускают. Найти силу натяжения нити T в момент прохождения грузом положения равновесия.

Решение:



В момент прохождения грузом положения равновесия согласно второму закону Ньютона в проекции на ось y

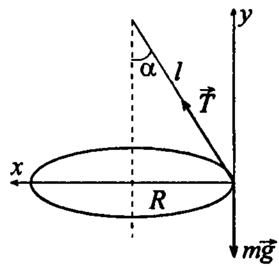
$ma_n = T - mg$ или $m\frac{v^2}{l} = T - mg$, откуда

$T = mg + \frac{mv^2}{l}$, где l — длина нити. Кроме того, $mgh = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{2gh}$. Но

$h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$. Тогда $v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$, а $\frac{mv^2}{l} = \frac{m}{l}2gh = \frac{m}{l}2gl(1-\cos\alpha) = 2mg(1-\cos\alpha)$ и сила натяжения $T = mg(1+2(1-\cos\alpha)) = 12{,}4$ Н.

2.109. Мальчик массой $m = 45$ кг вращается на «гигантских шагах» с частотой $n = 16$ об/мин. Длина канатов $l = 5$ м. Какой угол α с вертикалью составляют канаты «гигантских шагов»? Каковы сила натяжения канатов T и скорость v вращения мальчика?

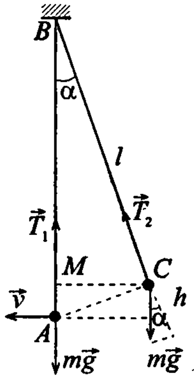
Решение:



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (1) и y: $T\sin\alpha = ma_n$ — (2). Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где $\omega = 2\pi n$, следовательно, $a_n = 4\pi^2 n^2 R$. Из рисунка видно, что $R = l\sin\alpha$ — (3), тогда $a_n = 4\pi^2 n^2 l\sin\alpha$. Подставим выражение для a_n в (2): $T\sin\alpha = m\cdot 4\pi^2 n^2 l\sin\alpha$ или $T = 4\pi^2 n^2 lm$, $T = 632$ Н. $T\cos\alpha = mg$ из (1), откуда $\cos\alpha = \frac{mg}{T}$, $\cos\alpha = 0{,}7$, $\alpha \approx 45°30'$. Скорость найдем из выражения $v = \omega R = 2\pi nl\sin\alpha$, с учетом $\omega = 2\pi n$ и (3): $v \approx 6$ м/с.

2.110. Груз массой $m = 1$ кг, подвешенный на невесомом стержне длиной $l = 0{,}5$ м, совершает колебания в вертикальной плоскости. При каком угле отклонения α стержня от вертикали кинетическая энергия груза в его нижнем положении $W_к = 2{,}45$ Дж? Во сколько раз при таком угле отклонения сила натяжения стержня T_1 в нижнем положении больше силы натяжения стержня T_2 в верхнем положении?

Решение:

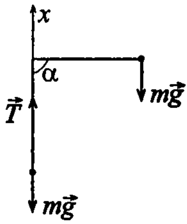


Во время колебаний груза кинетическая энергия, которой он обладает в нижней точке, переходит в потенциальную в верхнем положении. $W_к = \dfrac{mv^2}{2} = mgh$ — (1). Найдем h: $h = AB - MB$, $h = l - l\cos\alpha$, $h = l(1-\cos\alpha)$. Подставим значение h в (1): $mgl(1-\cos\alpha) = W_к$, $1-\cos\alpha = \dfrac{W_к}{mgl}$, $\cos\alpha = 1 - \dfrac{2{,}45}{1\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5} = 0{,}5$, $\alpha = 60°$. Запишем второй закон Ньютона для верхнего и нижнего положения груза: $\begin{cases} T_2 - mg\cos\alpha = ma_n & —(2), \\ T_1 - mg = ma_n & —(3); \end{cases}$ выразим из (2) и (3) T_2 и T_1: $\begin{cases} T_2 = m(a_n + g\cos\alpha) & —(4), \\ T_1 = m(a_n + g) & —(5); \end{cases}$ но $a_n = \dfrac{v^2}{l}$, а $v^2 = \dfrac{2W_к}{ml}$ $v^2 = \dfrac{2W_к}{ml}$, следовательно, $a_n = \dfrac{2W_к}{ml}$. Подставив это выражение в (4) и (5), получим следующие уравнения: $T_1 = m\cdot\left(\dfrac{2W_к}{ml} + g\right) = m\cdot\left(\dfrac{2W_к + gml}{ml}\right)$ и $T_2 = m\cdot\left(\dfrac{2W_к}{ml} + g\cos\alpha\right) = m\cdot\dfrac{2W_к + ml g\cos\alpha}{ml}$. Разделим первое уравнение на второе: $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{2W_к + mlg}{2W_к + mlg\cos\alpha}$, $T_1/T_2 = 1{,}3$.

2.111. Груз массой m, подвешенный на невесомом стержне, отклоняют на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. Найти силу натяжения T стержня в момент прохождения грузом положения равновесия.

Решение:

По второму закону Ньютона в момент прохождения положения равновесия:

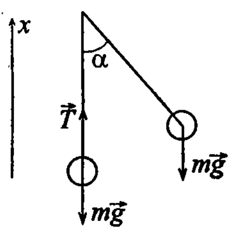


$T - mg = ma_n$ — (1), но $a_n = \frac{v^2}{l}$. Выразим из (1) T, подставив выражение для a_n: $T = mg + \frac{mv^2}{l}$. В результате преобразования потенциальной энергии в кинетическую $mgl = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v^2 = 2gl$, тогда $T = mg + \frac{m2gl}{l} = 3mg$.

2.112. Груз массой $m = 150$ кг подвешен на стальной проволоке, выдерживающей силу натяжения $T = 2{,}94$ кН. На какой наибольший угол α можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении грузом положения равновесия?

Решение:

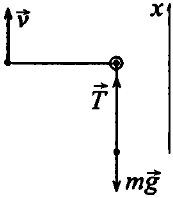
Воспользуемся формулой, полученной в задаче 1.108: $T = mg(1 + 2(1 - \cos\alpha))$. Выразим из нее $\cos\alpha$: $T = mg +$ $+ 2mg - 2mg\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{3mg - T}{2mg}$.



Подставив исходные данные, получим: $\cos\alpha = 0{,}5$, следовательно, $\alpha = 60°$.

2.113. Камень массой $m = 0{,}5$ кг привязан к веревке длиной $l = 50$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Сила натяжения веревки в нижней точке окружности $T = 44$ Н. На какую высоту h поднимется камень, если веревка обрывается в тот момент, когда скорость направлена вертикально вверх?

Решение:



Для камня в нижнем положении запишем второй закон Ньютона: $T - mg = ma_n$, где $a_n = \frac{v^2}{l}$, $T - mg = m\frac{v^2}{l}$, $v = \sqrt{\frac{l(T - mg)}{m}}$. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение камня в момент обрыва веревки. В этот момент камень обладает кинетической энергией $\frac{mv^2}{2}$, которая по мере подъема камня переходит в потенциальную. На высоте h вся кинетическая энергия перейдет в потенциальную, т.е. $\frac{mv^2}{2} = mgh$, откуда $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{l(T - mg)}{2mg}$; $h = 2$ м.

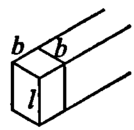
2.114. Вода течет по трубе диаметром $d = 0{,}2$ м, расположенной в горизонтальной плоскости и имеющей закругление радиусом $R = 20{,}0$ м. Найти боковое давление воды P, вызванное центробежной силой. Через поперечное сечение трубы за единицу времени протекает масса воды $m_t = 300$ т/ч.

Решение:

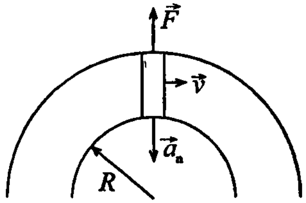
Боковое давление воды $P = \frac{F_{цб}}{ld}$ — (1), где $F_{цб}$ — центробежная сила, l — длина той части трубы, на которую производится давление, по модулю $F_{цб} = \frac{mv^2}{R}$ — (2), где $m = \rho l S$ — (3) — масса воды в объеме Sl (S — площадь поперечного сечения трубы, ρ — плотность воды). Скорость течения воды $v = \frac{m_t}{\rho S}$ — (4). Подставляя (2) — (4) в (1), получим $P = \frac{m_t^2}{R\rho d S}$; $P = 56{,}0$ Па.

2.115. Вода течет по каналу шириной $b = 0{,}5$ м, расположенному в горизонтальной плоскости и имеющему закругление радиусом $R = 10$ м. Скорость течения воды $v = 5$ м/с. Найти боковое давление воды P, вызванное центробежной силой.

Решение:



Рассмотрим участок боковой поверхности канала, площадь которого: $S = b \cdot l$. Давление: $P = \frac{F_{цб}}{S}$, где $F_{цб}$ по модулю $F = m\frac{v}{R}$. $m = = \rho V = \rho \cdot l \cdot b^2$ — масса воды в данном объеме. $F = \frac{\rho l b^2 v^2}{R}$;



$P = \frac{\rho l b^2 v^2}{Rbl} = \frac{\rho b v^2}{R}$; $P = 1{,}25$ кПа.

2.116. Найти работу A, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на $l = 20$ см, если известно, что сила F пропорциональна сжатию l и жесткость пружины $k = 2{,}94$ кН/м.

Решение:

Работа, совершаемая при сжатии пружины, определяется формулой $A = -\int_0^l F dl$ — (1), где l — сжатие. По условию сила пропорциональна сжатию, т.е. $F = -kl$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $A = \int_0^l kl dl = \frac{kl^2}{2}$; $A = 58{,}8$ Дж.

2.117. Найти наибольший прогиб h рессоры от груза массой m, положеиного на ее середину, если статический прогиб рессоры от того же груза $h_0 = 2$ см. Каким будет наибольший прогиб, если тот же груз падает на середину рессоры с высоты $H = 1$ м без начальной скорости?

Решение:

При статическом прогибе $mg = kh_0$; отсюда $k = mg/h_0$. При падении этого груза с высоты H имеем $mg(H+h) = \frac{kh^2}{2} = \frac{mgh^2}{2h_0}$, или $h^2 - 2h_0 h - 2h_0 H = 0$. Решая это уравнение, находим $h = h_0 \pm \sqrt{h_0^2 + 2h_0 H}$. Если $H = 0$, то $h = 2h_0 = 4$ см; если $H = 1$ м, то $h = 22{,}1$ см.

2.118. Акробат прыгает в сетку с высоты $H = 8$ м. На какой предельной высоте h над полом надо натянуть сетку, чтобы акробат не ударился о пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на $h_0 = 0{,}5$ м, если акробат прыгает в нее с высоты $H_0 = 1$ м.

Решение:

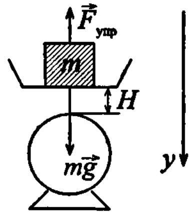
По закону сохранения энергии потенциальная энергия должна полностью перейти в энергию упругого взаимодействия $mg(H+h) = k\frac{h^2}{2}$; $mg(H_0 + h_0) = k\frac{h_0^2}{2}$; Разделив первое уравнение на второе, получим: $\frac{H+h}{H_0+h_0} = \frac{h^2}{h_0^2}$; $\frac{H}{H_0+h_0} + \frac{h}{H_0+h_0} = \frac{h^2}{h_0^2}$; $\frac{h^2(H_0+h_0) - hh_0^2}{h_0^2(H_0+h_0)} = \frac{H}{H_0+h_0}$; $(H_0+h_0)h^2 - h_0^2 \cdot h - Hh_0^2 = 0$, решим данное квадратное уравнение: $D = h_0^4 + 4Hh_0^2(H_0+h_0)$;

$h = \frac{h_0^2 \pm \sqrt{h_0^4 + 4Hh_0^2(H_0+h_0)}}{2(H_0+h_0)}$; $h_1 = 1{,}23$ м ; $h_2 = -1{,}07$ м — противоречит условию задачи.

2.119. Груз положили на чашку весов. Сколько делений покажет стрелка весов при первоначальном отбросе, если после успокоения качаний она показывает 5 делений?

Решение:

По закону сохранения энергии $W_{п1} = W_{п2}$. Потенциальная энергия гравитационного и упругого взаимодействия $W_{п1} = mgH$; $W_{п2} = \frac{kx^2}{2}$, следовательно, $mgH = \frac{kx^2}{2}$ — (1). После установления равновесия $m\vec{g} + \vec{F}_{упр} = 0$, где $F_{упр} = -kx$ — закон Гука.



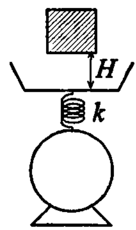
В проекциях на ось y: $mg + kx = 0$, откуда $k = \frac{mg}{x}$ (2).

Подставив (2) в (1), получим $mgH = \frac{mg}{x} \cdot \frac{x^2}{2}$; $H = \frac{x}{2}$; $x = 2H$, отсюда $x = 2 \cdot 5 = 10$ делений.

2.120. Груз массой $m = 1$ кг падает на чашку весов с высоты $H = 10$ см. Каковы показания весов F в момент удара, если после успокоения качаний чашка весов опускается на $h = 0{,}5$ см?

Решение:

По закону сохранения энергии в момент удара $W_{п1} = W_{п2}$, где $W_{п1} = mgH$, а $W_{п2} = \frac{kx_1^2}{2}$. Отсюда $mgH = \frac{kx_1^2}{2}$; $x_1 = \sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ — деформация пружины весов в момент удара. После успокоения качаний наступает равновесие $mg = F_2$, где $F_2 = kx_2$, по закону Гука, причем $x_2 = h$.



Тогда $mg = kh$; $k = \frac{mg}{h}$. Показания весов в момент удара $F = mg + F_1$, где $F_1 = kx_1 = k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ — по закону Гука.

Тогда $F = mg + k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$; $F = mg + \sqrt{2mgHk}$; $F = mg +$ $+ \sqrt{2mgH\frac{mg}{h}}$; $F = mg + mg\sqrt{\frac{2H}{h}}$; $F = mg\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{h}}\right)$, откуда $F = 72{,}5$ Н.

2.121. С какой скоростью v двигался вагон массой $m = 20$ т, если при ударе о стенку каждый буфер сжался на $l = 10$ см? Жесткость пружины каждого буфера $k = 1$ МН/м.

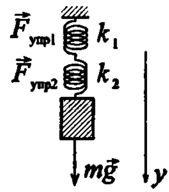
Решение:
За счет кинетической энергии движущегося поезда была совершена работа по сжатию буферов. Воспользуемся формулой, полученной в задаче 2.116. Работа по сжатию первого буфера: $A_1 = k\frac{l^2}{2}$, второго $A_2 = k\frac{l^2}{2}$; $A = A_1 + A_2$ или $A = 2k\frac{l^2}{2} = kl^2$. Тогда $\frac{mv^2}{2} = kl^2$, $v = l\sqrt{\frac{2k}{m}}$; $v = 1$ м/с.

2.122. Мальчик, стреляя из рогатки, натянул резиновый шнур так, что его длина стала больше на $\Delta l = 10$ см. С какой скоростью v полетел камень массой $m = 20$ г? Жесткость шнура $k = 1$ кН/м.

Решение:
В результате совершенной работы по растяжению шнура камень приобрел кинетическую энергию. С учетом формулы, полученной в задаче 2.116, имеем: $\frac{mv^2}{2} = k\frac{\Delta l^2}{2}$. Откуда $v = \Delta l\sqrt{\frac{k}{m}}$, $v = 22{,}3$ м/с.

2.123. К нижнему концу пружины, подвешенной вертикально, присоединена другая пружина, к концу которой прикреплен груз. Жесткости пружин равны k_1 и k_2. Пренебрегая массой пружин по сравнению с массой груза, найти отношение $W_{п1}/W_{п2}$ потенциальных энергий этих пружин.

Решение:



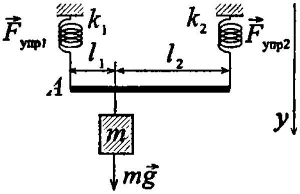
Потенциальная энергия взаимодействия для каждой отдельно взятой пружины $W_{п1} = \frac{k_1 x_1^2}{2}$ — (1); $W_{п2} = \frac{k_2 x_2^2}{2}$ — (2). Условия равновесия пружин в проекциях на ось y: $\begin{cases} mg - F_{упр1} = 0, \\ mg - F_{упр2} = 0, \end{cases}$ где по закону Гука $F_{упр} = -kx$, отсюда $\begin{cases} mg = k_1 x_1 \\ mg = k_2 x_2 \end{cases}$ и $k_1 x_1 = k_2 x_2$ — (3). Из (3) выразим: $x_1 = \frac{k_2 x_2}{x_1}$; $x_2 = \frac{k_2^2 x_2^2}{k_1^2}$. Разделив (1) на (2), получим $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_1 x_1^2}{2} \cdot \frac{2}{k_2 x_2^2}$; $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_1 x_1^2}{k_2 x_2^2}$; $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_1 k_2^2 x_2^2 / k_1^2}{k_2 x_2^2}$;

$\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_2^2 x_2^2}{k_1 k_2 x_2^2}$; $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_2}{k_1}$.

2.124. На двух параллельных пружинах одинаковой длины висит невесомый стержень длиной $L = 10$ см. Жесткости пружин $k_1 = 2$ Н/м и $k_2 = 3$ Н/м. В каком месте стержня надо подвесить груз, чтобы стержень оставался горизонтальным?

Решение:

Чтобы система находилась в равновесии, т.е. чтобы стержень был в горизонтальном положении, необходимо выполнение двух условий: $m\vec{g} + \vec{F}_{упр1} + \vec{F}_{упр2} = 0$ — (1)



и $\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{M_3} = 0$ — (2). В проекции на ось y уравнение (1) имеет вид: $mg - k_1x - k_2x = 0$ или $mg = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x$ — (3). Моменты сил относительно точки A: $M_1 = 0$; $M_2 = mgl_1$; $M_3 = k_2xL$. Тогда из уравнения (2) $mgl_1 - k_2xL = 0$, из уравнения (3) $x = \frac{mg}{k_1 + k_2}$. Следовательно, $mgl_1 - \frac{k_2mgL}{k_1 + k_2} = 0$; $l_1 = \frac{k_2L}{k_1 + k_2}$. $L = l_1 + l_2$; $l_2 = L - l_1 = L \cdot \left(1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2}\right)$; $l_1 = 6$ см; $l_2 = 4$ см.

2.125. Резиновый мяч массой $m = 0{,}1$ кг летит горизонтально с некоторой скоростью и ударяется о неподвижную вертикальную стенку. За время $\Delta t = 0{,}01$ с мяч сжимается на $\Delta l = 1{,}37$ см; такое же время Δt затрачивается на восстановление первоначальной формы мяча. Найти среднюю силу $\overline{F}$, действующую на стенку за время удара.

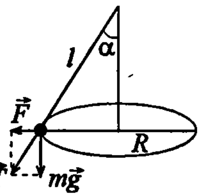
Решение:

Запишем второй закон Ньютона в виде: $F = m\Delta v / \Delta t$, но $\Delta v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$, тогда $F = \frac{m\Delta l}{\Delta t^2}$; $F = 13{,}7$ Н.

2.126. Гиря массой $m = 0{,}5$ кг, привязанная к резиновому шнуру длиной l_0, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гири $n = 2$ об/с. Угол отклонения шнура от вертикали $\alpha = 30°$. Жесткость шнура $k = 0{,}6$ кН/м. Найти длину l_0 нерастянутого резинового шнура.

Решение:

Сила натяжения шнура $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = 5{,}7$ Н вызывает растяжение шнура на Δl, причем $T = k\Delta l$; отсюда $\Delta l = \dfrac{T}{k} = 9{,}5$ мм.

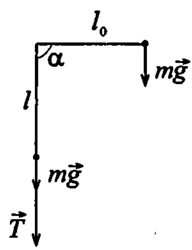


Из рисунка видно, что $\dfrac{l}{R} = \dfrac{T}{F}$ — (1). Но $F = T\sin\alpha = \dfrac{mv^2}{R} = 4\pi^2 n^2 mR$ — (2). Из (1) и (2) имеем $l = \dfrac{T}{4\pi^2 n^2 m} = 7{,}25$ см. Таким образом, длина нерастянутого резинового шнура $l_0 = l - \Delta l = 6{,}3$ см.

2.127. Гирю массой $m = 0{,}5$ кг, привязанную к резиновому шнуру длиной $l_0 = 9{,}5$ см, отклоняют на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. Найти длину l резинового шнура в момент прохождения грузом положения равновесия. Жесткость шнура $k = 1$ кН/м.

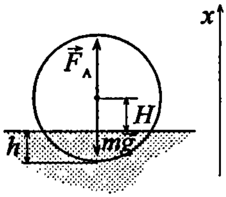
Решение:

Сила натяжения шнура T совершает работу по растяжению шнура на Δl. $T = k\Delta l$. Решая аналогичную задачу для нерастяжимого шнура (см. задачу 2.111), мы получили, что при прохождении положения равновесия $T = 3mg$. Тогда $3mg = k\Delta l$; $l - l_0 = \dfrac{3mg}{k}$; $l = \dfrac{3mg}{k} + l_0$; $l \approx 11$ см.



2.128. Мяч радиусом $R = 10$ см плавает в воде так, что его центр масс находится на $H = 9$ см выше поверхности воды. Какую работу надо совершить, чтобы погрузить мяч в воду до диаметральной плоскости?

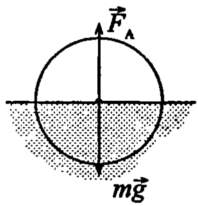
Решение:



Мяч плавает, если сила тяжести, действующая на него, уравновешивается силой Архимеда, т.е. $mg = F_A$, или $mg = \rho_0 V_0 g$ — (1), где V_0 — объем шарового сегмента высотой h, находящегося в воде при равновесии, ρ_0 — плотность воды, m — масса мяча. Очевидно, что $H + h = R$, т.е. раднусу мяча. Если теперь погрузить мяч в воду на глубину x, то сила Архимеда превысит силу тяжести, действующую на мяч, и результирующая сила, выталкивающая мяч из воды, будет $F_x = F'_A - mg$ — (2). Против этой силы F_x и должна быть совершена работа. Сила Архимеда $F'_A = \rho_0 V g$ — (3), где V — объем шарового сегмента высотой $h + x$. Из (1) — (3) имеем $F_x = \rho_0 V g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g (V - V_0) = \rho_0 g V_x$, где V_x — объем шарового слоя высотой x. Шаровой сегмент высотой l имеет объем шарового слоя $V_x = V - V_0 =$ $= \frac{\pi(x+h)^2}{3}[3R - (x+h)] - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$. Тогда $F_x = \rho_0 g V_x =$ $= \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left[3R(x+h)^2 - (x+h)^3 - h^2(3R - h)\right]$ — (4). Работа, которую надо совершить при погружении мяча до диаметральной плоскости, будет $A = \int_0^H Fxdx$ — (5). Подставляя (4) в (5), интегрируя и учитывая, что $H + h = R$, получим, после подстановки данных задачи, $A = 0{,}74$ Дж.

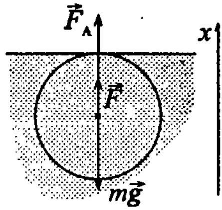
2.129. Шар радиусом $R = 6$ см удерживается внешней силой под водой так, что его верхняя точка касается поверхности воды. Какую работу A произведет выталкивающая сила, если отпустить шар и предоставить ему свободно плавать? Плотность материала шара $\rho = 0{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:



Определим положение шара при свободном плавании, в этом случае сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешивается силой Архимеда F_A. Следовательно, $mg = F_A$;

$m = V_ш \rho$; $\quad \frac{3}{4}\pi R^3 \rho g = \rho_в V_0 g$, где



$\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды, V_0 — объем погруженной части шара. Отсюда $V_0 = \frac{\rho}{\rho_в}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ или $V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, следовательно, $V_0 = \frac{1}{2} V_ш$, т.е. шар погружен в воду до диаметральной плоскости. В первоначальном положении на шар действует сила $F = F_A - mg$. В предыдущей задаче была получена формула, выражающая зависимость выталкивающей силы от глубины погружения x, если при свободном плавании в воде находился шаровой сегмент высотой h. Учитывая, что в данном случае $h = R$, имеем $F = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left[3R(x+R)^2 - (x+R)^3 - 2R^3\right]$.

Если отпустить мяч и предоставить ему свободно плавать, то в этом случае работа выталкивающей силы:

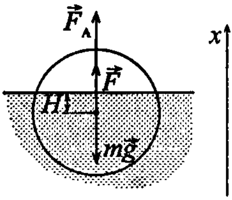
$$A = \int_0^R F dx = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\int_0^R \left[3R(x+R)^2 - (x+R)^3 - 2R^3\right];$$

$$A = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left[3R\frac{(x+R)^3}{3}\Bigg|_0^R - \frac{(x+R)^4}{4}\Bigg|_0^R - 2R^3 x\Big|_0^R\right];$$

$$A = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left[7R^4 - \frac{15}{4}R^4 - 2R^4\right];\ A = \frac{5\pi\rho_0 g}{3\cdot 4}R^4;\ A = 0{,}17 \text{ Дж}.$$

2.130. Шар диаметром $D = 30$ см плавает в воде. Какую работу A надо совершить, чтобы погрузить шар в воду на $H = 5$ см глубже? Плотность материала шара $\rho = 0{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:



Определим положение шара при свободном плавании, в этом случае сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешивается силой Архимеда $\vec{F_A}$, т.е. $mg = F_A$. Масса шара $m = V_ш \rho = \frac{3}{4}\pi R^3 \rho$; сила Архимеда $F_A = \rho_в V_0 g$. Тогда $\frac{3}{4}\pi R^3 \rho g = \rho_в V_0 g$, где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды, V_0 — объем погруженной части шара. Отсюда $V_0 = \frac{\rho}{\rho_в}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ или $V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, следовательно, $V_0 = \frac{1}{2}V_ш$, т.е. шар погружен в воду до диаметральной плоскости. Если теперь погрузить шар в воду на глубину x, то сила Архимеда превысит силу тяжести, действующую на шар, и результирующая сила, выталкивающая шар из воды, будет $F_x = F'_A - mg$. Против этой силы F_x и должна быть совершена работа. Сила Архимеда $F'_A = \rho_0 V g$ — (3), где V — объем шарового сегмента высотой $R + x$. Тогда $F = \rho_0 V g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g(V - V_0)$. $V - V_0 = V_x$ — объем шарового слоя высотой x. $V_x = \frac{\pi(R+x)^2}{3} \times$ $\times(3R - (R+x)) - \frac{2}{3}\pi R^3$; $V_x = \frac{\pi}{3}\left((R+x)^2(2R-x) - 2R^3\right)$; $V_x = \frac{\pi}{3}\left(3R^2 x - x^3\right)$. Работа, затрачиваемая при погружении

шара на $H = 5$ см глубже: $A = \int\limits_0^H F dx$; $A = \frac{\pi\rho_0 g}{3} \times$
$\times \int\limits_0^H \left(3R^2 x - x^3\right) dx$; $A = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left(3R^2 \frac{H^2}{2} - \frac{H^4}{4}\right)$; $A = 0{,}84$ Дж.

2.131. Льдина площадью поперечного сечения $S = 1\,\text{м}^2$ и высотой $h = 0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу A надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

Решение:

Обозначим ρ — плотность льда, ρ_0 — плотность воды. При свободном плавании на льдину действуют две силы, уравновешивающие друг друга: сила тяжести и сила Архимеда (рис.1), т.е. $mg = F_A$ — (1). Найдем

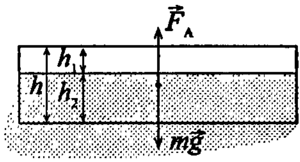


Рис. 1

высоту h_2 той части льдины, которая находится в воде при свободном плавании. Т. к. $m = \rho V = \rho Sh$, а $F_A = \rho_0 V_0 g = \rho_0 S h_2 g$, то, подставив эти выражения в (1), получим: $h_2 = \frac{\rho h}{\rho_0} = 0{,}36$ м — (2). Если теперь погрузить льдину в воду на глубину x (рис.2), то сила Архимеда превысит силу тяжести и результирующей силой будет выталкивающая сила $F = F'_A - mg$. Против нее и надо совершать работу. $F'_A = \rho_0 g S(h_2 + x)$, то-

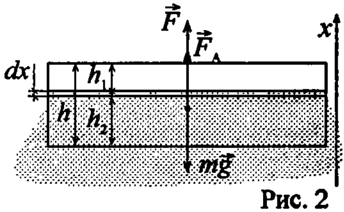


Рис. 2

гда $F = \rho_0 g S(h_2 + x) - \rho Shg$; преобразовав выражение с учетом (2), получим $F = Sg\left(\rho_0\left(\frac{\rho h}{\rho_0} + x\right) - \rho h\right) = Sg\rho_0 x$.

Работа, совершаемая при погружении льдины на глубину x: будет равна $A=\int_0^{h_1} F dx$; $A = Sg\rho_0 \int_0^{h_1} x dx = Sg\rho_0 \frac{h_1^2}{2}$;

$h_1 = h - h_2 = h - \frac{\rho h}{\rho_0} = \frac{h(\rho_0 - \rho)}{\rho_0}$, в результате получим:

$A = Sg\rho_0 \frac{h^2(\rho_0 - \rho)^2}{2\rho_0^2} = \frac{Sgh^2(\rho_0 - \rho)^2}{2\rho_0}$; $A = 7{,}84$ Дж.

2.132. Найти силу гравитационного взаимодействия F между двумя протонами, находящимися на расстоянии $r = 10^{-16}$ м друг от друга. Масса протона $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение:

Сила гравитационного взаимодействия выражается формулой $F = G\frac{m^2}{r^2}$. Подставляя числовые данные, получим $F = 1{,}86 \cdot 10^{-44}$ Н.

2.133. Два медных шарика с диаметрами $D_1 = 4$ см и $D_2 = 6$ см находятся в соприкосновении друг с другом. Найти гравитационную потенциальную энергию $W_п$ этой системы.

Решение:

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия: $W_п = -G\frac{m_1 m_2}{r}$ — (1), где r — расстояние между центрами масс шаров. Знак «–» говорит о том, что при сближении тел потенциальная энергия убывает, а при $R = \infty$ потенциальная энергия равна нулю. $r = \frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2} = \frac{D_1 + D_2}{2}$;

$m_1 = v_1\rho$; $m_2 = v_2\rho$. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, тогда $m_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^3\rho$; $m_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_2}{2}\right)^3\rho$. Подставив полученные выражения в уравнение (1), получим: $W_п = -G\frac{2\cdot 16\pi^2(D_1/2)^3(D_2/2)^3\cdot\rho^2}{9(D_1+D_2)}$. Учитывая, что плотность меди $\rho = 8{,}6\cdot 10^3$ кг/м^3, найдем: $W_п = -3{,}8\cdot 10^{-10}$ Дж.

2.134. Вычислить гравитационную постоянную G, зная радиус земного шара R, среднюю плотность земли ρ и ускорение свободного падения g у поверхности Земли (см. табл. 4 и 5).

Решение:

В соответствии с законом всемирного тяготения, тело массой m, находящееся у поверхности Земли, притягивается ею с силой $P = G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса Земли, R — ее радиус. С другой стороны, $P = mg$. Приравнивая эти величины, найдем, что $g = G\frac{M}{R^2}$. Взяв из таблицы 5 значения R, ρ, g и зная что $M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho$, выразим $G = \frac{gR^2\cdot 3}{4\pi R^3\rho} = \frac{3g}{4\pi R\rho}$; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

2.135. Принимая ускорение свободного падения у Земли $g = 9{,}8$ м/с^2 и пользуясь данными табл. 5, составить таблицу значений средних плотностей планет Солнечной системы.

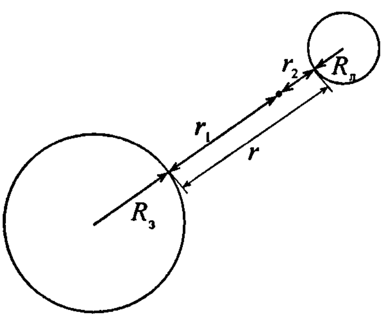
Решение:

В задаче 2.134 мы получили формулу для вычисления гравитационной постоянной $G = 3g / 4\pi R\rho$. Изменив значения g, R и ρ (g', R' и ρ'), получим то же значение гравитационной постоянной $G = 3g' / 4\pi R'\rho'$. Приравняв правые части уравнений, выразим среднюю плотность планеты: $\frac{3g}{4\pi R\rho} = \frac{3g'}{4\pi R'\rho'}$; $\frac{g}{R\rho} = \frac{g'}{R'\rho'}$; $\rho' = \frac{R\rho g'}{gR'}$. Используя данные таблиц 4 и 5 и полученную формулу, составим таблицу:

Планета	ρ, 10^3 кг/м^3	Планета	ρ, 10^3 кг/м^3
Меркурий	5,50	Юпитер	1,32
Венера	4,80	Сатурн	0,71
Земля	5,50	Уран	1,26
Марс	3,90	Нептун	1,6

2.136. Космическая ракета летит на Луну. В какой точке прямой, соединяющей центры масс Луны и Земли, ракета будет притягиваться Землей и Луной с одинаковой силой?

Решение:



Введем следующие обозначения: m — масса ракеты, $M_з$ — масса Земли, $M_Л$ — масса Луны, $R_з$ — радиус Земли, $R_Л$ — радиус Луны, r_1 — расстояние от поверхности Земли до искомой точки и r_2 — расстояние от поверхности Луны до искомой точки. Сила притяжения между ракетой и Землей: $F_1 = G\frac{mM_з}{(r_1 + R_з)^2}$. Сила притяжения между ракетой и Луной: $F_2 = G\frac{mM_Л}{(r_2 + R_Л)^2}$.

Ракета будет притягиваться Землей и Луной с одинаковой силой, когда $F_1 = F_2$, т.е. $G\frac{mM_З}{(r_1 + R_З)^2} = G\frac{mM_Л}{(r_2 + R_Л)^2}$;

$\frac{M_З}{(r_1 + R_З)^2} = \frac{M_Л}{(r_2 + R_Л)^2}$ — (1). $r_1 + r_2 = r$ — расстояние от Земли до Луны, $r_2 = r - r_1$. Подставляя это выражение в уравнение (1) и извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получим: $\frac{\sqrt{M_З}}{r_1 + R_З} = \frac{\sqrt{M_Л}}{r - r_1 + R}$, откуда

$$r_1 + R_З = \sqrt{\frac{M_З}{M}}(r - r_1 + R_Л);$$

$$r_1\left(1 + \sqrt{\frac{M_З}{M_Л}}\right) = \sqrt{\frac{M_З}{M_Л}}(r + R_Л) - R_З \quad \text{— (2);} \quad 1 + \sqrt{\frac{M_З}{M_Л}} =$$

$$= \frac{\sqrt{M_Л} + \sqrt{M_З}}{\sqrt{M_Л}}$$ — (3). Выразим r_1 из (2) с учетом (3):

$r_1 = \frac{\sqrt{M_З}(r + R_Л) - \sqrt{M_Л} \cdot R_З}{\sqrt{M_Л} + \sqrt{M_З}}$. Подставляя табличные величины, получим: $r_1 = 3{,}43 \cdot 10^5$ км.

2.137. Сравнить ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_Л$ с ускорением свободного падения у поверхности Земли $g_З$.

Решение:

В соответствии с законом всемирного тяготения, тело массой m, находящееся у поверхности Земли, притягивается ею с силой $P = G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса Земли,

R — ее раднус. С другой стороны, $P = mg$. Приравнивая эти величины, найдем, что $g = G\frac{M}{R^2}$. Тогда ускорение свободного падения у поверхности Земли: $g_З = G\frac{M_З}{R_З^2}$, где $M_З$ и $R_З$ — масса и радиус Земли. Ускорение свободного падения у поверхности Луны: $g_Л = G\frac{M_Л}{R_Л^2}$, где $M_Л$ и $R_Л$ — масса и радиус Луны. Отсюда $\frac{g_Л}{g_З} = \frac{M_Л R_З^2}{R_Л^2 M_З}$; $g_Л = 0{,}165 g_З$.

2.138. Как изменится период колебания T математического маятника при перенесении его с Земли на Луну? Указание: формула для периода колебания математического маятника приведена в §12.

Решение:

Период колебания математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

На Земле $T_З = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_З}}$; на Луне $T_Л = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Отношение $\frac{T_Л}{T_З} = \sqrt{\frac{g_З}{g_Л}}$; значение $\frac{g_Л}{g_З} = 0{,}165$ было найдено в задаче 2.137. Тогда $\frac{T_Л}{T_З} = 2{,}46$; $T_Л = 2{,}46 \cdot T_З$, т.е. при перенесении математического маятника с Земли на Луну период его колебаний увеличится в 2,46 раза.

2.139. Найти первую космическую скорость v_1, т.е. скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно начало двигаться по круговой орбите в качестве ее спутника.

Решение:

Сила гравитационного взаимодействия между телом и Землей $F = \frac{GmM}{r^2}$, где m — масса тела, M — масса Земли и r — расстояние между ними. У поверхности Земли r равно радиусу Земли R и $F = mg$. Тогда $F = mg = \frac{GmM}{R^2}$. При движении тела вокруг Земли по круговой орбите сила гравитационного взаимодействия является центростремительной силой. Таким образом, $F = \frac{mv_1^2}{R}$; отсюда первая космическая скорость $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} = 7{,}9$ км/с.

2.140. Найти вторую космическую скорость v_2, т.е. скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно преодолело земное тяготение и навсегда удалилось от Земли.

Решение:

Для того чтобы тело удалилось от Земли, необходимо, чтобы кинетическая энергия тела была достаточна для преодоления гравитационной потенциальной энергии, т.е. $\frac{mv^2}{2} \geq \frac{GmM}{R}$. У поверхности Земли $\frac{GM}{R^2} = g$, т.к. $F = mg = \frac{GmM}{R^2}$; поэтому $\frac{mv_2^2}{2} \geq mgR$, откуда вторая космическая скорость $v_2 \geq \sqrt{2gR} = 11{,}2$ км/с.

2.141. Принимая ускорение свободного падения у Земли равным $g = 9{,}80$ м/с^2 и пользуясь данными табл. 5, составить таблицу значений первой и второй космических скоростей у поверхности планет Солнечной системы.

Решение:

В двух предыдущих задачах были выведены формулы для нахождения первой и второй космических скоростей: $v_1 = \sqrt{gR}$; $v_2 = \sqrt{2gR}$, где R — радиус планеты, g — ускорение свободного падения вблизи поверхности. Причем $g = kg_З$, коэффициенты k, как и радиусы планет, приведены в таблице 4 приложения. Исходя из этого, составляем таблицу:

Планета	v_1, км/с	v_2, км/с	Планета	v_1, км/с	v_2, км/с
Меркурий	3,0	4,25	Юпитер	42,6	60,4
Венера	7,2	10,2	Сатурн	25,7	36,4
Земля	7,9	11,2	Уран	15,2	21,5
Марс	3,57	5,05	Нептун	16,6	23,5

2.142. Найти линейную скорость v движения Земли по круговой орбите.

Решение:

Линейная скорость движения по окружности $v = \omega R$, где ω — частота вращения, R — расстояние до Солнца. $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период обращения Земли вокруг Солнца. Отсюда $v = \frac{2\pi R}{T}$, $v = 30$ км/с.

2.143. С какой линейной скоростью v будет двигаться искусственный спутник Земли по круговой орбите: а) у поверхности Земли; б) на высоте $h = 200$ км и $h = 7000$ км от поверхности Земли? Найти период обращения T спутника Земли при этих условиях.

Решение:

а) Сила притяжения Земли создает центростремительное ускорение спутника, равное $\frac{v^2}{R}$, где R — радиус орбиты, а v — скорость спутника. Если орбита проходит вблизи поверхности Земли, то спутник, как и любое другое тело у поверхности Земли, будет иметь ускорение, направленное к центру Земли $g = \frac{v_1^2}{R_З}$, где $R_З$ — раднус Земли. Отсюда скорость спутника вблизи Земли: $v_1 = \sqrt{gR_З}$; $v = 7{,}91$ м/с. При движении по круговой орбите радиуса $R < R_З$ ускорение свободного падения убывает в отношении, обратном отношению квадратов расстояний от центра. Ускорение g_R на расстоянии R от центра Земли найдем по формуле: $g_R = g\frac{R_З^2}{R^2}$. Тогда скорость движения спутника по круговой орбите радиуса R найдется из уравнения $g_R = g\frac{R_З^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$, откуда $v = \sqrt{g\frac{R_З^2}{R}}$; $R = h + R_З$, отсюда $v = \sqrt{g\frac{R_З^2}{(R_З + h)}}$ — (1). При $h = 200$ км $v_2 = 7{,}79$ км/с. При $h = 7000$ км $v_3 = 5{,}46$ км/с. Период обращения спутника $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \frac{v}{R}$, отсюда $T = \frac{2\pi R}{v}$ — (2).

$T_1 = \frac{2\pi R_З}{v_1}$; $T_1 = 1$ ч 25 мин; $T_2 = \frac{2\pi(R_З + h_1)}{v_2}$ — (3);

$T_2 = 1$ ч 28 мин; $T_3 = \frac{2\pi(R_З + h_2)}{v_3}$; $T_3 = 4$ ч 16 мин.

2.144. Найти зависимость периода обращения T искусственного спутника, вращающегося по круговой орбите у поверхности центрального тела, от средней плотности этого тела. По данным, полученным при решении задачи 2.135, составить таблицу значений периодов обращений искусственных спутников вокруг планет Солнечной системы.

Решение:

Вблизи поверхности планеты спутник ведет себя так же, как и любое тело, на которое не действуют никакие силы, кроме сил гравитации. Свяжем ускорение свободного падения со средней плотностью планеты. В соответствии с законом всемирного тяготения, тело массой m, находящееся у поверхности планеты, притягивается ею с силой $P = G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса планеты, R — ее радиус. С другой стороны, $P = mg$. Приравнивая эти величины, найдем, что $g = G\frac{M}{R^2}$. Зная, что $M = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$, выразим $g = \frac{4}{3}G\pi R\rho$ — (1). Воспользуемся уравнением (2) из предыдущей задачи для периода обращения спутника вблизи поверхности планеты: $T = 2\pi R / v$ — (2). Ускорение $g = v^2 / R$, откуда $v = \sqrt{gR}$. Подставим эту формулу в (2). $T = \frac{2\pi R}{\sqrt{gR}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{4G\pi R\rho R / 3}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$. Взяв из таблицы, приведенной в задаче 2.135, значения средних плотностей планет ρ, вычислим значения периода обращения спутника и заполним таблицу:

Планета	T, ч	Планета	T, ч
Меркурий	1,41	Юпитер	2,86
Венера	1,50	Сатурн	3,90
Земля	1,41	Уран	2,94
Марс	1,66	Нептун	2,61

2.145. Найти центростремительное ускорение a_n, с которым движется по круговой орбите искусственный спутник Земли, находящийся на высоте $h = 200$ км от поверхности Земли.

Решение:

В задаче 2.143 была получена формула для вычисления линейной скорости искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите на высоте h от ее поверхности: $v=\sqrt{g\frac{R_З^2}{R}}$ — (1), где $R_З$ — радиус Земли, R — расстояние от спутника до центра Земли, т.е. $R=R_З+h$. Центростремительное ускорение $a_n=\frac{v^2}{R}$ или, с учетом уравнения (1), $a_n=\frac{gR_З^2}{R^2}=\frac{gR_З^2}{(R_З+h)^2}$; $a_n=9{,}2$ м/с^2.

2.146. Планета Марс имеет два спутника — Фобос и Деймос. Первый находится на расстоянии $r=0{,}95\cdot10^4$ км от центра масс Марса, второй на расстоянии $r=2{,}4\cdot10^4$ км. Найти период обращения T_1 и T_2 этих спутников вокруг Марса.

Решение:

Воспользуемся уравнением (3) и уравнением (1) из задачи 2.143: $T=\frac{2\pi(R_М+r)}{v}$ — (3), где $R_М$ — радиус Марса, v — линейная скорость спутника; $v=\sqrt{g\frac{R_М^2}{R_М+r}}$ — (1).

Подставив (1) в (3), получим $T=\frac{2\pi(R_М+r)\sqrt{(R_М+r)}}{\sqrt{gR_М^2}}$;

$T=\frac{2\pi(R_М+r)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{gR_М^2}}$; $T_1=\frac{2\pi(R_М+r_1)}{\sqrt{gR_М^2}}$; $T_1=7{,}8$ ч. Для периода обращения второго спутника, рассуждая аналогично, получим $T_2=31{,}2$ ч.

2.147. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора с запада на восток. На какой высоте h от поверхности Земли должен находиться этот спутник, чтобы он был неподвижен по отношению к наблюдателю, который находится на Земле?

Решение:

Для того чтобы спутник был неподвижен относительно наблюдателя на Земле, необходимо, чтобы его период обращения был равен периоду обращения Земли, т. е. 24 часам. Воспользуемся уравнениями (1) и (3), полученными в задаче 2.143: $v=\sqrt{g\dfrac{R_3}{(R_3+h)}}$; $T=\dfrac{2\pi(R_3+h)}{v}$, откуда $T=\dfrac{2\pi(R_3+h)\sqrt{R_3+h}}{\sqrt{gR_3^2}}$ — (1). Выразим из (1) h:

$$T^2=\frac{4\pi^2(R_3+h)^3}{gR_3^2};\quad R_3+h=\sqrt[3]{\frac{gT^2R_3^2}{4\pi^2}};\quad h=\sqrt[3]{\frac{gT^2R_3^2}{4\pi^2}}-R_3.$$

Подставив числовые значения, получим: $h=6{,}38\cdot10^6=$ $=35890$ км.

2.148. Искусственный спутник Луны движется по круговой орбите на высоте $h=20$ км от поверхности Луны. Найти линейную скорость v движения этого спутника, а также период его обращения T вокруг Луны.

Решение:

Воспользуемся уравнением (3) и уравнением (1) из задачи 2.143: $v=\sqrt{g\dfrac{R^2}{R+r}}$, $T=\dfrac{2\pi(R+r)}{v}$, где R — радиус Луны, см. таблицу 5 приложения; $g=0{,}165g_3$ (из задачи 2.137). Подставляя числовые данные, получим $v=1{,}7$ км/с и $T=1$ ч 50 мин.

2.149. Найти первую и вторую космические скорости для Луны (см. условия 2.139 и 2.140).

Решение:

В задачах 2.139 и 2.140 были выведены уравнения для нахождения первой и второй космических скоростей для Земли. $v_1 = \sqrt{gR}$; $v_2 = \sqrt{2gR}$. Подставив в них раднус Луны (таблица 5) и учитывая, что ускорение свободного падения на Луне связано с земным соотношением $g_Л = 0{,}165 g_З$, найдем искомые значения скоростей: $v_1 = \sqrt{0{,}165 g_З \cdot R_Л}$; $v_1 = 1{,}7$ км/с и $v_2 = \sqrt{2 \cdot 0{,}165 g_З \cdot R_Л}$; $v_2 = 2{,}4$ км/с.

2.150. Найти зависимость ускорения свободного падения g от высоты h над поверхностью Земли. На какой высоте h ускорение свободного падения g_h составит 0,25 ускорения свободного падения g у поверхности Земли.

Решение:

У поверхности Земли имеем $F = mg = \dfrac{GmM}{R^2}$ — (1), где R — радиус Земли. На высоте h от поверхности Земли $mg_h = \dfrac{GmM}{(R+h)^2}$ — (2). Из уравнений (1) и (2) получим $\dfrac{g_h}{g} = \dfrac{R^2}{(R+h)^2}$ — (3). Уравнение (3) дает зависимость $\dfrac{g_h}{g}$ от высоты h. Обозначим $\dfrac{g_h}{g} = n$; тогда из (3) имеем уравнение $h^2 + 2Rh + \left(R^2 - \dfrac{R^2}{n}\right) = 0$. Решая это уравнение, находим $h = -R \pm \dfrac{R}{\sqrt{n}}$. Т. к. h должно быть больше нуля, то надо взять решение со знаком плюс, т.е. $g_h = 0{,}25g$ на высоте, равной радиусу Земли.

2.151. На какой высоте h от поверхности Земли ускорение свободного падения $g_h = 1$ м/с^2?

Решение:
В предыдущей задаче получена зависимость отношения $\frac{g_h}{g}$ от высоты h. $\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$, где R — радиус Земли. Выразим отсюда h: $(R+h)^2 = \frac{gR^2}{g_h}$; $h = R\sqrt{\frac{g}{g_h}} - R$. Подставив числовые значения, получим $h = 13590$ км.

2.152. Во сколько раз кинетическая энергия $W_к$ искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите, меньше его гравитационной потенциальной энергии $W_п$?

Решение:
Запишем выражения для $W_к$ и $W_п$. $W_к = \frac{mv^2}{2}$ — (1); $W_п = -G\frac{mM}{r}$ — (2). Здесь v — линейная скорость спутника; m — масса спутника; M — масса Земли; r — радиус орбиты спутника. Воспользуемся уравнением (1) из задачи 2.143: $v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$ — (3), где R — радиус Земли, а $R+h=r$ — (4). Подставив (3) в (1), с учетом (4) получим $W_к = \frac{mgR^2}{2r}$. Взяв $W_п$ по модулю, найдем отношение

энергий $\frac{W_п}{W_к}=\frac{GmM2r}{rmgR^2}=\frac{2GM}{gR^2}$. Подставим числовые данные $\frac{W_п}{W_к}\approx 2$.

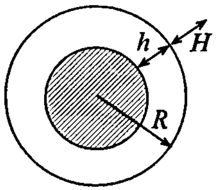
2.153. Найти изменение ускорения свободного падения при опускании тела на глубину h. На какой глубине ускорение свободного падения g_h составляет 0,25 ускорения свободного падения g у поверхности Земли? Плотность Земли считать постоянной. Указание: учесть, что тело, находящееся на глубине h над поверхностью Земли, не испытывает со стороны вышележащего слоя толщиной h никакого притяжения, так как притяжения отдельных частей слоя взаимно компенсируются.

Решение:

Пусть m — масса тела, находящегося на расстоянии h от поверхности Земли и на расстоянии r от ее центра масс. Учитывая указание, данное в условии задачи, можем написать: $F_h=mg_h=GmM_r/r^2$ — (1), где M_r — масса шара раднусом r и с плотностью, равной плотности Земли ρ. Так как $M_r=\frac{4\pi r^3\rho}{3}$, то $mg_h=\frac{4Gm\pi R\rho}{3}$. У поверхности Земли $F=mg=\frac{GmM}{R^2}=\frac{4Gm\pi R\rho}{3}$ — (2). Из (1) и (2) получим $\frac{g_h}{g}=\frac{r}{R}=\frac{(R-h)}{R}$ — (3) . Обозначим $\frac{g_h}{g}=n$, тогда из (3) имеем $h=R(1-n)$. Если $n=0{,}25$, то $h=0{,}75R$.

2.154. Каково соотношение между высотой H горы и глубиной h шахты, если период колебания маятника на вершине горы и на дне шахты один и тот же. Указание: формула для периода колебания математического маятника приведена в § 12.

Решение:



Период колебания математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Т.к. периоды колебаний равны, то равны и ускорения свободного падения $T_h = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_h}}$ и $T_H = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_H}}$, отсюда $g_h = h_H$. Сила тяжести $F = mg$, с другой стороны, по закону всемирного тяготения $F = G\frac{mM}{r^2}$. Приравняем правые части уравнений: $mg = G\frac{mM}{r^2}$, отсюда $g = \frac{GM}{r^2}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли. Тело, находящееся на глубине h под землей, не испытывает со стороны вышележащего шарового слоя толщиной h никакого притяжения, т.к. притяжения отдельных частей слоя взаимно компенсируются. Масса заштрихованной части Земли: $M_1 = \rho V_1$; $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$; $r_1 = R - h$. Тогда $g_h = \frac{GM_1}{r_1^2} = G\frac{4\pi(R-h)^3\rho}{3(R-h)^2}$ — (1). Отдельно преобразуем выражения, входящие в уравнение (1): $(R-h)^3 = (R^3 - 3R^2h + 3Rh^2 - h^3)$; $(R-h)^3 = R^3\left(1 - 3\frac{h}{R} + 3\frac{h^2}{R^2} - \frac{h^3}{R^3}\right)$;

Поскольку $h << R$, то $(R-h)^3 \approx R^3\left(1 - 3\frac{h}{R^3}\right)$. Аналогично $(R-h)^2 = (R^2 - 2Rh + h^2)$, откуда $(R-h)^2 \approx R^2\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$.

Тогда из (1) $g_h = G\dfrac{3\pi R(1-3h/R)\rho}{4(1-2h/R)}$ — (2). На высоте H имеем $g_h = G\dfrac{M}{r_2^2}$, где $M = \rho\dfrac{4}{3}\pi R^3$; $r_2 = R + H$, т.е. $g_H = G\dfrac{4\pi R^3\rho}{3(R+H)^2}$ — (3). Поскольку $H << R$, то $(R+H)^2 = \left[R\left(1+\dfrac{H}{R}\right)\right]^2$; $(R+H)^2 = R^2\left(1+2\dfrac{H}{R}+\dfrac{H^2}{R^2}\right)$; $(R+H)^2 \approx R^2\left(1+2\dfrac{H}{R}\right)$. Из (3) $g_H = G\dfrac{4\pi\rho R}{3(1+2H/R)}$ — (4). Поскольку $g_h = g_H$, то, приравняв правые части (2) и (4), получим $G\dfrac{4\pi R(1-3h/R)\rho}{3(1-2h/R)} = G\dfrac{4\pi\rho R}{3(1+2H/R)}$, откуда $\dfrac{1-3h/R}{1-2h/R} = \dfrac{1}{1+2H/R}$ — (5). Воспользуемся выражением для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{1}{1-q}$. При $q << 1$; $\dfrac{1}{1-q} = 1+q$; $\dfrac{1}{1+q} = 1-q$. Тогда уравнение (5) можно записать в виде $\left(1-3\dfrac{h}{R}\right)\left(1+\dfrac{2h}{R}\right) = 1-2\dfrac{H}{R}$ или $1-3\dfrac{h}{R}+\dfrac{2h}{R}-6\dfrac{h^2}{R^2} = 1-2\dfrac{H}{R}$. Слагаемым $6\dfrac{h^2}{R^2}$, ввиду его малости, можно пренебречь. Тогда $1-\dfrac{h}{R} = 1-\dfrac{2H}{R}$; отсюда $h = 2H$.

2.155. Найти период обращения T вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось R_1

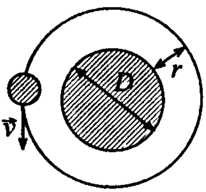
ее эллиптической орбиты превышает большую полуось R_2 земной орбиты на $\Delta R = 0{,}24 \cdot 10^8$ км.

Решение:

По третьему закону Кеплера $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$. Так как нас интересует период обращения планеты Солнечной системы, то целесообразно в качестве планеты с известными значениями T_2 и R_2 взять Землю. Для нашего случая $T_2 = 12$ мес, $R_2 = 1{,}5 \cdot 10^8$ км. По условию $R_1 = 1{,}74 \cdot 10^8$ км. Тогда из (1) имеем $T_1 = T_2\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} = 15$ мес; $T_1 = 450$ сут.

2.156. Орбита искусственной планеты близка к круговой. Найти линейную скорость v ее движения и период T ее обращения вокруг Солнца, считая известным диаметр Солнца D и его среднюю плотность ρ. Среднее расстояние планеты от Солнца $r = 1{,}71 \cdot 10^8$ км.

Решение:



По второму закону Ньютона сила тяготения $F_т = ma_n$. По закону всемирного тяготения $F_т = G\frac{mM}{(D/2+r)^2}$. Т. к. левые части уравнений равны, приравняем и правые части этих уравнений: $ma_n = G\frac{mM}{(D/2+r)^2}$, отсюда $a_n = \frac{GM}{(D/2+r)^2}$. Масса Солнца $M = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3\rho = \frac{1}{6}\pi D^3\rho$, тогда $a_n = \frac{G\pi D^3\rho}{6(D/2+r)^2}$.

С другой стороны центростремительное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R+r} = \frac{v^2}{D/2+r}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{v^2}{D/2+r} = \frac{G\pi D^3 \rho}{6(D/2+r)^2};$$

$$v^2 = \frac{G\pi D^3 \rho}{6(D/2+r)} = \frac{G\pi D^3 \rho}{3D+6R}; \; v = \sqrt{\frac{G\pi D^3 \rho}{3D+6R}}; \; v = 2{,}78 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

$$T = \frac{2\pi(D/2+r)}{v} = \frac{2\pi(D+2r)}{2v} = \frac{\pi(D+2r)}{v}; \; T = 450 \text{ суток}.$$

2.157. Большая полуось R_1 эллиптической орбиты первого в мире спутника Земли меньше большой полуоси R_2 орбиты второго спутника на $\Delta R = 800$ км. Период обращения вокруг Земли первого спутника в начале его движения был $T_1 = 96{,}2$ мин. Найти большую полуось R_2 орбиты второго искусственного спутника Земли и период T_2 его обращения вокруг Земли.

Решение:

Найдем большую полуось орбиты Луны $R_Л = \langle R \rangle + R_3 = 390370$ км. Зная период обращения Луны, применим третий закон Кеплера: $\frac{T_Л^2}{T_1^2} = \frac{R_Л^3}{R_1^3}$; $R_1 = R_Л \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_Л^2}}$.

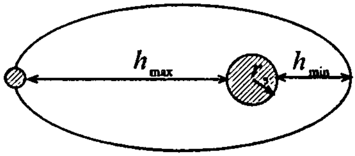
По условию $R_2 = R_1 + \Delta R = R_Л \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_Л^2}} + \Delta R$; $R_2 = 7{,}88 \cdot 10^3$ м.

Узнав радиус, можно еще раз применить третий закон Кеплера: $\frac{T_Л^2}{T_2^2} = \frac{R_Л^3}{R_2^3}$; $T_2^2 = \frac{T_Л^2 R_2^3}{R_Л^3}$, отсюда $T_2 = T_Л \sqrt{\frac{R_2^3}{R_Л^3}}$;

$T_2 = 6457{,}21$ сек $= 107{,}62$ мин.

2.158. Минимальное удаление от поверхности Земли космического корабля-спутника «Восток-2» составляло $h_{min} = 183$ км, а максимальное удаление — $h_{max} = 244$ км. Найти период обращения T спутника вокруг Земли.

Решение:

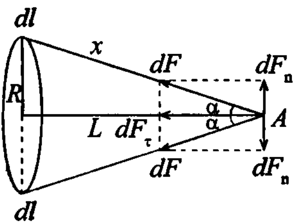


Найдем большую полуось орбиты «Востока» $R = \frac{h_{max} + h_{min}}{2} + R_З = 6583{,}5$ км.

Большая полуось орбиты Луны $R_Л = 390370$ км. Зная период обращения Луны, применим третий закон Кеплера $\frac{T_Л^2}{T^2} = \frac{R_Л^3}{R^3}$, отсюда $T = T_Л\sqrt{\frac{R^3}{R_Л^3}}$; $T = 87{,}8$ мин.

2.159. Имеется кольцо радиусом R. Радиус проволоки равен r, плотность материала равна ρ. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает материальную точку массой m, находящуюся на оси кольца на расстоянии L от его центра.

Решение:

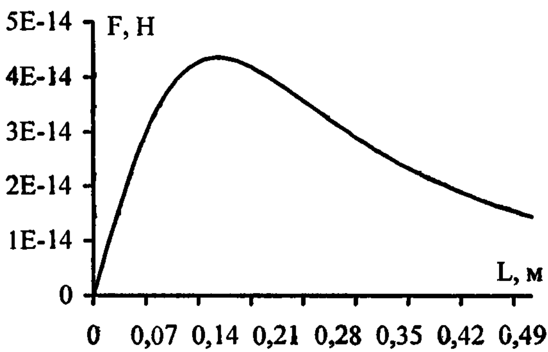


Возьмем элемент кольца dl. Сила гравитационного взаимодействия между элементом кольца dl и массой m, помещенной в точке A, будет $dF = G\frac{m\rho\pi r^2}{x^2}dl$. Сила dF направлена по линии x, соединяющей элемент кольца dl с массой m. Для нахождения силы гравитационного взаимодействия всего кольца и массы m надо векторно сложить все силы dF. Силу dF можно разложить на две составляющие dF_n и dF_τ. Составляющие dF_n двух диаметрально расположенных элементов взаимно уничтожаются, поэтому $F = \int dF_\tau$. Но $dF_\tau = dF\cos\alpha = \frac{dFl}{x}$ и

$$F=\int\frac{L}{x}dF=G\frac{m\rho\pi r^2L}{x^3}\int_0^{2\pi R}dl=G\frac{m\rho\pi r^2L\cdot 2\pi R}{x^3}$$ — (1). Учитывая, что $x=\sqrt{R^2+L^2}$, имеем $F=\frac{2\pi^2 Gm\rho r^2RL}{\left(R^2+L^2\right)^{3/2}}$ — (2).

2.160. Имеется кольцо радиусом $R=20$ см из медной проволоки. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает материальную точку массой $m=2$ г, находящуюся на оси кольца на расстоянии $L=0$, 5, 10, 15, 20 и 50 см от его центра. Составить таблицу значений F и представить графически зависимость $F=f(L)$. На каком расстоянии L_{max} от центра кольца сила имеет максимальное значение F_{max} и каково это значение? Радиус проволоки $r=1$ мм.

Решение:



Из формулы (2) задачи 2.159 видно, что если $L=0$, то $F=0$. Нетрудно убедиться, что функция F с увеличением L сначала растет, а затем убывает. Найдем максимум функции F. Выразим переменные величины x и L через угол α: $x=\frac{R}{\sin\alpha}$, $L=x\cos\alpha=\frac{R}{\sin\alpha}\cos\alpha$. Тогда формула (2) из предыдущей задачи примет следующий вид:

$F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2}{R} \cos\alpha \sin^2\alpha = B\cos\alpha \sin^2\alpha$. Для нахождения максимума функции F возьмем производную $\frac{dF}{d\alpha}$ и приравняем ее нулю: $\frac{dF}{d\alpha} = B\left(2\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha\right) = 0$ или $tg^2\alpha = 2$. Тогда расстояние L, на котором сила максимальна, равно $L = \frac{R}{\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{R}{tg\alpha} = \frac{R}{\sqrt{2}}$. На графике изображен характер зависимости $F = f(L)$; $L_{max} = 0{,}14$ м; $F_{max} = 4{,}35 \cdot 10^{-14}$ Н.

L, м	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,5
F, 10^{-14} Н	0	2,58	4,04	4,34	3,99	1,44

2.161. Сила взаимодействия между кольцом и материальной точкой, находящейся на оси кольца, имеет максимальное значение F_{max}, когда точка находится на расстоянии L_{max} от центра кольца. Во сколько раз сила взаимодействия F между кольцом и материальной точкой, находящейся на расстоянии $L = 0{,}5L_{max}$ от центра кольца, меньше максимальной силы F_{max}?

Решение:

Используем формулу из задачи 1.159: $F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 RL}{\left(R^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ и выражение $F = F_{max}$ при $L_{max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ из задачи 1.60. По условию $L = 0{,}5L_{max}$, соответственно получим

$F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R \cdot R / 2\sqrt{2}}{\left(R^2 + R^2/8\right)^{\frac{3}{2}}}$. Произведя дальнейшие преобразования, получим $F = \dfrac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{2\sqrt{2}(3R/2)^3 \cdot 1/2\sqrt{2}}$;

$F = \dfrac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{2\sqrt{2}(3R/2)^3 \cdot 1/2\sqrt{2}}$; $F = \dfrac{16\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{27R^3}$. Тогда

$F_{max} = \dfrac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R \cdot R/\sqrt{2}}{\left(R^2 + R^2/2\right)^{\frac{3}{2}}}$; $F_{max} = \dfrac{4\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{3\sqrt{3}R^3}$. Отсюда

выразим отношение сил: $\dfrac{F_{max}}{F} = \dfrac{4\pi^2 Gm\rho r^2}{3\sqrt{3}R} \cdot \dfrac{27R}{16\pi^2 Gm\rho r^2}$; *

---

* В ответе первоисточника, очевидно, допущена опечатка ($F_{max}/F = 1/3$).

§ 3. Вращательное движение твердых тел

В задачах этого раздела используются данные таблиц 3 — 5 и таблицы 11 из приложения. Кроме того, следует учесть замечание к § 1.

3.1. Найти момент инерции J и момент импульса L земного шара относительно оси вращения.

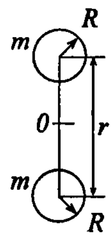
Решение:

Момент инерции шара $J = \frac{2}{5}MR^2$, подставляя значение массы и радиуса Земли, получим $J = 97{,}36 \cdot 10^{36}$ кг·м^2. Момент импульса $L = J\omega$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, следовательно, $L = \frac{J2\pi}{T}$. Период обращения Земли $T = 24$ часа. Подставляя числовые данные, получим $L = 7 \cdot 10^{33}$ кг·м^2/с.

3.2. Два шара одинакового радиуса $R = 5$ см закреплены на концах невесомого стержня. Расстояние между шарами $r = 0{,}5$ м. Масса каждого шара $m = 1$ кг. Найти: а) момент инерции J_1 системы относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему; б) момент инерции J_2 системы относительно той же оси, считая шары материальными точками, массы которых сосредоточены в их центрах; в) относительную ошибку $\delta = (J_1 - J_2)/J_2$, которую мы допускаем при вычислении момента инерции системы, заменяя величину J_1 величиной J_2.

Решение:

Момент инерции шара: $J_0 = \frac{2}{5}mR^2$. По теореме Штейнера $J = J_0 + md^2$, где $d = r/2$. Найдем момент инерции каждого шара $J_1 = J_0 + m\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}mR^2 + \frac{mr^2}{4} =$

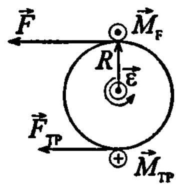


$= m\cdot\left(\frac{2R^2}{5} + \frac{r^2}{4}\right)$. Используя свойство аддитивности момента инерции, получим $J_c = \sum_{i=1}^{n} J_i$, где J_c — момент инерции системы, J_i — момент инерции элементов, входящих в систему, найдем момент инерции системы. Т. к. шары одинаковые, то $J_{1c} = 2J_1 = = 2m\cdot\left(\frac{2R^2}{5} + \frac{r^2}{4}\right) = 0{,}127$ кг·м^2. Момент инерции материальной точки $J_2 = m\frac{r^2}{4}$, тогда момент инерции системы $J_{2c} = 2m\frac{r^2}{4} = \frac{mr^2}{2} = 0{,}125$ кг·м^2. Относительная ошибка $\delta = \frac{J_1 - J_2}{J_2} = 1{,}6\%$.

3.3. К ободу однородного диска радиусом $R = 0{,}2$ м приложена касательная сила $F = 98{,}1$ Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр} = 98{,}1$ Н·м. Найти массу m дисков, если известно, что диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 100$ рад/с^2.

Решение:

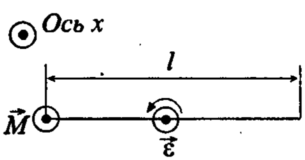
Уравнение вращательного движения диска в векторной форме $J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_F + \vec{M}_{тр}$ — (1), $\vec{M}_F$ — момент силы $\vec{F}$, $\vec{M}_{тр}$ — момент силы трения. Выберем ось x в направлении вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ (на нас, перпендикулярно плоскости чертежа). Тогда



уравнение (1) в проекции на ось x $J_\varepsilon = M_F - M_{\text{тр}}$ — (2), т.к. вектор $\vec{M}_F$ направлен вдоль $\vec{\varepsilon}$, а $\vec{M}_{\text{тр}}$ имеет противоположное направление. Момент инерции диска $J = \frac{1}{2}mR^2$ — (3); $M_F = F \cdot R$ — (4). Перепишем (2) с учетом (3) и (4): $\frac{1}{2}mR^2\varepsilon = FR - M_{\text{тр}}$, отсюда $m = \frac{2(FR - M_{\text{тр}})}{\varepsilon R^2} = 7{,}36$ кг.

3.4. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 0{,}5$ кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением ε вращается стержень, если на него действует момент сил $M = 98{,}1$ мН·м?

Решение:



Запишем уравнение вращательного движения стержня в проекции на ось x: $M = J\varepsilon$, откуда $\varepsilon = \frac{M}{J}$, где момент инерции стержня относительно оси, проходящей через середину, $J = \frac{1}{12}Ml^2$. Тогда $\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{12M}{ml^2} = 2{,}35$ рад/с^2.

3.5. Однородный диск радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 0{,}5$ кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Зависимость угловой скорости ω вращения диска от времени t дается уравнением $\omega = A + Bt$, где $B = 8$ рад/с^2. Найти касательную силу F, приложенную к ободу диска. Трением пренебречь.

Решение:

Воспользуемся рисунком к задаче 3.3. Относительно оси x момент касательной силы приложенной к ободу диска $M = F \cdot R$ — (1). Уравнение вращательного движения в проекции на ось x: $M = J \cdot \varepsilon$, где момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, т.е. $M = \frac{mR^2\varepsilon}{2}$ — (2). Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = B$ — (3). Решая совместно (1) — (3), найдем $F = \frac{BmR}{2}$; $F = 4$ Н.

3.6. Маховик, момент инерции которого $J = 63{,}6$ кг·м^2 вращается с угловой скоростью $\omega = 31{,}4$ рад/с. Найти момент сил торможения M, под действием которого маховик останавливается через время $t = 20$ с. Маховик считать однородным диском.

Решение:

Момент сил торможения $M = J\varepsilon$, где угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, т.к. вращение равнозамедленное и конечная угловая скорость $\omega = 0$. Тогда $M = \frac{J\omega}{t}$; $M \approx 100$ Н.

3.7. К ободу колеса радиусом 0,5м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 98{,}1$ Н. Найти угловое ускорение ε колеса. Через какое время t после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения $n = 100$ об/с? Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.

Решение:

Данную задачу решим в скалярной форме относительно оси, проходящей через центр масс диска и совпадающей по направлению с вектором $\bar{\varepsilon}$. Момент касательной силы, приложенный к ободу диска $M = F \cdot R$ — (1). Кроме того,

$M = J \cdot \varepsilon$, где момент инерции диска $J = \dfrac{mR^2}{2}$, т.е. $M = \dfrac{mR^2 \varepsilon}{2}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $\varepsilon = \dfrac{2F}{mR}$; $\varepsilon = 7{,}8$ рад/с^2. Угловую скорость ω можно выразить двумя способами: $\omega = 2\pi n$ и $\omega = \varepsilon t$, отсюда $t = \dfrac{2\pi n}{\varepsilon}$; $t = 1$ мин 20 с.

3.8. Маховик радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 10$ кг соединен с мотором при помощи приводного ремня. Сила натяжения ремня, идущего без скольжения, $T = 14{,}7$ Н. Какую частоту вращения n будет иметь маховик через время $t = 10$ с после начала движения? Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.

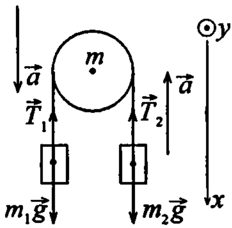
Решение:

Данную задачу решим в скалярной форме относительно оси, проходящей через центр масс диска и совпадающей по направлению с вектором $\vec{\varepsilon}$. Момент силы натяжения ремня $M = T \cdot R$ — (1), кроме того, $M = J \cdot \varepsilon$ — (2), где момент инерции диска $J = \dfrac{mR^2}{2}$ — (3), $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{2\pi n}{t}$ — (4). Решая совместно (1) — (4), найдем $n = \dfrac{Tt}{\pi m R}$; $n = 23{,}4$ об/с.

3.9. Маховое колесо, момент инерции которого $J = 245$ кг м^2, вращается с частотой $n = 20$ об/с. Через время $t = 1$ мин после того, как на колесо перестал действовать момент сил M, оно остановилось. Найти момент сил трения $M_{\text{тр}}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском.

Решение:
Поскольку вращение колеса является равнозамедленным, то количество оборотов, которое оно сделало до полной остановки $N = nt/2$; $N = 600$ об. Момент сил трения $M = J \cdot \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}$, то $M = \frac{2J\pi n}{t} = 513$ Н·м.

3.10. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок массой $m = 1$ кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

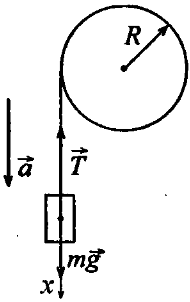
Решение:


Запишем в векторной форме уравнения поступательного движения первой и второй гири: $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1$; $m_2\vec{a} = \vec{T}_2 + m_2\vec{g}$ и уравнение вращательного движения диска $J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, где M_1 — момент силы натяжения нити T_1, M_2 — момент силы натяжения нити T_2. Спроектируем первые два уравнения на ось x, а последнее на ось y и добавим уравнение кинематической связи. Получим систему 4 уравнений: $m_1 a = m_1 g - T_1$ — (1); $-m_2 a = m_2 g - T_2$ — (2); $J\varepsilon = RT_1 - RT_2$ — (3); $a = \varepsilon R$.

Подставим (4) в (3): $J\frac{a}{R} = R(T_1 - T_2)$ — (5). Вычтем (2) из (1), подставим в полученное выражение (5) и найдем $a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m/2} = 2{,}8$ м/с^2 — (6). Подставляя (6) в (1) и (2), получим $T_1 = m_1(g - a)$; $T_1 = 14$ Н. $T_2 = m_2(g + a)$; $T_2 = 12{,}6$ Н.

3.11. На барабан массой $m_0 = 9$ кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Найти ускорение a груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

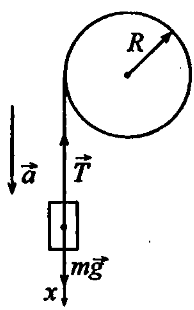
Решение:



Без учета сил трения и сопротивления среды систему «груз — цилиндр» можно считать замкнутой и применить закон сохранения энергии. В начальный момент времени груз обладает потенциальной энергией mgh, которая при опускании груза уменьшается, переходя в кинетическую энергию поступательного движения груза и в кинетическую энергию вращения барабана $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ — (1), где момент инерции барабана $J = \frac{m_0 R^2}{2}$ — (2); $\omega = \frac{v}{R}$ — (3), где R — раднус барабана. Уравнение (1) с учетом (2) и (3) можно записать как $mgh = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{m_0}{2}\right)$ — (4). Груз опускается под действием постоянной силы, следовательно, его движение равноускоренное, тогда $h = \frac{at^2}{2}$ — (5); $v = at$ — (6). Подставляя (5) и (6) в (4), получим $a = \frac{2mg}{m_0 + 2m}$; $a = 3$ м/с^2.

3.12. На барабан радиусом $R = 0{,}5$ м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 10$ кг. Найти момент инерции J барабана, если известно, что груз опускается с ускорением $a = 2{,}04$ м/с^2.

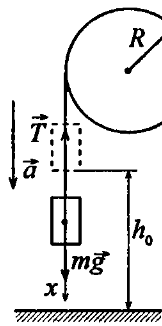
Решение:



Сила натяжения шнура $\vec{T}$ создает вращающий момент $M = TR$ — (1). С другой стороны, $M = J\varepsilon$ — (2). Ускорение, с которым опускается груз, равно тангенциальному ускорению вращения барабана. Тогда $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ — (3). Решая совместно (1) — (3) получим: $J = \dfrac{TR^2}{a}$ — (4). Силу натяжения шнура $\vec{T}$ найдем из второго закона Ньютона в проекциях на ось x. $mg - T = ma$, откуда $T = m(g-a)$. Тогда уравнение (4) примет вид: $J = \dfrac{mR^2(g-a)}{a}$; $J = 9{,}5$ кг·м^2.

3.13. На барабан радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $J = 0{,}1$ кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана высота груза над полом $h_0 = 1$ м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $W_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

Решение:

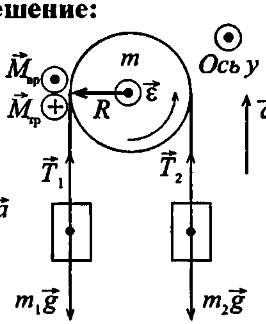


При опускании груза его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного движения и кинетическую энергию вращательного движения: $mgh_0 = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{J\omega^2}{2}$ — (1), где $\omega = \dfrac{v}{R}$, откуда $mgh_0 = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{Jv^2}{2R^2} = \dfrac{R^2v^2m + Jv^2}{2R^2}$ или $mgh_0 = \dfrac{v^2(mR^2 + J)}{2R^2}$; $v = \sqrt{\dfrac{2R^2mgh_0}{mR^2 + J}}$ — (2).

Движение равноускоренное, поэтому $h_0=\frac{at^2}{2}$ — (3); $a=\varepsilon R$; $\varepsilon=\frac{\omega}{t}$; $h_0=\frac{\omega R t^2}{t2}=\frac{vRt}{2R}=\frac{vt}{2}$ — (4). Выразим t из (4) и подставим в (2): $t=\frac{2h_0}{v}=\sqrt{\frac{4h_0\left(mR^2+J\right)}{2R^2mgh_0}}=$ $=\sqrt{\frac{2\left(mR^2+J\right)}{R^2mg}}$; $t=1{,}1$ с. Кинетическая энергия $W_к=\frac{mv^2}{2}$, подставив уравнение (2), получим $W_к=\frac{m2R^2mgh_0}{2\left(mR^2+J\right)}=$ $=\frac{m^2gh_0R^2}{mR^2+J}$; $W_к=0{,}82$ Дж. По второму закону Ньютона $mg-T=ma$, откуда $T=m(g-a)$. Из (3): $a=\frac{2h_0}{t^2}$, тогда $T=m\left(g-2h_0/t^2\right)$; $T=4{,}1$ Н.

3.14. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого $J=50$ кг·м^2 и радиус $R=20$ см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр}=98{,}1$ Н·м. Найти разность сил натяжения нити T_1-T_2 по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с угловым ускорением $\varepsilon=2{,}36$ рад/с^2. Блок считать однородным диском.

Решение:

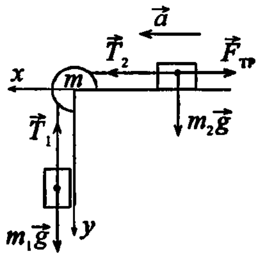


Согласно основному закону динамики вращательного движения (в проекции на ось y) при $J=const$ $\sum M=J\varepsilon$. Разность сил (T_1-T_2) создает вращательный момент $M_{вр}$, тогда

$(T_1 - T_2) - M_{тр} = J\varepsilon$, следовательно, $T_1 - T_2 = (J\varepsilon + M_{тр})/R$; $T_1 - T_2 = 1{,}08$ кН.

3.15. Блок массой $m = 1$ кг укреплен на конце стола (см. рис. и задачу 2.31). Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения гири 2 о стол $k = 0{,}1$. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей. Блок считать однородным диском. Трением в блоке пренебречь.

Решение:



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось x и y: $\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 & \text{— (1)}, \\ m_2 a = T_2 - F_{тр} & \text{— (2)}, \end{cases}$ где $F_{тр} = k m_2 \times \times g$ — (3). Разность сил $(T_1 - T_2)$ создает момент вращения, следовательно, $(T_1 - T_2)R = \frac{Ja}{R}$, где $J = \frac{mR^2}{2}$, откуда $T_1 - T_2 = \frac{ma}{2}$ — (4). Из уравнений (1) — (3) найдем $T_1 = m_1(g - a)$ — (5); $T_2 = m_2(a + kg)$ — (6). Пусть $m_1 = m_2 = m'$. Тогда $T_1 - T_2 = m'(g - 2a - kg) = m'g(1-k) - 2m'a$, подставив (1), получим $mg(1-k) = \frac{ma}{2} + 2m'a = \frac{a(m + 4m')}{2}$, откуда $a = \frac{2m'g(1-k)}{m + 4m'}$; $a = 3{,}5$ м/с^2. Тогда из уравнения (5) $T_1 = 6{,}3$ Н; $T_2 = 4{,}5$ Н.

3.16. Диск массой $m = 2$ кг катится без скольжения по горизонтальный плоскости со скоростью $v = 4$ м/с. Найти кинетическую энергию W_k диска.

Решение:

В задаче рассматривается так называемое «плоское движение». Полная кинетическая энергия диска складывается из кинетической энергии поступательного движения точки центра масс и кинетической энергии вращения относительно оси, проходящей через центр масс: $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$. Поскольку $J = \frac{mR^2}{2}$ и $\omega = \frac{v}{R}$, где m — масса диска, R — радиус диска, то $W_к = \frac{3mv^2}{4}$; $W_к = 24$ Дж.

3.17. Шар диаметром $D = 6$ см и массой $m = 0{,}25$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения $n = 4$ об/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ шара.

Решение:

Кинетическая энергия шара складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения: $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$, где $J = \frac{2mR^2}{5}$; $\omega = 2\pi n$, следовательно, $W_к = \frac{4\pi^2 mR^2 n^2}{2} + \frac{2mR^2 4\pi^2 n^2}{5 \cdot 2} = \frac{7\pi^2 D^2 mn^2}{10}$; $W_к = 0{,}1$ Дж.

3.18. Обруч и диск одинаковой массы $m_1 = m_2$ катятся без скольжения с одной и той же скоростью v. Кинетическая энергия обруча $W_{к1} = 4$ кгс·м. Найти кинетическую энергию $W_{к2}$ диска.

Решение:

Пусть $m_1 = m_2 = m$. Кинетическая энергия обруча и диска складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения $W_{к1}=\frac{mv^2}{2}+\frac{J_1\omega_1^2}{2}$ — (1), $W_{к2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{J_2\omega_2^2}{2}$ — (2). Момент инерции обруча $J_1=mR_1^2$. Угловая скорость $\omega_1=\frac{v}{R_1}$. Момент инерции диска $J_2=\frac{1}{2}mR_2^2$; частота $\omega_2=\frac{v}{R_2}$. Произведем следующие преобразования: $J_1\omega_1^2=mR_1^2\frac{v^2}{R_1^2}=$ $=mv^2$, $J_2\omega_2^2=\frac{1}{2}mR_2^2\frac{v^2}{R_2^2}=\frac{mv^2}{2}$. Тогда, с учетом уравнений (1) и (2), можно записать $W_{к1}=mv^2$, $W_{к2}=\frac{3mv^2}{4}$ или $W_{к2}=\frac{3W_{к1}}{4}$. Переведем числовые значения в единицы системы СИ: $W_{к1}=39{,}24$ Дж, тогда $W_{к2}=29{,}43$ Дж.

3.19. Шар массой $m=1$ кг катится без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $v=10$ см/с, после удара $u=8$ см/с. Найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе шара о стенку.

Решение:

Будем считать, что движение происходит в горизонтальной плоскости, тогда количество теплоты Q равно убыли кинетической энергии $Q=W_{к1}-W_{к2}$. Здесь $W_{к1}$ — кинетическая энергия шара до удара, она складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения. $W_{к1}=\frac{mv^2}{2}+\frac{J\omega_1^2}{2}$, где $J=\frac{2}{5}mR^2$; $\omega_1=\frac{v}{R}$. Аналогично для

$W_{к2}$ — кинетическая энергия шара после удара: $W_{к2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{J\omega_2^2}{2}$, где $\omega_2 = \frac{u}{R}$. Преобразуем предварительно выражения $J\omega_1^2$ и $J\omega_2^2$: $J\omega_1^2 = \frac{2}{5}mR^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{2}{5}mv^2$; $J\omega_2^2 = \frac{2}{5}mu^2$. Тогда $W_{к1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = \frac{7mv^2}{10}$, $W_{к2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{5} = \frac{7mu^2}{10}$. Отсюда $Q = \frac{7mv^2}{10} - \frac{7mu^2}{10} = \frac{7}{10}m\left(v^2 - u^2\right)$; $Q = 2{,}5$ мДж.

3.20. Найти относительную ошибку δ, которая получится при вычислении кинетической энергии $W_к$ катящегося шара, если не учитывать вращения шара.

Решение:

Кинетическая энергия шара с учетом вращения: $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$, без учета вращения: $W'_к = \frac{mv^2}{2}$. Относительная ошибка $\delta = \frac{W_к - W'_к}{W'_к}$; $\delta = \frac{J\omega^2/2}{mv^2/2} = \frac{J\omega^2}{mv^2}$, где $J = \frac{2}{5}mR^2$; $\omega = \frac{v}{R}$. Отсюда $\delta = \frac{2mR^2v^2}{5R^2mv^2} = \frac{2}{5} = 40\%$.

3.21. Диск диаметром $D = 60$ см и массой $m = 1$ кг вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно к его плоскости с частотой $n = 20$ об/с. Какую работу A надо совершить, чтобы остановить диск?

Решение:

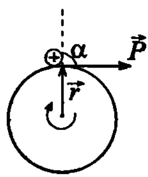
Работа сил торможения равна изменению кинетической энергии диска $-A = W_к - W_{к0}$. В момент остановки $W_к = 0$, следовательно, $A = W_{к0}$; $A = \frac{J\omega^2}{2}$, где $J = \frac{mR^2}{2}$; $\omega = 2\pi n$.

Тогда $A = \frac{m(D/2)^2(2\pi n)^2}{4} = m\frac{D^2}{4}\pi^2 n^2$; $A = 355$ Дж.

3.22. Кинетическая энергия вала, вращающегося с частотой $n = 5$ об/с, $W_к = 60$ Дж. Найти момент импульса L вала.

Решение:

Момент импульса — вектор, направление которого определяется по правилу векторного произведения $\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}]$, где $\vec{p} = m\vec{v}$, а модуль равен $L = Rp\sin\alpha = mvR$ — (1), т.к. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Кинетическая энергия вала



$W_к = \frac{J\omega^2}{2}$ — (2), где $J = \frac{mR^2}{2}$ — (3), $\omega = 2\pi n$ — (4). Решая совместно уравнения (2) — (4) получим $W_к = mR^2\pi^2 n^2$, откуда $m = \frac{W_к}{R^2\pi^2 n^2}$ — (5); $v = 2\pi nR$ — (6).

Подставив (5) и (6) в (1), найдем $L = \frac{2W_к}{\pi n}$; $L = 7{,}6$ кг·м²/с.

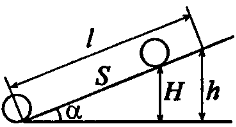
3.23. Найти кинетическую $W_к$ энергию велосипедиста, едущего со скоростью $v = 9$ км/ч. Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 78$ кг, причем на колеса приходится масса $m_0 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

Решение:

Кинетическая энергия велосипедиста складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения двух колес. $W_к = \frac{mv^2}{2} + 2\frac{J\omega^2}{2}$, где момент инерции одного колеса $J = \frac{m_0 R^2}{2}$, а угловая скорость $\omega = \frac{v}{R}$. Тогда $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{m_0 R^2 v^2}{2R^2} = \frac{v^2(m + m_0)}{2}$; $W_к = 253$ Дж.

3.24. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью $v = 7{,}2$ км/ч. На какое расстояние s может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

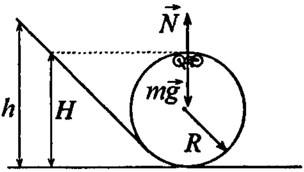
Решение:



У основания горки обруч обладал кинетической энергией $W_к$, которая складывалась из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения. Когда обруч вкатился на горку на расстояние S, его кинетическая энергия перешла в потенциальную. $W_к = W_п$. $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$; $W_п = mgH$. Момент инерции обруча $J = mR^2$, частота вращения $\omega = v / R$. Тогда $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2 v^2}{2R^2} = mv^2$. Следовательно, $mv^2 = mgH$, откуда $H = \frac{v^2}{g}$. Из рисунка видно, что $\frac{h}{H} = \frac{l}{S}$, откуда $S = \frac{Hl}{h}$ или $S = \frac{v^2 l}{gh}$. Подставив числовые данные с учетом $v = 2$ м/с, получим $S = 4{,}1$ м.

3.25. С какой наименьшей высоты h должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму «мертвой петли» радиусом $R = 3$ м*, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 75$ кг, причем на колеса приходится масса $m_0 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

Решение:



Система замкнута, следовательно, по закону сохранения энергии $W = W_п + W_{к1} + W_{к2}$. Здесь $W = mgh$ — начальная потенциальная энергия. Потенциальная энергия в верхней точке «мертвой петли» $W_п = mgH$, т.к. $H = 2R$, то $W_п = 2mgR$. Кинетическая энергия поступательного движения велосипедиста $W_{к1} = \frac{mv^2}{2}$. Кинетическая энергия вращательного движения колес $W_{к2} = \frac{J\omega^2}{2}$. $J = m_0 r^2$ — момент инерции обруча, где r — его радиус. $\omega = \frac{v}{r}$ — угловая скорость $\omega^2 = \frac{v^2}{r^2}$. Тогда $W_{к2} = \frac{m_0 r^2 v^2 / r^2}{2} = \frac{m_0 v^2}{2}$;

$$mgh = 2mgR + mv^2/2 + m_0 v^2/2; \qquad mg(h - 2R) = \frac{v^2}{2}(m + m_0),$$

отсюда $v^2 = \frac{2mg(h - 2R)}{m + m_0}$. По второму закону Ньютона в верхней точке «мертвой петли» $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$. В предельном случае $N = 0$, поэтому $mg = ma_n$, откуда $a_n = g$. С другой стороны, нормальное ускорение

* В первоисточнике, очевидно, допущена опечатка: радиус петли $R = 0{,}3$ м.

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2mg(h-2R)}{(m+m_0)R}$, следовательно, $g = \frac{2mg(h-2R)}{(m+m_0)R}$;

$2m(h-2R) = (m+m_0)R$; $h = 2R + \frac{R}{2}\left(1+\frac{m_0}{m}\right)$. Подставив числовые значения, получим $h = 7{,}56$ м.

3.26. Медный шар радиусом $R = 10$ см вращается с частотой $n = 2$ об/с вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу A надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость ω вращения шара вдвое?

Решение:

Кинетическая энергия вращения шара $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$, где момент инерции шара $J = \frac{2}{5}mR^2$. Работа по увеличению угловой скорости вращения шара будет равна приращению его кинетической энергии. $A = W_{к2} - W_{к1}$, где $W_{к1} = \frac{J\omega_1^2}{2}$; $W_{к2} = J\omega_2^2/2 = 4J\omega_1^2/2$. Отсюда $A = \frac{4J\omega_1^2 - J\omega_1^2}{2} = \frac{3}{2}J\omega_1^2$ — (1); $\omega_1 = 2\pi n$ — (2). Масса шара $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, $\rho = 8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3, тогда $J = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi R^3\rho R^2 = \frac{8}{15}\pi R^2\rho$ — (3). Подставив (2) и (3) в (1), получим $A = \frac{3}{2}\frac{8}{15}\pi R^5\rho 4\pi^2 n^2 = \frac{16}{5}\pi^3 R^5\rho n^2$; $A = 34{,}1$ Дж.

3.27. Найти линейные ускорения a центров масс шара, диска и обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости $\alpha = 30°$, начальная скорость всех тел $v_0 = 0$. Сравнить найденные ускорения с ускорением тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение:

При скатывании тела с наклонной плоскости его потенциальная энергия переходит в кинетическую. Т.е. $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ — (1), где J — момент инерции тела и m — его масса. Но $h = l\sin\alpha$ — (2), $\omega = \frac{v}{R}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $mgl\sin\alpha = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{J}{R^2}\right)$ — (4). Так как движение происходит под действием постоянной силы, то движение тел равноускоренное, поэтому $l = \frac{at^2}{2}$ — (5), $v = at$ — (6). Решая (4) — (6) совместно, получим $a = \frac{mg\sin\alpha}{m + J/R^2}$ — (7). Момент инерции шара $J = \frac{2}{5}mR^2$, тогда из (7) найдем $a_1 = 3{,}50$ м/с^2. Момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, $a_2 = 3{,}27$ м/с^2. Момент инерции обруча $J = mR^2$, $a_3 = 2{,}44$ м/с^2. Для тела, соскальзывающего с наклонной плоскости без трения, имеем $a = g\sin\alpha$; $a = 4{,}9$ м/с^2.

3.28. Найти линейные скорости v движения центров масс шара, диска и обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости $h = 0{,}5$ м, начальная скорость всех тел $v_0 = 0$. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение:

В отсутствие трения систему можно считать замкнутой. Каждое из тел в начальный момент обладает потенциальной энергией mgh, которая затем преобразуется в кинетическую энергию поступательного движения $\frac{mv^2}{2}$ и кинетическую энергию вращения, т.е. $mgh = J\omega^2/2 + mv^2/2$ — (1). С учетом того, что $\omega = \frac{v}{R}$, выразим скорость тел v в нижней точке: $mgh = \frac{v^2(mR^2 + J)}{2R^2}$; $v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + J/R^2}}$. а) Момент инерции шара $J = \frac{2}{5}mR^2$, тогда $v_1 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + 2m/5}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$; $v_1 = 2{,}65$ м/с. б) Момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, тогда $v_2 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + m/2}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$; $v_2 = 2{,}56$ м/с. в) Момент инерции обруча $J = mR^2$, тогда $v_3 = \sqrt{\frac{2mgh}{m+m}} = \sqrt{gh}$; $v_3 = 2{,}21$ м/с. г) Для тела, соскальзывающего без трения с наклонной плоскости, $mgh = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{2gh}$; $v = 3{,}13$ м/с.

3.29. Имеются два цилиндра: алюминиевый (сплошной) и свинцовый (полый) — одинакового радиуса $R = 6$ см и одинаковой массы $m = 0{,}5$ кг. Поверхности цилиндров окрашены одинаково. Как, наблюдая поступательные скорости цилиндров у основания наклонной плоскости, можно различить их? Найти моменты инерции J_1 и J_2 этих цилиндров. За какое время t каждый цилиндр скатится без скольжения с наклонной плоскости? Высота наклонной плоскости $h = 0{,}5$ м, угол наклона плоскости $\alpha = 30°$, начальная скорость каждого цилиндра $v_0 = 0$.

Решение:

В предыдущей задаче мы нашли, что поступательная скорость цилиндров в нижней точке наклонной плоскости определяется формулой $v = \sqrt{\dfrac{2mgh}{m + J/R^2}}$ — (1). Момент инерции алюминиевого цилиндра $J_1 = \dfrac{mR^2}{2}$ — (2). Момент инерции свинцового цилиндра $J_2 = m\dfrac{R^2 + R_0^2}{2}$. Найдем внутренний радиус R_0 свинцового цилиндра. По условию массы обоих цилиндров равны, следовательно, $\rho_1 L\pi R^2 = \rho_2 L\pi\left(R^2 - R_0^2\right)$, где L — длина цилиндров, ρ_1 — плотность алюминия, ρ_2 — плотность свинца. Отсюда $R_0^2 = R^2\dfrac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2}$. Тогда момент инерции свинцового цилиндра $J_2 = \dfrac{mR^2}{2}\dfrac{2\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$ — (3). Подставляя числовые данные, получим $J_1 = 9\cdot 10^{-4}$ кг·м², $J_1 = 15{,}9\cdot 10^{-4}$ кг·м². Т. к. скатывание цилиндров происходит под действием постоянной силы, то $v = at$ и $l = \dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{at^2}{2}$; отсюда $\dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{vt}{2}$ и $t = \dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{2h}{v}$ — (4). Подставляя в (4) формулу (1), получим $t = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h\left(m + J/R^2\right)}{mg}}$ — (5). С учетом (2) и (3), получим соответственно для алюминиевого и свинцового цилиндров $t_1 = \dfrac{1}{sin\alpha}\sqrt{\dfrac{3h}{g}}$, $t_1 = 0{,}78\,с$; $t_2 = \dfrac{1}{sin\alpha} \times$ $\times\sqrt{\dfrac{2h}{g}\left(1+\dfrac{2\rho_2-\rho_1}{2\rho_2}\right)}$, $t_2 = 0{,}88$ с.

3.30. Колесо, вращаясь равнозамедленно, уменьшило за время $t = 1\,мин$ частоту вращения от $n_1 = 300\,об/мин$ до $m_2 = 180\,об/мин$. Момент инерции колеса $J = 2\,кг{\cdot}м^2$. Найти угловое ускорение ε колеса, момент сил торможения M, работу A сил торможения и число оборотов N, сделанных колесом за время $t = 1\,мин$.

Решение:

Преобразуем числовые единицы в систему СИ: $t = 60\,с$, $h_1 = 5\,об/с$, $n_2 = 3\,об/с$. Поскольку вращение равнозамедленное, то число оборотов можно определить так: $N = \dfrac{n_1+n_2}{2}t$; $N = 240\,об$. Угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{\Delta\omega}{t}$. Имеем: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$, следовательно, $\varepsilon = \dfrac{2\pi(n_2-n_1)}{t}$. Подставив числовые значения, получим $\varepsilon = -0{,}21\,рад/с^2$. Момент сил торможения $M = J\varepsilon$; $M = 0{,}42\,Н{\cdot}м$. Работа сил торможения равна приращению кинетической энергии $-A = W_{к2} - W_{к1} = \dfrac{J\omega_2^2}{2} - \dfrac{J\omega_1^2}{2}$;

$$A = \frac{J}{2}\left((2\pi n_1)^2 - (2\pi n_2)^2\right) = 2\pi^2 J\left(n_1^2 - n_2^2\right);\ A = 630\,Дж.$$

3.31. Вентилятор вращается с частотой $n = 900\,об/мин$. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 75\,об$. Работа сил торможения $A = 44{,}4\,Дж$. Найти момент инерции J вентилятора и момент сил торможения M.

Решение:

Работа сил трения равна приращению кинетической энергии. $-A = W_к - W_{к0}$. Поскольку в момент остановки $W_к = 0$, то $A = W_{к0} = \frac{J\omega^2}{2}$. Откуда выразим момент инерции J, учитывая, что $\omega = 2\pi n$ — (1): $J = \frac{2A}{4\pi^2 n^2}$; $J = 0{,}01\,кг\cdot м^2$. Момент сил торможения $M = J\varepsilon$ — (2), где угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ — (3). Поскольку вращение является равнозамедленным, то среднее число оборотов за единицу времени $\pi = \frac{n}{2}$, а число оборотов, сделанное до остановки $N = \pi t = \frac{nt}{2}$, откуда $t = \frac{2N}{n}$ — (4). Решая совместно (1) — (4), получим $M = \frac{J\pi n^2}{N}$; $M = 94\cdot 10^{-3}\,Н\cdot м$.

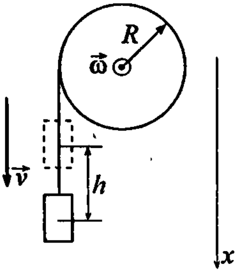
3.32. Маховое колесо, момент инерции которого $J = 245\,кг\cdot м^2$, вращается с частотой $n = 20\,об/с$. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав $N = 1000\,об$. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающего момента до остановки колеса.

Решение:

Момент сил трения $M_{тр} = J\varepsilon$. Поскольку вращение равнозамедленное и конечная скорость равна иулю, то $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, где $\omega = 2\pi n$. Тогда $M_{тр} = J\frac{2\pi n}{t}$. Число оборотов при равнозамедленном движении $N = \frac{n}{2}t$, откуда $t = \frac{2N}{n}$; $t = 100\,с$ и $M_{тр} = 308\,Н\cdot м$.

3.33. По ободу шкива, насаженного на общую ось с маховым колесом, намотана нить, к концу который подвешен груз массой $m = 1$ кг. На какое расстояние h должен опуститься груз, чтобы колесо со шкивом получило частоту вращения $n = 60$ об/мин? Момент инерции колеса со шкивом $J = 0{,}42$ кг·м^2, радиус шкива $R = 10$ см.

Решение:



Пусть в верхнем положении груз обладал потенциальной энергией mgh. При опускании груза на расстояние h эта энергия была преобразована в кинетическую энергию вращения колеса и кинетическую энергию поступательного движения груза. $mgh = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$ — (1). Здесь v — скорость опускания груза, равна линейной скорости вращения точек на ободе шкива. $v = \omega R$; $\omega = 2\pi n$ — (2), отсюда $v = 2\pi nR$ — (3). Подставив (2) и (3) в (1), получим: $mgh = 2\pi^2 n^2 \left(J + mR^2\right)$, следовательно, $h = \frac{2\pi^2 n^2 \left(J + mR^2\right)}{mg}$; $h = 86{,}5$ см.

3.34. Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2 и через время $t_1 = 15$ с после начала движения приобретает момент импульса $L = 73{,}5$ кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ колеса через время $t_2 = 20$ с после начала движения.

Решение:

Кинетическая энергия колеса $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$ — (1). Момент инерции J можно найти из соотношения $M = J\varepsilon$, откуда

$J = \dfrac{M}{\varepsilon}$ — (2). Из уравнения моментов $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$. Решая это уравнение методом разделения переменных, получим $Mdt = dL$; $M\int\limits_0^{t_1} dt = L$; $Mt_1 = L$, откуда $M = \dfrac{L}{t_1}$ — (3).

Уравнение (2) с учетом (3) запишем как: $J = \dfrac{L}{t_1\varepsilon}$ — (4).

Угловое ускорение $\varepsilon = const$, следовательно, $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t}$. Тогда в момент времени t_2 — $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t_2}$, откуда угловая скорость $\omega = \varepsilon t_2$ — (5). Подставив (4) и (5) в (1), получим $W_к = \dfrac{L\varepsilon^2 t_2^2}{2t_1}$; $W_к = 490$ Дж.

3.35. Маховик вращается с частотой $n = 10$ об/с. Его кинетическая энергия $W_к = 7{,}85$ кДж. За какое время t момент сил $M = 50$ Н·м, приложенный к маховику, увеличит угловую скорость ω маховика вдвое?

Решение:

Согласно закону изменения момента импульса $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$, где $L = J\omega$, а $dL = Jd\omega$. Воспользуемся методом разделения переменных: $Mdt = Jd\omega$; $M\int\limits_0^{t} dt = J\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega$ или $Mt = J(\omega_2 - \omega_1)$. По условию $\omega_2 = 2\omega_1$, следовательно, $Mt = J\omega_1$, откуда $t = \dfrac{J\omega_1}{M}$ — (1). Момент инерции J найдем из уравнения кинетической энергии вращения маховика. $W_к = \frac{J\omega_1^2}{2}$, откуда $J = \frac{2W_к}{\omega_1^2}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $t = \frac{2W_к}{\omega_1 M}$ или, с учетом $\omega_1 = 2\pi n$, $t = \frac{W_к}{\pi n M}$; $t = 5$ с.

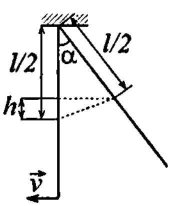
3.36. К ободу диска массой $m = 5$ кг приложена касательная сила $F = 19{,}6$ Н. Какую кинетическую энергию $W_к$ будет иметь диск через время $t = 5$ с после начала действия силы?

Решение:

Импульс силы $F\Delta t = m\Delta v$, но $v_0 = 0$ и $t_0 = 0$, следовательно, $Ft = mv$. Отсюда $v = \frac{Ft}{m}$. Кинетическая энергия вращения диска $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$; где $J = \frac{1}{2}mR^2$, $\omega = \frac{v}{R}$; $W_к = \frac{mR^2v^2}{2 \cdot 2 \cdot R^2} = \frac{F^2t^2}{4m}$. После подстановки числовых данных $W_к = 480$ Дж.

3.37. Однородный стержень длиной $l = 1$ м подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. На какой угол α надо отклонить стержень, чтобы нижний конец стержня при прохождении положения равновесия имел скорость $v = 5$ м/с?

Решение:

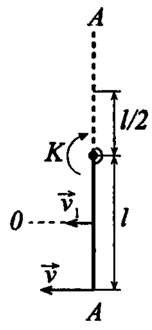


Рассмотрим движение центра масс стержня. При отклонении на угол α он обладает потенциальной энергией mgh. При прохождении положения равновесия его потенциальная энергия перешла в кинетическую энергию вращения.

$mgh=\frac{J\omega^2}{2}$ — (1); $h=\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\cos\alpha=\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера: $J=\frac{1}{12}ml^2+m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ml^2$. Угловая скорость $\omega=\frac{v'}{l/2}$, где v' — скорость прохождения положения равновесия центром масс. $v'=\frac{v}{2}$, следовательно, $\omega=\frac{v}{l}$. С учетом всего вышеизложенного, перепишем уравнение (1): $mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)=\frac{ml^2v^2}{6l^2}$, $gl(1-\cos\alpha)=\frac{mv^2}{3}$. Отсюда $\cos\alpha=1-\frac{v^2}{3gl}$. Подставим числовые значения $\cos\alpha=0{,}15$; $\alpha=81°$.

3.38. Однородный стержень длиной $l=85$ см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую скорость v надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

Решение:

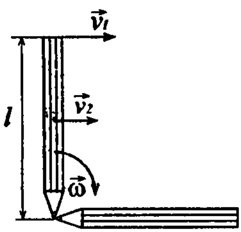


Рассмотрим движение центра масс стержня. Пусть K — точка подвеса стержня. Если стержень сделает пол-оборота и поднимется вертикально вверх, он будет обладать потенциальной энергией mgl. Для этого центру масс стержня нужно сообщить кинетическую энергию $\frac{J\omega^2}{2}=mgl$ — (1). Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера:

$J=\frac{1}{12}ml^2+m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ml^2$. Угловая скорость $\omega=\frac{v}{l}$ — (3), она одинакова для всех точек, принадлежащих стержню. Подставив (2) и (3) в (1), получим $\frac{ml^2v^2}{3\cdot 2\cdot l^2}=mgl$, откуда $v=\sqrt{6gl}$; $v=7{,}1$ м/с. Это скорость, при которой стержень поднимется в строго вертикальное положение. При $v>7{,}1$ м/с он сделает полный оборот.

3.39. Карандаш длиной $l=15$ см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость v будет иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша?

Решение:



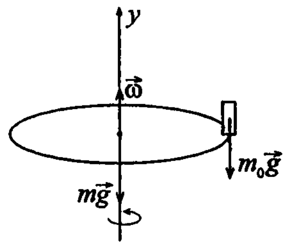
Рассмотрим движение центра масс карандаша. В вертикальном положении он обладает потенциальной энергией, которая при падении переходит в кинетическую энергию вращения. $\frac{J\omega_1^2}{2}=mg\frac{l}{2}$ — (1).

Момент инерции карандаша относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера: $J=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ml^2$ — (2).

Подставив (2) в (1), получим $\frac{l\omega_1^2}{3}=g$, откуда $\omega_1=\sqrt{\frac{3g}{l}}$; $\omega_1=14$ рад/с. Поскольку $\omega_1=\omega_2=\omega$, а линейная скорость $v=\omega R$, то скорость конца карандаша $v_1=\omega\cdot l=2{,}1$ м/с. Скорость середины $v_2=\omega\frac{l}{2}=1{,}05$ м/с.

3.40. Горизонтальная платформа массой $m = 100$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $n_1 = 10$ об/мин. Человек массой $m_0 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой n_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

Решение:



Система «человек — платформа» замкнута в проекции на ось y, т. к. моменты сил $M_{mg} = 0$ и $M_{m_0g} = 0$ в проекции на эту ось. Следовательно, можно воспользоваться законом сохранения момента импульса. В проекции на ось y: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, где J_1 — момент инерции платформы с человеком, стоящим на ее краю, J_2 — момент инерции платформы с человеком, стоящим в центре, ω_1 и ω_2 — угловые скорости платформы в обоих случаях. Здесь $J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2$, $J_2 = \frac{mR^2}{2}$ — (2), где R — радиус платформы. Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\omega = 2\pi n$, где n — частота вращения платформы, получим $\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)2\pi n_1 = 2\pi n_2\frac{mR^2}{2}$; $n_2 = n_1\frac{mR^2 + 2m_0R^2}{mR^2} = n_1\frac{m + 2m_0}{m}$; $n_2 = 22$ об/мин.

3.41. Какую работу A совершает человек при переходе от края платформы к ее центру в условиях предыдущей задачи? Радиус платформы $R = 1{,}5$ м.

Решение:

При переходе с края платформы к центру человек совершает работу, равную разности кинетических энергий вращения. $A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}$ — (1), где J_1 — момент инерции платформы с человеком на краю, J_2 — момент инерции платформы с человеком в центре. $J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2$; $J_2 = \frac{mR^2}{2}$. Частота вращения $\omega_1 = 2\pi n_1$; $\omega_2 = 2\pi n_2$. Воспользуемся формулой для n_2, полученной в задаче 3.40: $n_2 = n_1\frac{m+2m_0}{m}$, тогда $\omega_2 = 2\pi n_1\frac{m+2m_0}{m} = \omega_1\frac{m+2m_0}{m}$. Подставив числовые значения, получим: $J_1 = 247{,}5\,\text{кг·м}^2$, $J_1 = 112{,}5\,\text{кг·м}^2$, $\omega_1 = 1{,}1\,\text{рад/с}$, $\omega_2 = 2{,}3\,\text{рад/с}$. Подставив найденные значения в (1), получим: $A \approx 162\,\text{Дж}$.

3.42. Горизонтальная платформа массой $m = 80$ кг и радиусом $R = 1$ м вращается с частотой $n_1 = 20$ об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $J_1 = 2{,}94$ до $J_2 = 0{,}98\,\text{кг·м}^2$? Считать платформу однородным диском.

Решение:

Момент инерции платформы с человеком складывается из момента инерции пустой платформы и момента инерции человека. В начальном положении $J_{10} = J_0 + J_1$ — (1), а когда человек опустил руки $J_{10} = J_0 + J_2$ — (2). Здесь $J_0 = \frac{mR^2}{2}$ — (3). По закону сохранения момента импульса

$J_{10}\omega_1 = J_{20}\omega_2$, где $\omega_1 = 2\pi n_1$; $\omega_2 = 2\pi n_2$. Тогда $J_{10} 2\pi n_1 = J_{20} 2\pi n_2$, откуда $n_2 = \frac{J_{10} n_1}{J_{20}}$ — (4). Решая совместно (1) — (4), получим: $n_2 = \frac{\left(mR^2/2 + J_1\right)\cdot n_1}{mR^2/2 + J_2}$ — (5); $n_2 = 0{,}35$ об/с $= 21$ об/мин.

3.43. Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия $W_к$ платформы с человеком в условиях предыдущей задачи?

Решение:

Кинетическая энергия платформы с человеком $W_k = \frac{J\omega^2}{2}$.

Тогда первоначальная кинетическая энергия $W_{k1} = \frac{J_{10}\omega_1^2}{2}$, а после того, как человек опустил руки $W_{k2} = \frac{J_{20}\omega_2^2}{2}$. Здесь

$$J_{10} = \frac{mR^2}{2} + J_1;\quad J_{20} = \frac{mR^2}{2} + J_2;\quad \omega_1 = 2\pi n_1;\quad \omega_2 = 2\pi n_2.$$

Тогда $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{J_{20}\omega_2^2}{J_{10}\omega_1^2} = \frac{\left(mR^2/2 + J_1\right)4\pi^2 n_1^2}{\left(mR^2/2 + J_2\right)4\pi^2 n_2^2} = \frac{n_1^2\left(mR^2 + 2J_1\right)}{n_2^2\left(mR^2 + J_2\right)}$.

Из уравнения (5) предыдущей задачи $n_2 = \frac{\left(mR^2 + 2J_1\right)\cdot n_1}{mR^2 + 2J_2}$,

тогда $\frac{W_{к2}}{W_{к1}} = \frac{mR^2 + 2J_2}{mR^2 + 2J_1}$; $\frac{W_{к2}}{W_{к1}} = 1{,}05$.

3.44. Человек массой $m_0 = 60$ кг находится на неподвижной платформе массой $m = 100$ кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r = 5$ м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы $v_0 = 4$ км/ч. Радиус платформы $R = 10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

Решение:

По закону сохранения момента импульса $(J_1 + J_2)\times$ $\times\omega = rm_0v_0$ — (1), где $J_1 = m_0r^2$ — (2) — момент инерции человека; $J_2 = \frac{1}{2}mR^2$ — (3) — момент инерции платформы, rm_0v_0 — момент импульса человека. Подставив (2) и (3) в (1), получим $(m_0r^2 + 1/2mR^2)\omega = rm_0v_0$ или $(m_0r^2 + 1/2mR^2)2\pi n = rm_0v_0$, откуда $n = \frac{rm_0v_0}{\pi(2m_0r^2 + mR^2)}$.

Подставив числовые значения, учитывая, что $v = 1{,}1$ м/с, получим $n = 0{,}49$ об/мин.

3.45. Однородный стержень длиной $l = 0{,}5$ м совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальный оси, проходящей через его верхний конец. Найти период колебаний T стержня.

Решение:

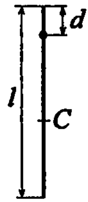
В данной задаче стержень является физическим маятником, его период малых колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mdg}}$, где J — момент инерции стержня относительно оси вращения, $d = \frac{l}{2}$ — (2) — расстояние от центра масс до оси вращения. По теореме Штейнера $J = J_0 + md^2$, где $J_0 = \frac{1}{12}ml^2$, отсюда $J = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{4ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3}$ — (3).

Подставив (2) и (3) в (1), получим $T = 2\pi\sqrt{\frac{2ml^2}{3mlg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$;

$T = 1{,}16$ с.

3.46. Найти период колебания T стержня предыдущей задачи, если ось вращения проходит через точку, находящуюся на расстоянии $d = 10$ см от его верхнего конца.

Решение:

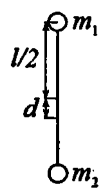


Период малых колебаний стержня $T = 2\pi \times \sqrt{\frac{J}{m\cdot(l/2-d)g}}$. По теореме Штейнера $J = J_0 + m\left(\frac{l}{2}-d\right)^2$, где $J_0 = \frac{ml^2}{12}$. Отсюда $J = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} - mld + md^2 = \frac{4ml^2}{12} - md(l-d)$; $J = m\cdot\left(\frac{l^2}{3} - dl + d^2\right)$.

Тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2/3 - dl + d^2}{g(l/2-d)}}$; $T = 1{,}07$ с.

3.47. На концах вертикального стержня укреплены два груза. Центр масс грузов находится ниже середины стержня на расстоянии $d = 5$ см. Найти длину стержня l, если известно, что период малых колебаний стержня с грузами вокруг горизонтальный оси, проходящей через его середину, $T = 2$ с. Массой стержня пренебречь по сравнению с массой грузов.

Решение:



Данная система является математическим маятником, для которого квадрат периода малых колебаний определяется по формуле: $T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{(m_1+m_2)dg}$. Момент инерции такого маятника: $J = l^2(m_1+m_2)/4$. Отсюда $T^2 = 4\pi^2 \times$

$\times \dfrac{l^2(m_1+m_2)}{4(m_1+m_2)\cdot dg} = \pi^2 \dfrac{l^2}{dg}$, откуда окончательно получим: $l = T\sqrt{dg}/\pi$; $l = 0{,}446$ м.

3.48. Обруч диаметром $D = 56{,}5$ см висит на гвозде, вбитом в стенку, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найти период колебаний T обруча.

Решение:

Центр масс находится в центре обруча, тогда период малых колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mRg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2J}{mDg}}$, где $J = \dfrac{1}{2}m \times$ $\times\left(R_1^2 + R_2^2\right)$, $R_1 = R_2$, следовательно, $J = mR^2 = m\dfrac{D^2}{4}$.

Отсюда $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2mD^2}{4mDg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{D}{2g}}$; $T = 1{,}5$ с.

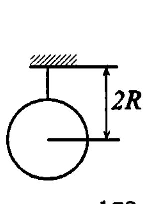
3.49. Какой наименьшей длины l надо взять нить, к которой подвешен однородный шарик диаметром $D = 4$ см, чтобы при определении периода малых колебаний T шарика рассматривать его как математический маятник? Ошибка δ при таком допущении не должна превышать 1%.

Решение:

Период малых колебаний математического маятника $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ — (1), период малых колебаний физического маятника $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgl}}$, где J — момент инерции шарика относительно оси вращения, m — масса шарика и l — расстояние от центра масс шарика до точки подвеса. В нашем случае $J=\frac{2}{5}mR^2+ml^2=ml^2\left[1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2\right]$. Обозначим $A=1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2$, тогда $J=Aml^2$. С учетом этого получим $T_2=2\pi\sqrt{\frac{lA}{g}}$ — (2). Из (1) и (2) имеем $\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{A}$. Ошибка, которую мы делаем, принимая подвешенный шарик за математический маятник, будет $\delta=\frac{T_2-T_1}{T_1}=$ $=\frac{T_2}{T_1}-1=\sqrt{A}-1$; отсюда $A=\left[1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2\right]=(1+\delta)^2$, или $\frac{R}{l}=\sqrt{\frac{5}{2}\left[(1+\delta)^2-1\right]}$ — (3). По условию $\delta\le 0{,}01$. Подставляя в (3), получим $\frac{R}{l}\le 0{,}0224$. Так как $R=\frac{D}{2}=0{,}02$ м, то предельное расстояние от центра масс шарика до точки подвеса $l\ge 0{,}089$ м, а предельная длина нити $L=l-R$; $L=0{,}069$ м.

3.50. Однородный шарик подвешен на нити, длина которой l равна радиусу шарика R. Во сколько раз период малых колебаний T_1 этого маятника больше периода малых колебаний T_2 математического маятника с таким же расстоянием от центра масс до точки подвеса?

Решение:



Период малых колебаний данного физического маятника $T_1=2\pi\sqrt{\frac{J}{m2Rg}}$. Период малых колебаний математического маятника

$T_2 = 2\pi\sqrt{2R/g}$. По теореме Штейнера $J = J_0 + m(2R)^2$, где $J_0 = \dfrac{2}{5}mR^2$, отсюда $J = \dfrac{2}{5}mR^2 + 4mR^2 = 4{,}4mR^2$. Тогда $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{4{,}4mR^2}{2mRg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2{,}2R}{g}}$; $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{2\pi\sqrt{2{,}2R}\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{g}\sqrt{2R}}$. После подстановки $\dfrac{T_1}{T_2} = 1{,}05$.

§ 4. Механика жидкостей и газов

В задачах этого раздела используются данные таблицы 11 из приложения. Прежде чем приступать к числовым расчетам, необходимо представить все величины в единицах системы СИ.

4.1. Найти скорость v течения углекислого газа по трубе, если известно, что за время $t = 30$ мин через поперечное сечение трубы протекает масса газа $m = 0{,}51$ кг. Плотность газа $\rho = 7{,}5$ кг/м^3. Диаметр трубы $D = 2$ см.

Решение:

За время t через поперечное сечение трубы проходит некоторый объем газа цилиндрической формы (масса этого объема газа нам известна). $V = \pi \frac{D^2}{4} l = \frac{m}{\rho}$ — (1). Скорость течения углекислого газа $v = l/t$. Из уравнения (1) найдем $l = \frac{4m}{\pi D^2 \rho}$, тогда $v = \frac{4m}{\pi D^2 \rho t}$; $v = 0{,}12$ м/с.

4.2. В дне цилиндрического сосуда диаметром $D = 0{,}5$ м имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. Найти зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Найти значение этой скорости для высоты $h = 0{,}2$ м.

Решение:

По теореме Бернулли $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_2 = \frac{\rho v_2^2}{2}$ или $v_1^2 + 2gh = v_2^2$ — (1), где v_1 — скорость понижения уровня воды в сосуде, v_2 — скорость вытекания воды из отверстия. В силу неразрывности струи $v_1 S_1 = v_2 S_2$, откуда $v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2}$ — (2), где S_1 — площадь поперечного сечения сосуда, S_2 —

площадь поперечного сечения отверстия. Подставляя (2) в (1), получим $v_1 = \frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}$. Так как $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ и $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, то $v_1 = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$. Поскольку $d^4 << D^4$, то $v_1 \approx \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}$. При $h = 0{,}2$ м скорость $v_1 = 0{,}8$ мм/с.

4.3. На столе стоит сосуд с водой, в боковой поверхности которого имеется малое отверстие, расположенное на расстоянии h_1 от дна сосуда и на расстоянии h_2 от уровня воды. Уровень воды в сосуде поддерживается постоянным. На каком расстоянии l от сосуда (по горизонтали) струя воды падает на стол в случае, если: а) $h_1 = 25$ см, $h_2 = 16$ см ; б) $h_1 = 16$ см, $h_2 = 25$ см?

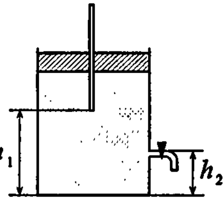
Решение:

По теореме Бернулли $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_2 = \frac{\rho v_2^2}{2}$ или $v_1^2 + 2gh = v_2^2$ — (1), где v_1 — скорость понижения уровня воды в сосуде, v_2 — скорость вытекания воды из отверстия. По условию $v_1 = 0$, тогда $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Высота $h_1 = \frac{gt^2}{2}$. Откуда время $t = \sqrt{2h_1 / g}$, тогда расстояние $l = v_2 t$; $l = \sqrt{4gh_1h_2 / g} = 2\sqrt{h_1h_2}$; $l = 0{,}4$ м.

4.4. Сосуд, наполненный водой, сообщается с атмосферой через стеклянную трубку, закрепленную в горлышке сосуда. Кран K находится на расстоянии $h_2 = 2$ см от дна сосуда. Найти скорость v вытекания воды из крана в случае, если расстояние между нижним концом трубки и дном сосуда: а) $h_1 = 2$ см; б) $h_1 = 7{,}5$ см; в) $h_1 = 10$ см.

Решение:

По закону сохранения энергии $W_п = W_к$, где $W_п = mg\Delta h = mg \times \times (h_1 - h_2)$ — потенциальная энергия водного столба над краном. $W_к = \frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия



вытекающей воды. $mg(h_1 - h_2) = \frac{mv^2}{2}$, отсюда $v^2 = 2g(h_1 - h_2)$ и $v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$. а) При $h_1 = 0{,}02$ м, $h_1 = h_2$, следовательно, $\Delta h = 0$ и $v = 0$. б) При $h_1 = 0{,}075$ м, $v = 1{,}04$ м/с. в) При $h_1 = 0{,}1$ м, $v = 1{,}25$ м/с.

4.5. Цилиндрической бак высотой $h = 1$ м наполнен до краев водой. За какое время t вся вода выльется через отверстие, расположенное у дна бака, если площадь S_2 поперечного сечения отверстия в 400 раз меньше площади поперечного сечения бака? Сравнить это время с тем, которое понадобилось бы для вытекания того же объема воды, если бы уровень воды в баке поддерживался постоянным на высоте $h = 1$ м от отверстия.

Решение:

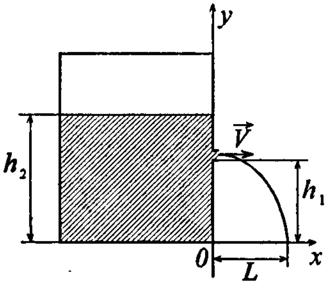
В задаче 4.2 была получена формула, выражающая скорость понижения уровня воды в баке $v_1 = \frac{S_2\sqrt{2gx}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}$. Здесь x — переменный уровень воды в баке. За время dt уровень воды в баке понизится на $dx = v \cdot dt = \frac{S_2\sqrt{2g}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}\sqrt{x}dt$. Решаем это уравнение:

$$t = \frac{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad t = \frac{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2\sqrt{2g}} 2\sqrt{x}\Big|_0^h; \quad t = \frac{2\sqrt{h}\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2\sqrt{2g}}.$$

Подставив числовые данные, получим $t = 3$ мин.

4.6. В сосуд льется вода, причем за единицу времени наливается объем воды $V_t = 0{,}2$ л/с. Каким должен быть диаметр d отверстия в дне сосуда, чтобы вода в нем держалась на постоянном уровне $h = 8{,}3$ см?

Решение:



Чтобы вода в сосуде была на постоянном уровне, необходимо, чтобы за одинаковые промежутки времени втекало и вытекало одинаковое количество воды. $V_t = \frac{V}{t} = \frac{lS}{t} = vS$, отсюда $v = \frac{V_t}{S}$. Т. к. $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения отверстия, то скорость вытекания жидкости $v = \frac{4V_t}{\pi d^2}$. Из уравнения Бернулли $\frac{\rho v^2}{2} = \rho g h$, отсюда $v = \sqrt{2gh}$. Тогда $\sqrt{2gh} = \frac{4V_t}{\pi d^2}$; $d^2 = \frac{4V_t}{\pi\sqrt{2gh}}$; $d = \sqrt{\frac{4V_t}{\pi\sqrt{2gh}}} = 1{,}4$ см.

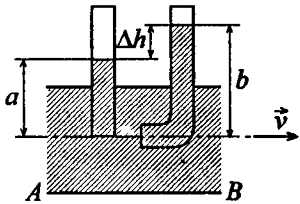
4.7. Какое давление p создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вылетает из него со скоростью $v = 25$ м/с? Плотность краски $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:
Уравнение Бернулли для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$.

В нашем случае при $h = 0$, $p = \frac{\rho v^2}{2} = 250$ кПа.

4.8. По горизонтальный трубе AB течет жидкость. Разность уровней этой жидкости в трубах a и b равна $\Delta h = 10$ см. Диаметры трубок a и b одинаковы. Найти скорость v течения жидкости в трубе AB.

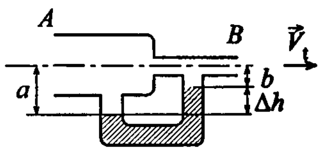
Решение:



Т. к. диаметры трубок $D_a = D_b$, то площади поперечного сечения $S_a = S_b$ — (1). В силу неразрывности струи $v_a S_a = v_b S_b$ — (2). Из (1) и (2) $v_a = v_b = v$. По формуле Торричелли $\rho g a + \frac{\rho v^2}{2} = \rho g b$, отсюда $v^2/2 = gb - ga = g(b-a)$. Т. к. $b - a = \Delta h$, то $v^2 = 2g\Delta h$ и $v = \sqrt{2g\Delta h} = 1{,}4$ м/с.

4.9. Воздух продувается через трубку AB. За единицу времени через трубку AB протекает объем воздуха $V_t = 5$ л/мин. Площадь поперечного сечения широкой части трубки AB равна $S_1 = 2$ см^2, а узкой ее части и трубки abc равна $S_2 = 0{,}5$ см^2. Найти разность уровней Δh воды, налитой в трубку abc. Плотность воздуха $\rho = 1{,}32$ кг/м^3.

Решение:



Объем воздуха, протекающий за единицу времени через трубку AB, $V_t = \frac{V}{t} = \frac{lS}{t} = vS$, отсюда $v = \frac{V_t}{S}$, где l — длина струи, t — время, $v = l/t$ — скорость движения воздуха. $v_1 = \frac{V_t}{S_1}$; $v_2 = \frac{V_t}{S_2}$; $V_t = 8{,}33 \cdot 10^{-6}$ м^3/с. Из формулы

Торричелли имеем $\frac{\rho_{воз}v_1^2}{2}+\rho_{вод}g\Delta h=\frac{\rho_{воз}v_2^2}{2}$, откуда $\Delta h=\frac{\rho_{воз}V_t^2}{2\rho_{вод}g}\left(\frac{1}{S_2^2}-\frac{1}{S_1^2}\right)=\frac{\rho_{воз}V_t^2\left(S_1^2-S_2^2\right)}{2\rho_{вод}gS_1^2S_2^2}=1{,}75$ мм.

4.10. Шарик всплывает с постоянной скоростью v в жидкости, плотность ρ_1 которой в 4 раза больше плоскости материала шарика. Во сколько раз сила трения $F_{тр}$, действующая на всплывающий шарик, больше силы тяжести mg, действующей на этот шарик?

Решение:

По второму закону Ньютона $F_A-mg-F_{тр}=0$ — (1), где $F_A=\rho_1 Vg$ — (2); $m=\rho_2 V$ — (3). Из (3) $V=\frac{m}{\rho_2}$, тогда $F_A=4\rho_2\frac{m}{\rho_2}g=4mg$ — (4). Преобразуя (1) с учетом (4), получим $F_{тр}=3mg$ или $\frac{F_{тр}}{mg}=3$.

4.11. Какой наибольшей скорости v может достичь дождевая капля диаметром $d=0{,}3$ мм, если динамическая вязкость воздуха $\eta=1{,}2\cdot10^{-5}$ Па·с?

Решение:

Во время падения на каплю действуют две противоположно направленные силы. Сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}$ (силу Архимеда не учитываем). При увеличении скорости падения сила сопротивления растет. Максимальной скорости капля достигнет, когда сила тяжести и сила сопротивления воздуха станут равны, $F=mg$. По закону Стокса $F=6\pi\eta rv=3\pi\eta dv$, тогда

$3\pi\eta dv = mg$. Поскольку $m = \rho V = \rho \frac{\pi d^3}{6}$, где ρ — плотность воды, то $3\pi\eta dv = \rho g \frac{\pi d^2}{6}$, откуда $v = \frac{\rho g d^2}{18\eta}$; $v = 4{,}1$ м/с.

4.12. Стальной шарик диаметром $d = 1$ мм падает с постоянной скоростью $v = 0{,}185$ см/с в большом сосуде, наполненном касторовым маслом. Найти динамическую вязкость η касторового масла.

Решение:

Поскольку шарик движется равномерно, то по второму закону Ньютона $mg - F_A - F = 0$ — (1), где масса шарика $m = \rho_c V = \rho_c \frac{\pi d^3}{6}$ —(2); сила Архимеда $F_A = \rho_м V g = \rho_м g \times \frac{\pi d^3}{6}$ — (3); сила сопротивления масла $F = 3\pi\eta dv$ — (4) по закону Стокса. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v = d^2 g \times (\rho_c - \rho_м)$, откуда $\eta = \frac{d^2 g(\rho_c - \rho_м)}{18v}$; $\eta = 2$ Па·с.

4.13. Смесь свинцовых дробинок с диаметрами $d_1 = 3$ мм и $d_2 = 1$ мм опустили в бак с глицерином высотой $h = 1$ м. На сколько позже упадут на дно дробинки меньшего диаметра по сравнению с дробинками большего диаметра? Динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}47$ Па·с.

Решение:

Считая движение дробинок равномерным, запишем второй закон Ньютона в общем случае $mg - F_A - F = 0$ — (1), где масса дробинки $m=\rho_с V=\rho_с \pi d^3/6$ — (2); сила Архимеда $F_A=\rho_г Vg=\rho_г g\frac{\pi d^3}{6}$ — (3); сила сопротивления глицерина $F=3\pi\eta dv$ — (4) по закону Стокса. Подставив уравнение (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v=d^2 g(\rho_с-\rho_г)$ — (5). Здесь $\rho_с$ — плотность свинца, $\rho_г$ — плотность глицерина. При равномерном движении скорость $v=\frac{h}{t}$ — (6). Подставив уравнение (6) в (5), выразим время t за которое дробинка достигнет дна $t=\frac{18\eta h}{d^2 g(\rho_с-\rho_г)}$. Тогда $\Delta t=t_2-t_1=\frac{18\eta h}{g(\rho_с-\rho_г)}$; $\Delta t=4$ мин.

4.14. Пробковый шарик радиусом $r=5$ мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом. Найти динамическую и кинематическую вязкости касторового масла, если шарик всплывает с постоянной скоростью $v=3{,}5$ см/с.

Решение:

Поскольку шарик движется равномерно, то по второму закону Ньютона $F_A-F-mg=0$ — (1), где масса шарика $m=\rho_п V=\rho_п\frac{4\pi r^3}{3}$ — (2); сила Архимеда $F_A=\rho_м Vg=\rho_м g\frac{4\pi r^3}{3}$ — (3); сила сопротивления масла $F=6\pi\eta rv$ — (4) по закону Стокса. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v=4r^2 g(\rho_п-\rho_м)$, откуда динамическая вязкость $\eta=\frac{2r^2 g(\rho_п-\rho_м)}{9v}$; $\eta=1{,}09$ Па·с. Кинематическая вязкость масла $\nu=\eta/\rho_м$; $\nu=12{,}1$ см^2/с.

4.15. В боковую поверхность цилиндрического сосуда радиусом $R = 2$ см вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус $r = 1$ мм которого и длина $l = 2$ см. В сосуд налито касторовое масло, динамическая вязкость которого $\eta = 1{,}2$ Па·с. Найти зависимость скорости v понижения уровня касторового масла в сосуде от высоты h этого уровня иад капилляром. Найти значение этой скорости при $h = 26$ см.

Решение:

Объем масла, вытекающего за время t из сосуда через капилляр, определяется формулой Пуазейля: $V = \dfrac{\pi r^4 t \Delta P}{8 l \eta}$ — (1), где разность давлений на концах капилляра $\Delta P = \rho g h$ — (2). С другой стороны, $V = S' v' t = \pi r^2 v' t$ — (3), где v' — скорость протекания масла через капилляр. Решая совместно (1) — (3), найдем $v' = \dfrac{r^2 \rho g h}{8 l \eta}$. В силу неразрывности струи $v'S' = vS$, где S — площадь поперечного сечения сосуда, отсюда $v = \dfrac{v'S'}{S} = \dfrac{v' r^2}{R^2}$. Окончательно имеем $v = \dfrac{r^4 \rho g h}{8 l \eta R^2}$. При $h = 0{,}26$ м скорость $v = 3 \cdot 10^{-5}$ м/с.

4.16. В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус которого $r = 1$ мм и длииа $l = 1{,}5$ см. В сосуд налит глицерин, динамическая вязкость которого $\eta = 1{,}0$ Па·с. Уровень глицерина в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h = 0{,}18$ м выше капилляра. Какое время потребуется на то, чтобы из капилляра вытек объем глицерина $V = 5\text{ см}^3$?

Решение:

Объем глицерина, вытекающего за время t из сосуда через капилляр, определяется формулой Пуазейля

$V = \dfrac{\pi r^4 t \Delta P}{8 l \eta}$ — (1). Разность давлений на концах капилляра обусловлена гидростатическим давлением жидкости, $\Delta P = \rho g h$ — (2). Подставив (2) в (1), выразим t: $t = \dfrac{8 V l \eta}{\pi r^4 \rho g h}$; $t = 1{,}5$ мин.

4.17. На столе стоит сосуд, в боковую поверхность которого вставлен горизонтальный капилляр на высоте $h_1 = 5$ см от дна сосуда. Внутренний радиус капилляра $r = 1$ мм и длина $l = 1$ см. В сосуд налито машинное масло, плотность которого $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 и динамическая вязкость $\eta = 0{,}5$ Па·с. Уровень масла в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h_2 = 50$ см выше капилляра. На каком расстоянии L от конца капилляра (по горизонтали) струя масла падает на стол?

Решение:

По формуле Пуазейля $V = \dfrac{\pi r^4 t \Delta p}{8 l \eta}$, где по закону Паскаля перепад давления $\Delta p = \rho g \Delta h = \rho g (h_2 - h_1)$. Тогда $V = \dfrac{\pi r^4 t \rho g (h_2 - h_1)}{8 l \eta}$, отсюда $V_t = \dfrac{V}{t} = \dfrac{\pi r^4 \rho g (h_2 - h_1)}{8 l \eta}$. С другой стороны, $V_t = vS = v \pi r^2$ (см. задачи 4.6 и 4.9), следовательно, $v \pi r^2 = \dfrac{\pi r^4 \rho g (h_2 - h_1)}{8 l \eta}$; $v = \dfrac{r^2 \rho g (h_2 - h_1)}{8 l \eta}$ — скорость вытекания струи из капилляра. Далее рассматриваем движения струй вдоль осей x и y, как независимые, причем по x движение равномерное, а по y — равнопеременное, поэтому $x = vt$ и $y = h_1 - \dfrac{gt^2}{2}$. В точке падения струи на стол $y = 0$, соответственно $h_1 - \dfrac{gt^2}{2} = 0$;

$t^2 = \frac{2h_1}{g}$; $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. Тогда струя падает на стол на расстоянии $L = x = vt = \frac{r^2 \rho g(h_2 - h_1)}{8l\eta}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 1$ см.

4.18. Стальной шарик падает в широком сосуде, наполненном трансформаторным маслом, плотность которого $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 и динамическая вязкость $\eta = 0{,}8$ Па·с. Считая, что закон Стокса имеет место при числе Рейнольдса $Re \le 0{,}5$ (если при вычислении Re в качестве величины D взять диаметр шарика), найти предельное значение диаметра D шарика.

Решение:

Поскольку шарик движется равномерно, то по второму закону Ньютона $mg - F_A - F = 0$ — (1), где масса шарика $m = \rho_c V = \rho_c \frac{\pi d^3}{6}$ — (2); сила Архимеда $F_A = \rho_м V g = \rho_м \times$ $\times g \frac{\pi d^3}{6}$ — (3); сила сопротивления масла $F = 3\pi\eta d v$ — (4) по закону Стокса. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v = d^2 g \times$ $\times(\rho_c - \rho_м)$, откуда $v = \frac{D^2 g(\rho_c - \rho_м)}{18\eta}$ — (5). Число Рейнольдса определяется соотношением $Re = \frac{Dv\rho_м}{\eta}$. По условию $Re \le 0{,}5$, тогда $\frac{Dv\rho_м}{\eta} \le 0{,}5$ или, с учетом (5), $\frac{D^3 g(\rho_c - \rho_м)\rho_м}{18\eta^2} \le 0{,}5$. Отсюда $D \le \sqrt[3]{\frac{0{,}5 \cdot 18\eta^2}{g\rho_м(\rho_c - \rho_м)}}$. Предельный диаметр шарика $D = 4{,}6$ мм.

4.19. Считая, что ламинарность движения жидкости (или газа) в цилиндрической трубе сохраняется при числе Рейнольдса $Re \le 3000$ (если при вычислении Re в качестве величины D взять диаметр трубы), показать, что условия задачи 4.1 соответствуют ламинарному движению. Кинематическая вязкость газа $\nu = 1{,}33 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

Решение:

Поскольку число Рейнольдса можно задать соотношением $Re = \dfrac{Dv}{\nu}$, то ламинарность течения жидкости сохранится при выполнении условия: $\dfrac{Dv}{\nu} \le 3000$. Подставив данные задачи 4.1, получим $1805 \le 3000$. Мы получили верное неравенство, следовательно, условия задачи 4.1 соответствуют ламинарному движению.

4.20. Вода течет по трубе, причем за единицу времени через поперечное сечение трубы протекает объем воды $V_t = 200$ см^3/с. Динамическая вязкость воды $\eta = 0{,}001$ Па·с. При каком предельном значении диаметра D трубы движение воды остается ламинарным? (Смотри условие предыдущей задачи.)

Решение:

Ламинарность течения жидкости сохранится при выполнении условия: $\dfrac{Dv\rho}{\eta} \le 3000$ — (1). Скорость течения воды $v = \dfrac{l}{t}$, в единицу времени $v = l$, где l — высота цилиндра объемом V_l. $V_l = \dfrac{\pi D^2 l}{4}$, откуда $l = \dfrac{4V_l}{\pi D^2}$. Тогда $v = \dfrac{4V_l}{\pi D^2}$, а неравенство (1) можно переписать: $\dfrac{4V_l \rho}{\pi D \eta} \le 3000$, откуда $D \le \dfrac{4V_l \rho}{3000 \pi \eta}$; $D \le 0{,}085$ м.

7 -- 3268

Глава II
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

§ 5. Физические основы молекулярно-кинетической теории и термодинамики

В условиях задач этого раздела температура задается в градусах Цельсия. При проведении числовых расчетов необходимо перевести температуру в градусы Кельвина, исходя из того, что $0°\,C = 273°\,K$. Кроме того, необходимо также представить все остальные величины в единицах системы СИ. Так, например, $1\,л = 10^{-3}\,м^3$; $1\,м^3 = 10^6\,см^3 = 10^9\,мм^3$. Если в задаче приведена графическая зависимость нескольких величин от какой-либо одной и при этом все кривые изображены на одном графике, то по оси y задаются условные единицы. При решении задач используются данные таблиц 3,6 и таблиц 9—11 из приложения.

5.1. Какую температуру T имеет масса $m = 2$ г азота, занимающего объем $V = 820\,см^3$ при давлении $p = 0{,}2$ МПа?

Решение:

Температуру азота можно определить из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда температура азота $T = \frac{pV\mu}{mR}$. Молярная масса азота $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Подставляя числовые данные, получим

$$T = \frac{0{,}2\cdot 10^6\cdot 820\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}028}{2\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31} = 280\,К \text{ или } T = 7°\,С.$$

5.2. Какой объем V занимает масса $m = 10$ г кислорода при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 20°\,С$?

Решение:

Выразим объем кислорода из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $V = \frac{mRT}{\mu p}$. Молярная масса кислорода $\mu = 0{,}032$ кг/моль. Подставляя числовые данные, получим $V = \frac{10^{-2} \cdot 8{,}31 \cdot 293}{0{,}032 \cdot 10^5} = 7{,}6 \cdot 10^{-3}$ м^3.

5.3. Баллон объемом $V = 12$ л наполнен азотом при давлении $p = 8{,}1$ МПа и температуре $t = 17°$ С. Какая масса m азота находится в баллоне?

Решение:

Массу азота можно выразить из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Молярная масса азота $\mu = 0{,}028$ кг/моль. $m = 1{,}13$ кг.

5.4. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре $t_1 = 7°$ С было $p_1 = 100$ кПа. При нагревании бутылки пробка вылетела. До какой температуры t_2 нагрели бутылку, если известно, что пробка вылетела при давлении воздуха в бутылке $p = 130$ кПа?

Решение:

По закону Шарля $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$, отсюда $T_2 = \frac{p_2 T_1}{p_1}$; $T_1 = 280$ К, $p_1 = 10^5$ Па; $T_2 = 364$ К.

5.5. Каким должен быть наименьшей объем V баллона, вмещающего массу $m = 6{,}4$ кг кислорода, если его стенки при температуре $t = 20°$ С выдерживают давление $p = 15{,}7$ МПа?

Решение:
Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $V = \frac{mRT}{\mu p}$. Молярная масса кислорода $\mu = 0{,}032$ кг/моль, $T = 293$ К. Тогда $V = 31$ л.

5.6. В баллоне находилась масса $m_1 = 10$ кг газа при давлеиии $p_1 = 10$ МПа. Какую массу Δm газа взяли из баллона, если давление стало равным $p_2 = 2{,}5$ МПа? Температуру газа считать постоянной.

Решение:
Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона для первого состояния $\frac{p_1V_1}{T} = \frac{m_1}{\mu}R$ — (1), для второго состояния $\frac{p_2V_2}{T} = \frac{m_2}{\mu}R$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{m_1}{m_2}$. Поскольку объем баллона не изменяется, то $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}$ или $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_1 + \Delta m}$; $\frac{\Delta m}{m_1} = \frac{p_1 - p_2}{p_1}$, откуда $\Delta m = \frac{m_1(p_1 - p_2)}{p_1}$; $\Delta m = 7{,}5$ кг.

5.7. Найти массу m сернистого газа (SO_2), занимающего объем $V = 25$ л при температуре $t = 27°$ C и давлении $p = 100$ кПа.

Решение:
Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$; $T = 300$ К; $V = 25 \cdot 10^{-3}$ м^3. Мо-

ляриую массу данного вещества можно определить по формуле $\mu = M_r k$ — (1), где M_r — относительная молекулярная масса вещества; $k = 10^{-3}$ кг/моль. Относительную молекулярную массу найдем из соотношения $M_r = \sum n_i A_{r,i}$, — (2), где n_i — число атомов i-го химического элемента, входящих в молекулу данного вещества; $A_{r,i}$ — относительная атомная масса i-го химического элемента. В нашем случае для сернистого газа формула (2) примет вид $M_r = n_s A_{r,s} + n_o A_{r,o}$, где $n_s = 1$ (число атомов серы в молекуле сернистого газа); $n_o = 2$ (число атомов кислорода в той же формуле); $A_{r,s}$ и $A_{r,o}$ — относительные атомные массы серы и кислорода. По таблице Д. И. Менделеева найдем $A_{r,s} = 32$, $A_{r,o} = 16$. После подстановки в формулу (3) значений n_s, n_o, $A_{r,s}$ и $A_{r,o}$ получим $M_r = 1 \cdot 32 + 2 \cdot 16 = 64$. Подставив это значение относительной молекулярной массы, а также значение k в формулу (1), найдем молярную массу сернистого газа: $\mu = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Тогда $m = 65$ г.

5.8. Найти массу m воздуха, заполняющего аудиторию высотой $h = 5$ м и площадью пола $S = 200$ м^2. Давление воздуха $p = 100$ кПа, температура помещения $t = 17°$ С. Молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

Решение:

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Объем комнаты $V = hS$. Тогда масса воздуха $m = \frac{phS\mu}{RT}$; $T = 290$ К; $m = 1{,}2$ т.

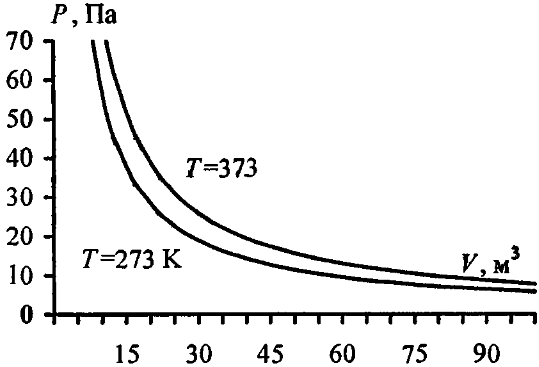
5.9. Во сколько раз плотность воздуха ρ_1, заполняющего помещение зимой ($t_1 = 7°$ С), больше его плотности ρ_2 летом ($t_2 = 37°$ С)? Давление газа считать постоянным.

Решение:

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона для первого состояния $\frac{pV_1}{T_1} = \frac{m}{\mu} R$ — (1), для второго состояния $\frac{pV_2}{T_2} = \frac{m}{\mu} R$ — (2). Разделив (1) на (2), при $p = const$ имеем $\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{m / \rho_1}{m / \rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, откуда $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1}$, где $T_1 = 280$ К; $T_2 = 310$ К. Тогда $\rho_1 / \rho_2 = 1{,}1$.

5.10. Начертить изотермы массы $m = 0{,}5$ г водорода для температур: а) $t_1 = 0°$ С; б) $t_2 = 100°$ С.

Решение:

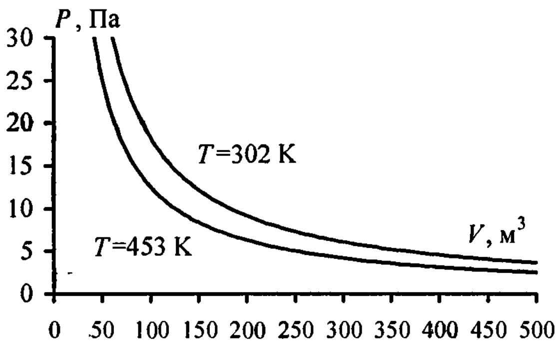


а) Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $pV = \frac{m}{\mu} RT_1$; $pV = 567$ Дж. Зависимость давления p от объема V выражается соотношением $p = 567 / V$.

б) Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $pV = \frac{m}{\mu}RT_2$; $pV = 775$ Дж. Зависимость давления p от объема V выражается соотношением $p = \frac{775}{V}$.

5.11. Начертить изотермы массы $m = 15{,}5$ г кислорода для температур: а) $t_1 = 39°$ С; б) $t_2 = 180°$ С.

Решение:



а) Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $pV = (m/\mu)RT_1$; $pV = 1255$ Дж. Зависимость давления p от объема V выражается соотношением $p = 1255/V$.

б) Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $pV = (m/\mu)RT_2$; $pV = 1823$ Дж. Зависимость давления p от объема V выражается соотношением $p = 1823/V$.

5.12. Какое количество ν газа находится в баллоне объемом $V = 10$ м^3 при давлении $p = 96$ кПа и температуре $t = 17°$ С?

Решение:

Число молей газа определяется следующим соотношением $\nu = \frac{m}{\mu}$. Тогда уравнение Менделеева — Клапейрона можно записать в виде $pV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT$, откуда $\nu = \frac{pV}{RT}$. Здесь $T = 290$ К. $\nu = 0{,}4$ кмоль.

5.13. Массу $m = 5$ г азота, находящегося в закрытом сосуде объемом $V = 4$ л при температуре $t_1 = 20°$ С, нагревают до температуры $t_2 = 40°$ С. Найти давление p_1 и p_2 газа до и после нагревания.

Решение:

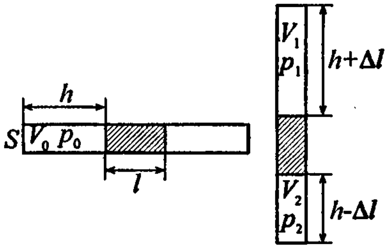
Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$. По условию $m = const$, тогда для первого состояния $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, для второго состояния $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$, откуда $p_1 = \frac{mRT_1}{\mu V}$; $p_2 = \frac{mRT_2}{\mu V}$. Подставляя числовые данные, получим $p_1 = 108$ кПа; $p_2 = 116$ кПа.

5.14. Посередине откачанного и запаянного с обеих концов капилляра, расположенного горизонтально, находится столбик ртути длиной $l = 20$ см. Если капилляр поставить вертикально, то столбик ртути переместится на $\Delta l = 10$ см. До какого давления p_0 был откачан капилляр? Длина капилляра $L = 1$ м.

Решение:

Объем воздуха с каждой стороны от столбика ртути при горизонтальном положении капилляра: $V_0 = Sh$, где

S — площадь поперечного сечения капилляра, $h = \frac{L-l}{2} = 0{,}4\,\text{м}$. Давление в этом положении равно p_0. При вертикальном положении капилляра объем воздуха в его



верхней части $V_1 = S(h + \Delta l)$, давление равно p_1. Т. к. $T = const$, то по закону Бойля — Мариотта $V_0 p_0 = V_1 p_1$ или $hp_0 = p_1(h + \Delta l)$ — (1). Давление p_2 в нижней части капилляра складывается из давления воздуха p_1 и давления столбика ртути p. Тогда для нижней части капилляра $hp_0 = (p_1 + p)(h - \Delta l)$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем $p_0 = \frac{p(h - \Delta l)(h + \Delta l)}{2h\Delta l}$. В условиях данной задачи $p = 200\,\text{мм рт. ст.} = 26{,}6\,\text{кПа}$. Отсюда $p_0 = 50\,\text{кПа}$.

5.15. Общеизвестен шуточный вопрос: «Что тяжелее: тонна свинца или тонна пробки?» На сколько истинный вес пробки, которая в воздухе весит 9,8кН, больше истинного веса свинца, который в воздухе весит также 9,8кН? Температура воздуха $t = 17°\,\text{C}$, давление $p = 100\,\text{кПа}$.

Решение:

На тела, находящиеся в воздухе, действует выталкивающая сила Архимеда $F_A = \rho g V$, где ρ — плотность воздуха, V — объем тела. Т.е. тело теряет в весе столько, сколько весит воздух в объеме данного тела. Объем свинца $V_1 = m / \rho_1$. Воздух в данном объеме весит $m_1 g$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \frac{m_1}{\mu}RT$, откуда $m_1 = \frac{\mu p V_1}{RT}$. Тогда $m_1 g = \frac{\mu p g V_1}{RT} = \frac{\mu p m g}{\rho_1 RT}$. Объем пробки $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$. Вес воздуха в данном объеме $m_2 g = \frac{\mu p m g}{\rho_2 RT}$. Истинный вес свинца $P_1 = g(m + m_1)$, истинный вес пробки $P_2 = g(m + m_2)$. Тогда $\Delta P = g(m_2 - m_1) = \frac{\mu p m g}{RT}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)$; $\Delta P = 58{,}6$ Н.

5.16. Каков должен быть вес p оболочки детского воздушного шарика, наполненного водородом, чтобы результирующая подъемная сила шарика $F = 0$, т.е. чтобы шарик находился во взвешенном состоянии? Воздух и водород находится при нормальных условиях. Давление внутри шарика равно внешнему давлению. Радиус шарика $r = 12{,}5$ см.

Решение:

Результирующая подъемная сила $F = m_1 g - (m_2 g + P)$, где m_1 — масса воздуха в объеме шарика, m_2 — масса водорода в объеме шарика. Так как $F = 0$, то $P = g(m_1 - m_2)$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $m = \frac{\mu p V}{RT}$.

Тогда $P = g\frac{pV}{RT}(\mu_1 - \mu_2) = \frac{4\pi r^3 p g}{3RT}(\mu_1 - \mu_2)$; $P = 96$ мН.

5.17. При температуре $t = 50°$ С давление насыщенного водяного пара $p = 12{,}3$ кПа. Найти плотность ρ водяного пара.

Решение:

Плотность вещества определяется соотношением $\rho = \frac{m}{V}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Тогда плотность водяного пара $\rho = \frac{p\mu}{RT}$; $\rho = 0{,}083$ кг/м^3.

5.18. Найти плотность ρ водорода при температуре $t = 10°$ C и давлении $p = 97{,}3$ кПа.

Решение:

$T = 288$ К. Плотность вещества определяется соотношением $\rho = \frac{m}{V}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Тогда плотность водорода $\rho = \frac{p\mu}{RT}$; $\rho = 0{,}081$ кг/м^3.

5.19. Некоторый газ при температуре $t = 10°$ C и давлении $p = 200$ кПа имеет плотность $\rho = 0{,}34$ кг/м^3. Найти молярную массу μ газа.

Решение:

$T = 283$ К. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда $\mu = \frac{mRT}{pV}$. Но $\frac{m}{V} = \rho$, отсюда $\mu = \frac{\rho RT}{p}$; $\mu = 0{,}004$ кг/моль.

5.20. Сосуд откачан до давления $p = 1{,}33 \cdot 10^{-9}$ Па; температура воздуха $t = 15°$ С. Найти плотность ρ воздуха в сосуде.

Решение:

$T = 288$ К. Плотность вещества определяется соотношением $\rho = \frac{m}{V}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Тогда плотность воздуха $\rho = \frac{p\mu}{RT}$; $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-14}$ кг/м^3.

5.21. Масса $m = 12$ г газа занимает объем $V = 4$ л при температуре $t_1 = 7°$ С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равной $\rho = 0{,}6$ кг/м^3. До какой температуры t_2 нагрели газ?

Решение:

Запишем уравнение состояния газа до и после нагревания $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (1); $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). Поскольку $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$, то (2) можно переписать: $\frac{p}{\rho_2} = \frac{RT_2}{\mu}$, откуда $T_2 = \frac{p\mu}{\rho_2 R}$ — (3). Давление p найдем из (1): $p = \frac{mRT_1}{\mu V_1}$. Подставив данное выражение в (3), получим $T_2 = \frac{mT_1}{V_1\rho_2}$; $T_2 = 1400$ К.

5.22. Масса $m = 10$ г кислорода находится при давлении $p = 304$ кПа и температуре $t_1 = 10°$ С. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении кислород занял объем $V_2 = 10$ л. Найти объем V_1 газа до расширения, температуру t_2 газа после расширения, плотности ρ_1 и ρ_2 газа до и после расширения.

Решение:

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона уравнение состояния газа до нагревания $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$; после нагревания $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$. По условию $p_1 = p_2 = p$, отсюда $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$, $V_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3; $\rho_1 = \frac{\mu p}{RT_1}$, $\rho_1 = 4{,}14$ кг/м^3; $T_2 = \frac{\mu p V_2}{mR}$, $T_2 = 1170$ К; $\rho_2 = \frac{\mu p}{RT_2}$, $\rho_1 = 1$ кг/м^3.

5.23. В запаянном сосуде находится вода, занимающая объем, равный половине объема сосуда. Найти давление p и плотность ρ водяного пара при температуре $t = 400°$ С, зная, что при этой температуре вся вода обращается в пар.

Решение:

В начальном состоянии плотность воды $\rho_1 = m / V_1$. После нагревания $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$. По условию $V_2 = 2V_1$, тогда $\rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1$; $\rho_2 = 500$ кг/м^3. Запишем уравнение состояния водяного пара при $T = 673$ К: $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT$ или $2p_2V_1 = \frac{m}{\mu}RT$. Поскольку $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$, то $p_2 = \frac{\rho_1 RT}{2\mu}$; $p_2 = 155$ МПа.

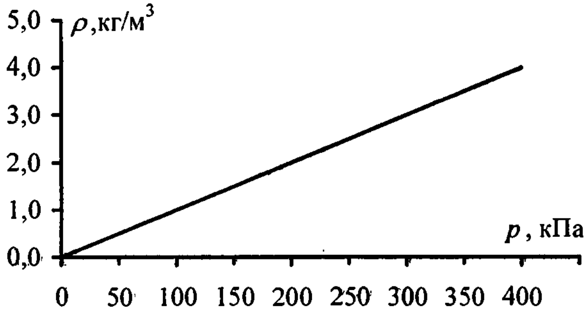
5.24. Построить график зависимости плотности ρ кислорода: а) от давления p при температуре $T = const = 390$ К в интервале

$0 \le p \le 400$ кПа через каждые 50 кПа; б) от температуры T при $p = const = 400$ кПа в интервале $200 \le T \le 300$ К через каждые 20К.

Решенне:

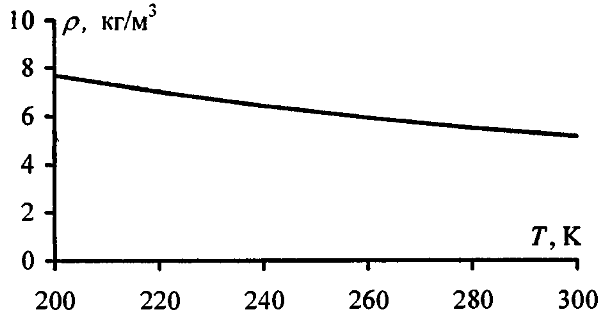
Воспользуемся формулой, полученной в задаче 5.17: $\rho = \dfrac{p\mu}{RT}$. Молярная масса кислорода $\mu = 0{,}032$ кг/моль.

а) При $T = const = 390$ К: $\rho \approx 10^{-5} \cdot p$;



p, кПа	0	50	100	150	200	250	300	350	400
ρ, кг/м^3	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4

б) При $p = const = 400$ кПа: $\rho = 1540 / T$.



T, K	200	220	240	260	280	300
ρ, кг/м^3	7,70	7,00	6,42	5,92	5.50	5,13

5.25. В закрытом сосуде объемом $V = 1\,м^3$ находится масса $m_1 = 1{,}6$ кг кислорода и масса $m_2 = 0{,}9$ кг воды. Найти давление p в сосуде при температуре $t = 500°$ С, зная, что при этой температуре вся вода превращается в пар.

Решение:

По закону Дальтона $p = p_1 + p_2$, где, согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, $p_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V}$ — парциальное давление кислорода $\mu_1 = 0{,}032$ кг/моль, $p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V}$ — парциальное давление водяного пара $\mu_2 = 0{,}018$ кг/моль. Отсюда $p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$; $p = 640$ кПа.

5.26. В сосуде 1 объем $V_1 = 3$ л находится газ под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. В сосуде 2 объем $V_2 = 4$ л находится тот же газ под давлением $p_2 = 0{,}1$ МПа. Температуры газа в обоих сосудах одинаковы. Под каким давлением p будет находиться газ, если соединить сосуды 1 и 2 трубкой?

Решение:

По закону Дальтона $p = p_1' + p_2'$, где p_1' и p_2' — парциальные давления газа после соединения сосудов. По закону Бойля — Мариотта $p_1'(V_1 + V_2) = p_1 V_1$; $p_2'(V_1 + V_2) = p_2 V_2$. отсюда $p_1' = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2}$; $p_2' = \frac{p_2 V_2}{V_1 + V_2}$; $p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$. Подставляя числовые данные, получим: $p = 140$ кПа.

5.27. В сосуде объемом $V = 2$ л находится масса $m_1 = 6$ г углекислого газа (CO_2) и масса m_2 закиси азота (N_2O) при температуре $t = 127°$ С. Найти давление p смеси в сосуде.

Решение:

По закону Дальтона $P = P_1 + P_2$, где, согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, $P_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V}$ — парциальное давление углекислого газа ($\mu_1 = 0{,}044$ кг/моль), $P_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V}$ — парциальное давление закиси азота ($\mu_2 = 0{,}044$ кг/моль). Отсюда $P = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$; $P = 415$ кПа.

5.28. В сосуде находится масса $m_1 = 14$ г азота и масса $m_2 = 9$ г водорода при температуре $t = 10°$ C и давлении $p = 1$ МПа. Найти молярную массу μ смеси и объем V сосуда.

Решение:

Молярная масса смеси μ есть отношение массы смеси m к количеству вещества смеси ν, т.е. $\mu = \frac{m}{\nu}$ — (1). Масса смеси равна сумме масс компонентов смеси $m = m_1 + m_2$. Количество вещества смеси равно сумме количеств вещества компонентов. Подставив в формулу (1) выражения m и ν, получим $\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2}$ — (2). Далее, применив способ использованный в задаче 5.7, найдем молярные массы μ_1 азота и μ_2 водорода: $\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Подставим значение величин в (2) и произведем вычисления: $\mu = \frac{14 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-3}}{\frac{14 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} + \frac{9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Запишем уравнение состояния смеси газов: $pV = \frac{m_1 + m_2}{\mu} RT$. Отсюда найдем $V = \frac{m_1 + m_2}{\mu p} RT$; $V = 11{,}7$ л.

5.29. Закрытый сосуд объемом $V = 2$ л наполнен воздухом при нормальных условиях. В сосуд вводится диэтиловый эфир $(C_2H_5OC_2H_5)$. После того как весь эфир испарился, давление в сосуде стало равным $p = 0{,}14$ МПа. Какая масса m эфира была введена в сосуд?

Решение:

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, в начальный момент, когда сосуд был заполнен воздухом, $p_1 V = \frac{m_в}{\mu_в} RT$. Когда в сосуд ввели диэтиловый эфир, $pV = \left(\frac{m_в}{\mu_в} + \frac{m}{\mu}\right) RT = \frac{m_в}{\mu_в} RT + \frac{m}{\mu} RT = p_1 V + \frac{m}{\mu} RT$, откуда $\frac{m}{\mu} RT = pV - p_1 V = (p - p_1)V$; $m = \frac{(p - p_1) \cdot V\mu}{RT}$. Молярная масса диэтилового эфира $(C_2H_5OC_2H_5)$ — $\mu = 74 \times$ $\times 10^{-3}$ кг/моль (см. задачу 5.7), соответственно $m = 2{,}5$ г.

5.30. В сосуде объемом $V = 0{,}5$ л находится масса $m = 1$ г парообразного йода (I_2). При температуре $t = 1000°$ С давление в сосуде $p_c = 93{,}3$ кПа. Найти степень диссоциации α молекул йода на атомы. Молярная масса молекул йода $\mu = 0{,}254$ кг/моль.

Решение:

Степенью диссоциации α называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа, т.е. степень диссоциации показывает, какая часть молекул распалась на атомы. В результате диссоциации мы имеем $\nu_1 = \frac{2\alpha m}{\mu}$ атомарного йода и $\nu_2 = \frac{(1-\alpha)\cdot m}{\mu}$ молекулярного йода. Их парциальные давления: $p_1 = \frac{2\alpha mRT}{\mu V}$ — (1); $p_2 = \frac{(1-\alpha)\cdot mRT}{\mu V}$ — (2). По закону Дальтона $p_c = p_1 + p_2$. Подставляя (1) и (2), получим $p_c = \frac{mRT}{\mu V}(1+\alpha)$, откуда $\alpha = \frac{\mu p_c V}{mRT} - 1$; $\alpha = 0{,}12$.

5.31. В сосуде находится углекислый газ. При некоторой температуре степень диссоциации молекул углекислого газа на кислород и окись углерода $\alpha = 0{,}25$. Во сколько раз давление в сосуде при этих условиях будет больше того давления, которое имело бы место, если бы молекулы углекислого газа не были диссоциированы?

Решение:

Решение аналогично задаче 5.30: $\frac{p_c}{p} = 1+\alpha$; $\alpha = 0{,}25$; $\frac{p_c}{p} = 1{,}25$.

5.32. В воздухе содержится 23,6% кислорода и 76,4% азота (по массе) при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 13°$ C. Найти плотность ρ воздуха и парциальные давления p_1 и p_2 кислорода и азота.

Решение:

Рассмотрим некоторую массу m воздуха, занимающую объем V. Данный объем будет содержать массу $0{,}236m$

кислорода и $0{,}764m$ азота. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, где μ — молярная масса воздуха. Разделив на V, получим $p = \frac{\rho}{\mu} RT$, откуда плотность воздуха $\rho = \frac{\mu p}{RT}$; $\rho = 1{,}2$ кг/м^3. Парциальное давление кислорода $p_1 = \frac{0{,}236m}{\mu_1 V} RT = \frac{0{,}236\rho}{\mu_1} RT$; $p_1 = 21$ кПа. Парциальное давление азота $p_2 = \frac{0{,}764m}{\mu_2 V} \times$ $\times RT = \frac{0{,}764\rho}{\mu_2} RT$; $p_2 = 79$ кПа.

5.33. В сосуде находится масса $m_1 = 10$ г углекислого газа и масса $m_2 = 15$ г азота. Найти плотность ρ смеси при температуре $t = 27°$ C и давлении $p = 150$ кПа.

Решение:

По закону Дальтона давление смеси газов $p = p_1 +$ $+ p_2$ — (1), где p_1 и p_2 парциальные давления углекислого газа и азота. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT$ — (2); $p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT$ — (3). Складывая (2) и (3), с учетом (1), получим: $pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) \times$ $\times RT$ — (4). Плотность смеси $\rho = \frac{m_1 + m_2}{V}$. Объем сосуда

V выразим из (4): $V=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{p}$, тогда $\rho=\frac{p}{RT}\times$ $\times\frac{(m_1+m_2)}{(m_1/\mu_1+m_2/\mu_2)}$; $\rho=1{,}98\text{ кг/м}^3$.

5.34. Найти массу m_0 атома: а) водорода; б) гелия.

Решение:

Масса молекулы равна отношению молярной массы к числу Авогадро: $m=\frac{\mu}{N_A}$. Поскольку молекула водорода состоит из двух атомов, то масса одного атома $m_0=\frac{\mu}{2N_A}$. а) Масса атома водорода $m_0=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг. б) Масса атома гелия $m_0=6{,}65\cdot10^{-27}$ кг.

5.35. Молекула азота, летящая со скоростью $v=600$ м/с, упруго ударяется о стенку сосуда по нормали к ней. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой сосуда за время удара.

Решение:

Запишем второй закон Ньютона в виде $F=m\frac{\Delta v}{\Delta t}$, отсюда $F\Delta t=m\Delta v$ — (1). Поскольку удар был упругий и происходил по нормали к стенке, то скорость молекулы после удара равна по модулю скорости до удара и противоположна по направлению. Тогда $\Delta v=v-(-v)=2v$ — (2). Масса молекулы $m=\frac{\mu}{N_A}$ — (3), где μ — молярная масса азота, N_A — число Авогадро. Подставив (2) и (3) в (1), получим $F\Delta t = \frac{2\mu v}{N_A}$; $F\Delta t = 5{,}6 \cdot 10^{-23}$ Н·с.

5.36. Молекула аргона, летящая со скоростью $v = 500$ м/с, упруго ударяется о стенку сосуда. Направление скорости молекулы и нормаль к стенке сосуда составляют угол $\alpha = 60°$. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой сосуда за время удара.

Решение:

По второму закону Ньютона $F\Delta t = m\Delta v$. Считая положительным направление нормали, внешней к стенке, получим: $\Delta v = v_2 \cos\alpha - (-v_1 \cos\alpha) = v_2 \cos\alpha + v_1 \cos\alpha$. Таким образом, $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$. Масса молекулы аргона $m = \frac{\mu}{N_A}$. Тогда $F\Delta t = \frac{2\mu v}{N_A}\cos\alpha$; $F\Delta t = 3{,}3 \cdot 10^{-23}$ Н·с.

5.37. Молекула азота летит со скоростью $v = 430$ м/с. Найти импульс mv этой молекулы.

Решение:

Импульс молекулы $\vec{p} = m\vec{v}$, где масса молекулы азота $m = \frac{\mu}{N_A}$. Отсюда $p = \frac{\mu v}{N_A}$; $p = mv = 2 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

5.38. Какое число молекул n содержит единица массы водяного пара?

Решение:

Число молекул, содержащееся в некоторой массе вещества, можно найти из соотношения: $n = \nu \cdot N_A$, где ν —

количество молей в данной массе вещества; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. $\nu = \frac{m}{\mu}$. Тогда, при $m = 1$, для водяного пара $n = \frac{N_A}{\mu}$; $n = 3{,}3 \cdot 10^{25}$.

5.39. В сосуде объемом $V = 4$ л находится масса $m = 1$ г водорода. Какое число молекул n содержит единица объема сосуда?

Решение:

Число молекул водорода N, содержащееся во всем сосуде, можно найти из соотношения: $N = \frac{m}{\mu} N_A$. Тогда число молекул в единице объема $n = N / V$ или $n = \frac{mN_A}{\mu V}$; $n = 7{,}5 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

5.40. Какое число молекул N находится в комнате объемом $V = 80$ м^3 при температуре $t = 17°$ С и давлении $p = 100$ кПа?

Решение:

Число молекул N, находящихся в комнате, можно найти из соотношения: $N = \frac{m}{\mu} N_A$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда $\frac{m}{\mu} = \frac{pV}{RT}$. Тогда $N = \frac{pVN_A}{RT}$; $N = 2 \cdot 10^{27}$.

5.41. Какое число молекул n содержит единица объема сосуда при температуре $t = 10°$ С и давлении $p = 1{,}33 \cdot 10^{-9}$ Па?

Решение:

Число молекул N, содержащееся во всем сосуде, можно найти из соотношения: $N = \frac{m}{\mu} N_A$. Тогда число молекул в единице объема $n = \frac{N}{V}$ или $n = \frac{mN_A}{\mu V}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, $pV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда $\frac{m}{\mu} = \frac{pV}{RT}$. Тогда $n = \frac{pN_A}{RT}$; $n = 3{,}4 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$.

5.42. Для получения хорошего вакуума в стеклянном сосуде необходимо подогревать стенки сосуда при откачке для удаления адсорбированного газа. На сколько может повыситься давление в сферическом сосуде радиусом $r = 10$ см, если адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд? Площадь поперечного сечения молекул $s_0 = 10^{-19}$ м^2. Температура газа в сосуде $t = 300°$ С. Слой молекул на стенках считать мономолекулярным.

Решение:

Давление p газа в сосуде связано с числом молекул n в единице объема сосуда соотношением $p = nkT$ или $p = \frac{NkT}{V}$ — (1), где N — число молекул в объеме $V = 4\pi r^3 / 3$ — (2). По условию эти N молекул образуют мономолекулярный слой, следовательно, $N = \frac{S}{s_0}$, где

$S = 4\pi r^2$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $p = \dfrac{3kT}{s_0 r}$; $p = 2{,}4$ Па.

5.43. Какое число частиц находится в единице массы парообразного йода (I_2), степень диссоциации которого $\alpha = 0{,}5$? Молярная масса молекулярного йода $\mu = 0{,}254$ кг/моль.

Решение:

Имеем $\nu_1 = \dfrac{2\alpha m}{\mu}$ атомарного йода и $\nu_2 = \dfrac{(\alpha - 1)m}{\mu}$ молекулярного йода (см. задачу 5.30). В единице массы $\nu_1 = \dfrac{2\alpha}{\mu}$; $\nu_2 = \dfrac{\alpha - 1}{\mu}$. Число частиц в единице массы парообразного йода $n = N_A\left(\dfrac{2\alpha}{\mu} + \dfrac{1-\alpha}{\mu}\right)$; $n = 3{,}56 \cdot 10^{24}$ кг$^{-1}$.

5.44. Какое число частиц N находится в массе $m = 16$ г кислорода, степень диссоциации которого $\alpha = 0{,}5$?

Решение:

Количество атомарного кислорода, находящегося в данной массе, $\nu_1 = \dfrac{2\alpha m}{\mu}$, количество молекулярного кислорода $\nu_2 = \dfrac{(1-\alpha)\cdot m}{\mu}$. Общее количество кислорода $\nu = \dfrac{2\alpha m}{\mu} + \dfrac{(1-\alpha)\cdot m}{\mu}$. Число частиц в массе m кислорода $N = N_A \nu$. После несложных преобразований получим $N = N_A \times \dfrac{m\cdot(\alpha + 1)}{\mu}$; $N = 4{,}5 \cdot 10^{23}$.

5.45. В сосуде находится количество $\nu_1 = 10^{-7}$ молей кислорода и масса $m_2 = 10^{-6}$ г азота. Температура смеси $t = 100°$C, давление в сосуде $p = 133$ мПа. Найти объем V сосуда, парциальные давления p_1 и p_2 кислорода и азота и число молекул n в единице объема сосуда.

Решение:

По закону Дальтона $p = p_1 + p_2$ — (1). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, $p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT$ — (2) и $p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT$ — (3), где μ_1 — молярная масса кислорода, μ_2 — молярная масса азота. Решая (1) — (3), получим $pV = RT\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$ или $pV = RT\left(\nu_1 + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$, откуда $V = \frac{RT}{p}\left(\nu_1 + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$; $V = 3{,}2$ л. Парциальное давление кислорода p_1 найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_1 V = \nu_1 RT$, откуда $p_1 = \nu_1 RT / V$; $p_1 = 98$ МПа. Парциальное давление азота $p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V}$; $p_2 = 35$ МПа. Для нахождения числа молекул n в единице объема сосуда воспользуемся формулой, выведенной в задаче 5.41: $n = pN_A / RT$; $n = 2{,}6 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.

5.46. Найти среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ молекул воздуха при температуре $t = 17°$ C. Молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

Решение:

Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$.

Для молекул воздуха $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 290}{0{,}029}} = 500$ м/с.

5.47. Найти отношение средних квадратичных скоростей молекул гелия и азота при одинаковых температурах.

Решение:

Средняя квадратичная скорость молекул гелия $\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu_1}}$, молекул азота — $\sqrt{\overline{v_2^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu_2}}$. Отсюда отношение $\dfrac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{\sqrt{\overline{v_2^2}}} = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}$. Молярная масса гелия $\mu_1 = 0{,}004$ кг/моль. Молярная масса азота $\mu_2 = 0{,}028$ кг/моль. Тогда $\sqrt{\overline{v_1^2}} / \sqrt{\overline{v_2^2}} = 2{,}65$.

5.48. В момент взрыва атомной бомбы развивается температура $T \approx 10^7$ К. Считая, что при такой температуре все молекулы полностью диссоциированы на атомы, а атомы ионизированы, найти среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ иона водорода.

Решение:

Средняя квадратичная скорость иона водорода $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$, где молярная масса иона водорода $\mu = 0{,}001$ кг/моль. Отсюда $\sqrt{\overline{v^2}} = 5 \cdot 10^5$ м/с.

5.49. Найти число молекул n водорода в единице объема сосуда при давлении $p = 266{,}6$ Па, если средняя квадратичная скорость его молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = 2{,}4$ км/с.

Решение:

В задаче 5.41 была получена формула, выражающая число молекул газа в единице объема $n = \frac{pN_A}{RT}$. Средняя квадратичная скорость молекул водорода $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, отсюда $RT = \left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)^2 \cdot \mu / 3$. Тогда $n = \frac{3pN_A}{\mu\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)^2}$;

$n = 4{,}2 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$.

5.50. Плотность некоторого газа $\rho = 0{,}06$ кг, средняя квадратичная скорость его молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = 500$ м/с. Найти давление p, которое газ оказывает на стенки сосуда.

Решение:

Давление газа определяется основным уравнением молекулярно-кинетической теории (МКТ): $p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$ — (1), где n — число молекул в единице объема, m_0 — масса молекулы. Кроме того, n и m_0 связаны соотношением: $n = \frac{\rho}{m_0}$. Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом: $p = \frac{\rho \overline{v^2}}{3}$; $p = 5$ кПа.

5.51. Во сколько раз средняя квадратичная скорость пылинки, взвешенной в воздухе, меньше средней квадратичной скорости молекул воздуха? Масса пылинки $m = 10^{-8}$ г. Воздух считать однородным газом, молярная масса которого $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

Решение:

Среднюю квадратичную скорость можно выразить с помощью следующих соотношений: $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$.

Для пылинки $\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$. Для воздуха $\sqrt{\overline{v_2^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$;

$$\frac{\sqrt{\overline{v_2^2}}}{\sqrt{\overline{v_1^2}}} = \sqrt{\frac{Rm}{\mu k}}; \quad \frac{\sqrt{\overline{v_2^2}}}{\sqrt{\overline{v_1^2}}} = 1{,}44 \cdot 10^7.$$

5.52. Найти импульс mv молекулы водорода при температуре $t = 20°$ С. Скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости.

Решение:

Масса молекулы водорода $m = \dfrac{\mu}{N_A}$. Ее средняя квадратичная скорость $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$. Тогда

$$mv = \frac{\mu}{N_A}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \frac{\sqrt{3RT\mu}}{N_A}; \quad mv = 6{,}3 \cdot 10^{-24} \text{ кг·м/с}.$$

5.53. В сосуде объемом $V = 2$ л находится масса $m = 10$ г кислорода при давлении $p = 90{,}6$ кПа. Найти среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ молекул газа, число молекул N, находящихся в сосуде, и плотность ρ газа.

Решение:

Средняя квадратичная скорость молекул кислорода $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$. Температуру газа T найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона: $pV = \dfrac{m}{\mu} RT$, откуда $T = \dfrac{pV\mu}{mR}$. Тогда $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3pV}{m}}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 230$ м/с. Число молекул, находящихся в сосуде, $N = \nu N_A = \dfrac{m}{\mu} N_A$; $N = 1{,}9 \cdot 10^{23}$. Плотность газа $\rho = \dfrac{m}{V}$; $\rho = 5$ кг/м^3.

5.54. Частицы гуммигута диаметром $\sigma = 1$ мкм участвуют в броуновском движении. Плотность гуммигута $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найти среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ частиц гуммигута при температуре $t = 0°$ С.

Решение:

По определению средняя квадратичная скорость $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$, где $T = 273$ К. Плотность частицы гуммигута ρ, умноженная на объем даст массу m. Считая частицу шаром, найдем ее объем $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi\sigma^3}{6}$.

Тогда масса частицы $m = \rho V = \dfrac{\pi\rho\sigma^3}{6}$. Отсюда $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT \cdot 6}{\pi\rho\sigma^3}}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$ м/с.

5.55. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа $\sqrt{\overline{v^2}} = 450$ м/с. Давление газа $p = 50$ кПа. Найти плотность ρ газа при этих условиях.

Решение:

Давление газа определяется основным уравнением МКТ: $p = \dfrac{2}{3} n \dfrac{m_0 \overline{v^2}}{2}$ — (1), где n — число молекул в единице объема, m_0 — масса молекулы. Кроме того, n и m_0 связаны соотношением: $n = \dfrac{\rho}{m_0}$. Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом: $p = \dfrac{\rho \overline{v^2}}{3}$, откуда $\rho = \dfrac{3p}{\overline{v^2}}$; $\rho = 0{,}74$ кг/м^3.

5.56. Плотность некоторого газа $\rho = 0{,}082$ кг/м^3 при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 17°$ С. Найти среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ молекул газа. Какова молярная масса μ этого газа?

Решение:

Из предыдущей задачи $p = \dfrac{\rho \overline{v^2}}{3}$, откуда $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3p}{\rho}}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 1{,}9$ км/с. Молярную массу μ этого газа можно найти из следующего выражения $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, откуда $\mu = \frac{3RT}{\overline{v^2}}$; $\mu = 0{,}002$ кг/моль.

5.57. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях $\sqrt{\overline{v^2}} = 461$ м/с. Какое число молекул n содержит единица массы этого газа?

Решение:

Число молекул $n = N_A \frac{m}{\mu}$, тогда в единице массы газа $n = \frac{N_A}{\mu}$. Молярная масса газа $\mu = \frac{3RT}{\overline{v^2}}$ (см. 5.56), тогда $n = \frac{N_A \overline{v^2}}{3RT}$; $n = 1{,}88 \cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$.

5.58. Найти внутреннюю энергию W массы $m = 20$ г кислорода при температуре $t = 10°$ С. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая часть на долю вращательного движения?

Решение:

Внутренняя энергия кислорода $W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$. Здесь число степеней свободы $i = 5$, из них $i = 3$ приходится на долю поступательного движения молекул и $i = 2$ — на долю вращательного движения. Тогда $W = 3{,}7$ кДж; $W_{пост} = 2{,}2$ кДж; $W_{ср} = 1{,}5$ кДж.

5.59. Найти внутреннюю энергию W массы $m = 1$ г воздуха при температуре $t = 15°$ С. Молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

Решение:

Внутренняя энергия газа $W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$. Воздух можно считать (в процентном соотношении) двухатомным газом, т.е. число степеней свободы $i = 5$. Тогда $W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT$; $W = 210$ Дж.

5.60. Найти энергию $W_{вр}$ вращательного движения молекул, содержащихся в массе $m = 1$ кг азота при температуре $t = 7°$ C.

Решение:

Внутренняя энергия газа $W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$. Поскольку молекула азота состоит из двух атомов, то для нее количество степеней свободы вращательного движения $i = 2$. Тогда $W_{вр} = \frac{m}{\mu}RT$; $W_{вр} = 83$ кДж.

5.61. Найти внутреннюю энергию W двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом $V = 2$ л под давлением $p = 150$ кПа.

Решение:

Согласно уравнению состояния идеального газа $pV = \frac{m}{\mu}RT$ — (1). Внутренняя энергия газа $W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$ или, с учетом (1), $W = \frac{i}{2}pV$. Для двухатомного газа количество степеней свободы $i = 5$, тогда $W = \frac{5}{2}pV$; $W = 750$ Дж.

5.62. Энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне объем $V = 20$ л, $W = 5$ кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найти массу m азота в баллоне и давление p, под которым он находится.

Решение:

Энергия поступательного движения молекул азота $W = \frac{m\overline{v^2}}{2}$, откуда $m = \frac{2W}{\overline{v^2}}$; $m = 2{,}5$ г. Согласно основному уравнению МКТ $p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$ — (1), где n — число молекул в единице объема, m_0 — масса одной молекулы. Очевидно, что произведение $nm_0 = \rho$ — плотности азота. Тогда $nm_0 V = \rho V = m$ — массе всего азота, находящегося в баллоне. Умножив правую и левую части уравнения (1) на V, получим $pV = \frac{2}{3} nm_0 V \frac{\overline{v^2}}{2} = \frac{2}{3} m \frac{\overline{v^2}}{2}$. Но $\frac{m\overline{v^2}}{2} = W$, следовательно, $pV = \frac{2}{3} W$, откуда $p = \frac{2W}{3v}$; $p = 167$ кПа.

5.63. При какой температуре T энергия теплового движения атомов гелия будет достаточна для того, чтобы атомы гелия преодолели земное тяготение и навсегда покинули земную атмосферу? Решить аналогичную задачу для Луны.

Решение:

Согласно условию задачи средняя квадратичная скорость атомов гелия должна быть равна второй космической скорости, т.е. $\sqrt{\overline{v^2}} = 11{,}2$ км/с. $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, откуда $T = \frac{\mu \overline{v^2}}{3R}$; $T \approx 2 \cdot 10^4$ К. Для Луны $\sqrt{\overline{v^2}} = 2{,}4$ км/с, тогда $T = 900$ К.

5.64. Масса $m = 1$ кг двухатомного газа находится под давлением $p = 80$ кПа и имеет плотность $\rho = 4$ кг/м^3. Найти энергию теплового движения W молекул газа при этих условиях.

Решение:

Энергия теплового движения двухатомного газа $W = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, тогда $W = \frac{5}{2} pV$. Так как $V = \frac{m}{p}$, то окончательно имеем $W = \frac{5}{2} \frac{pm}{\rho}$; $W = 50$ кДж.

5.65. Какое число молекул N двухатомного газа содержит объем $V = 10$ см^3 при давлении $p = 5{,}3$ кПа и температуре $t = 27°$ С? Какой энергией теплового движения W обладают эти молекулы?

Решение:

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT$. Количество вещества $\nu = \frac{N}{N_А}$, где N — число молекул в данном объеме вещества, $N_А$ — число

Авогадро. Тогда $pV = \frac{N}{N_A} RT$. Но $\frac{R}{N_A} = k$ — постоянной Больцмана. Отсюда окончательно имеем $pV = NkT$, откуда $N = \frac{pV}{kT}$; $N = 1{,}3 \cdot 10^{19}$. Энергия теплового движения двухатомного газа $W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu} RT$, где $\frac{m}{\mu} = \nu = \frac{N}{N_A}$, тогда $W = \frac{5}{2}\frac{N}{N_A} RT$; $W = 0{,}133$ Дж.

5.66. Найти удельную теплоемкость c кислорода для: а) $V = const$; б) $p = const$.

Решение:

Молярная теплоемкость C и удельная теплоемкость c связаны соотношением $C = \mu c$. Отсюда $c = \frac{C}{\mu}$. а) При $V = const$ $c_V = \frac{C_V}{\mu}$, где $C_V = \frac{i}{2} R$. Для кислорода $i = 5$, следовательно, $C_V = \frac{5}{2} R$. Тогда удельная теплоемкость кислорода при постоянном объеме $c_V = \frac{5R}{2\mu}$; $c_V = 650$ Дж/(кг·К). б) При $P = const$ $C_p = C_V + R = \frac{7}{2} R$. Отсюда $c_p = \frac{7R}{2\mu}$; $c_p = 910$ Дж/(кг·К).

5.67. Найти удельную теплоемкость c_p: а) хлористого водорода; б) неона; в) окиси азота; г) окиси углерода; д) паров ртути.

Решение:

Удельная теплоемкость $c_p = \frac{C_p}{\mu}$, где молярная теплоемкость $C_p = C_V + R$. Поскольку $C_V = \frac{v}{2} R$, то $C_p = \frac{R(i+2)}{2}$. Для одноатомных газов $C_p = 20{,}8$ Дж/(моль·К), для двухатомных газов $C_p = 29{,}1$ Дж/(моль·К), для многоатомных $C_p = 33{,}2$ Дж/(моль·К).

а) $\mu_{HCl} = 0{,}0365$ кг/моль, $c_p \approx 800$ Дж/(кг·К);

б) $\mu_{Ne} = 0{,}02$ кг/моль, $c_p = 1040$ Дж/(кг·К);

в) $\mu_{NO} = 0{,}03$ кг/моль, $c_p = 970$ Дж/(кг·К);

г) $\mu_{CO} = 0{,}028$ кг/моль, $c_p = 1040$ Дж/(кг·К);

д) $\mu_{Hg} = 0{,}201$ кг/моль, $c_p = 103$ Дж/(кг·К).

5.68. Найти отношение удельных теплоемкостей c_p / c_V для кислорода.

Решение:

Для кислорода $c_p = 910$ Дж/(кг·К), $c_V = 650$ Дж/(кг·К) (см. задачу 5.66); $\frac{c_p}{c_V} = 1{,}4$.

5.69. Удельная теплоемкость некоторого двухатомного газа $c_p = 14{,}7$ кДж/(кг·К). Найти молярную массу μ этого газа.

Решение:

Молярная теплоемкость C_p и удельная теплоемкость c_p газов связаны соотношением $C_p = c_p \mu$, откуда

$\mu = \dfrac{C_p}{c_p}$ — (1). $C_p = C_V + R$ — (2), где молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = \dfrac{i}{2}R$. Для двухатомного газа $i = 5$, тогда из (2) $C_p = \dfrac{7}{2}R$ — (3). Подставив (3) в (1), получим $\mu \dfrac{7R}{2c_p}$; $\mu = 0{,}002$ кг/моль.

5.70. Плотность некоторого двухатомного газа при нормальных условиях $\rho = 1{,}43$ кг/м^3. Найти удельные теплоемкости c_V и c_p этого газа.

Решение:

Молярная теплоемкость C и удельная теплоемкость c связаны соотношением $C = \mu c$. Отсюда $c = C / \mu$. При $V = const$ $c_V = \dfrac{C_V}{\mu}$, где $C_V = \dfrac{i}{2}R$. Для двухатомного газа $i = 5$, следовательно, $C_V = \dfrac{5}{2}R$. Тогда удельная теплоемкость двухатомного газа при постоянном объеме $c_V = \dfrac{5R}{2\mu}$ — (1). При $P = const$ $C_p = \dfrac{7}{2}R$. Отсюда $c_p = \dfrac{7R}{2\mu}$ — (2). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ или $p = \dfrac{m}{V\mu}RT$. Но $\dfrac{m}{V} = \rho$, тогда $p = \dfrac{\rho}{\mu}RT$, откуда $\mu = \dfrac{\rho RT}{p}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и (2), получим $c_V = \dfrac{5p}{2\rho T}$; $c_p = \dfrac{7p}{2\rho T}$. При нормальных условиях $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К. Тогда $c_V = 650$ Дж/(кг·К), $c_p = 910$ Дж/(кг·К).

5.71. Молярная масса некоторого газа $\mu = 0{,}03$ кг/моль, отношение $c_p / c_V = 1{,}4$. Найти удельные теплоемкости c_V и c_p этого газа.

Решение:

Удельные теплоемкости c_V и c_p выражаются следующим образом $c_V = \dfrac{C_V}{\mu}$ — (1); $c_p = \dfrac{C_p}{\mu}$ — (2), где молярная теплоемкость $C_p = C_V + R = \dfrac{i}{2}R + R$ — (3). По условию $\dfrac{c_p}{c_V} = 1{,}4$ или $c_p = 1{,}4c_V$, тогда из (3) $1{,}4C_V = c_V + R$, $C_V = \dfrac{5}{2}R$ — (4), $C_p = \dfrac{7}{2}R$ — (5). Подставив (4) в (1) и (5) в (2), получим $c_V = \dfrac{5R}{2\mu}$; $c_V = 693$ Дж/(кг·К); $c_p = \dfrac{7R}{2\mu}$; $c_p = 970$ Дж/(кг·К).

5.72. Во сколько раз молярная теплоемкость C' гремучего газа больше молярной теплоемкости C'' водяного пара, получившегося при его сгорании? Задачу решить для: а) $V = const$; б) $p = const$.

Решение:

Запишем уравнение реакции $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. Таким образом из количества $\nu_1 = 3$ моль двухатомного газа получается количество $\nu_2 = 2$ моль трехатомного газа, т.е. до сгорания $C_{V1} = 3\frac{5R}{2}$ и $C_{p1} = 3\frac{7R}{2}$; после сгорания $C_{V2} = 2\frac{6R}{2}$ и $C_{p2} = 2\frac{8R}{2}$. Тогда а) $\frac{C_{V1}}{C_{V2}} = 1{,}25$; б) $\frac{C_{p1}}{C_{p2}} = 1{,}31$.

5.73. Найти степень диссоциации α кислорода, если его удельная теплоемкость при постоянном давлении $c_p = 1{,}05$ кДж/(кг·К).

Решение:

Пусть m — полная масса кислорода. Тогда αm — масса диссоциированного кислорода, а $(1-\alpha)\cdot m$ — масса недиссоциированного кислорода. Количество тепла, необходимое для нагревания газа на некоторую температуру ΔT: $Q = c_p m \Delta T$ или $Q = \left[c_p^H(1-\alpha)m + c_p^g \alpha m\right]\cdot \Delta T$, где c_p^H и c_p^g — соответственно теплоемкости при постоянном давлении диссоциированного и не диссоциированного газов. Тогда $c_p m \Delta T = \left[c_p^H(1-\alpha)m + c_p^g \alpha m\right]\cdot \Delta T$, отсюда $c_p = c_p^H(1-\alpha) + c_p^g \alpha$. Т.к. $c_p = \frac{i+2}{i}\frac{R}{\mu}$, то $c_p^H = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$ и $c_p^g = \frac{5}{2}\frac{2R}{\mu}$, поскольку для недиссоциированного газа $i = 5$, а для диссоциированного $i = 3$. Тогда $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}(1-\alpha) + 5\frac{R}{\mu}\alpha = \frac{R}{2\mu}(7(1-\alpha) + 10\alpha) = \frac{R}{2\mu}(7+3\alpha)$; $7 + 3\alpha = \frac{2\mu c_p}{R}$; $\alpha = \frac{2\mu c_p - 7R}{3R}$; $\alpha = 0{,}362$.

5.74. Найти удельные теплоемкости c_V и c_p парообразного йода (I_2), если степень диссоциации его $\alpha = 0{,}5$. Молярная масса молекулярного йода $\mu = 0{,}254$ кг/моль.

Решение:

Теплоемкость при постоянном давлении $c_p = \frac{R}{2\mu}(7+3\alpha)$ (см. задачу 5.73); $c_p = 139$ Дж/(моль·К). Аналогично можно найти теплоемкость при постоянном объеме $Q = c_V m\Delta T$; $Q = \left[c_V^H(1-\alpha)m + c_V^g \alpha m\right]\cdot\Delta T$, отсюда $c_V = c_V^H(1-\alpha) + c_V^g\alpha$. Но $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, следовательно, $c_V^H = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$; $c_V^g = \frac{3}{2}\frac{2R}{\mu}$, тогда $c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}(1-\alpha) + \frac{6}{2}\frac{R}{\mu}\alpha = \frac{R}{2\mu}[5(1-\alpha)+6\alpha] = \frac{R}{2\mu}(5+\alpha)$; $c_V = 89{,}97$ Дж/(моль·К).

5.75. Найти степень диссоциация α азота, если для него отношение $c_p / c_V = 1{,}47$.

Решение:

Теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме для частично диссоциированного газа $c_p = \frac{R}{2\mu}\times$ $\times(7+3\alpha)$; $c_V = \frac{R}{2\mu}(5+\alpha)$ (см. задачи 5.73 и 5.74). Тогда $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{7+3\alpha}{5+\alpha}$; $\gamma(5+\alpha) = 7+3\alpha$; $5\gamma + \alpha\gamma = 7+3\alpha$; $-\alpha\gamma + 3\alpha = 5\gamma - 7$; $5\gamma + \alpha\gamma = 7+3\alpha$; $-\alpha\gamma + 3\alpha = 5\gamma - 7$; $\alpha(3-\gamma) = 5\gamma - 7$; $\alpha = \frac{5\gamma - 7}{3-\gamma}$; $\alpha = 0{,}228$.

5.76. Найти удельную теплоемкость c_p газовой смеси, состоящей из количества $\nu_1 = 3$ кмоль аргона и количества $\nu_2 = 3$ кмоль азота.

Решение:

Количество тепла, необходимое для нагревания смеси газов на некоторую температуру ΔT: $Q = c_p(m_1 + m_2)\cdot \Delta T$ или $Q = (c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2)\cdot \Delta T$. Тогда $c_p(m_1 + m_2)\cdot \Delta T = (c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2)\cdot \Delta T$, отсюда $c_p = \frac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{m_1 + m_2}$. Т. к. аргон — газ одноатомный, то число степеней свободы $i = 3$, а азот — двухатомный, поэтому $i = 5$. Т.к. $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$, то $c_{p1} = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu_1}$ и $c_{p2} = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu_2}$. Тогда теплоемкость смеси при $p = const$: $c_p = \frac{5Rm_1/2\mu_1 + 7Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2} = \frac{R/2(5\nu_1 + 7\nu_2)}{m_1 + m_2}$;

$c_p = \frac{R/2(5\nu_1 + 7\nu_2)}{\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2} = \frac{R(5\nu_1 + 7\nu_2)}{2(\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2)}$; $c_p = 685{,}72$ Дж/(кг·К).

5.77. Найти отношение c_p/c_V для газовой смеси, состоящей из массы $m_1 = 8$ г гелия и массы $m_2 = 16$ г кислорода.

Решение:

Удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении $c_p = \frac{5Rm_1/2\mu_1 + 7Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2}$ (см. задачу 5.76). Аналогично можно найти теплоемкость смеси при постоянном объеме: $Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T$ и $Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\Delta T$, откуда

$c_V = \dfrac{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}{m_1 + m_2}$. Но $c_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{\mu}$, поэтому $c_{V1} = \dfrac{3}{2}\dfrac{R}{\mu_1}$; $c_{V2} = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{\mu_2}$. Тогда удельная теплоемкость газовой смеси при $V = const$: $c_V = \dfrac{3Rm_1/2\mu_1 + 5Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2}$. Отсюда

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{3Rm_1/2\mu_1 + 5Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 + m_2}{3Rm_1/2\mu_1 + 5Rm_2/2\mu_2};$$

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{5m_1/\mu_1 + 7m_2/\mu_2}{3m_1/\mu_1 + 5m_2/\mu_2} = \frac{5m_1\mu_2 + 7m_2\mu_1}{3m_1\mu_2 + 5m_2\mu_1}; \quad \frac{c_p}{c_V} = 1{,}59.$$

5.78. Удельная теплоемкость газовой смеси, состоящей из количества $\nu_1 = 1$ кмоль кислорода и некоторой массы m_2 аргона равна $c_V = 430$ Дж/(кг·К),. Какая масса m_2 аргона находится в газовой смеси?

Решение:

Количество тепла, необходимое для нагревания смеси на некоторую температуру ΔT $Q = c_V(m_1 + m_2)\cdot\Delta T$ или $Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\cdot\Delta T$. Отсюда $c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \dfrac{iR}{2\mu}$. Для кислорода $i_1 = 5$, а для аргона $i_2 = 3$, поэтому $c_{V1} = \dfrac{5R}{2\mu_1} = 650$ Дж/(кг·К) и $c_{V2} = \dfrac{3R}{2\mu_2} = 312{,}5$ Дж/(кг·К). Тогда $c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2$; $m_2(c_V - c_{V2}) = m_1(c_{V1} - c_V)$, откуда $m_2 = \dfrac{m_1(c_{V1} - c_V)}{c_V - c_{V2}} = \dfrac{\mu_1\nu_1(c_{V1} - c_V)}{c_V - c_{V2}}$.

Подставляя числовые данные, получим $m_2 = 60$ кг.

5.79. Масса $m = 10$ г кислорода находится при давлении $p = 0{,}3$ МПа и температуре $t = 10°$ C. После нагревания при $p = const$ газ занял объем $V_2 = 10$ л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, и энергию теплового движения молекул газа W до и после нагревания.

Решение:

Энергия теплового движения молекул кислорода до нагревания $W_1 = 5mRT_1 / 2\mu$ — (1), после нагревания $W_2 = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). При расширении газа была совершена работа $\Delta A = p\Delta V = p(V_2 - V_1)$ — (3). Количество теплоты, полученное газом в соответствии с первым законом термодинамики, $\Delta Q = \Delta W + \Delta A$ — (4). Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R(T_1 - T_2)$ — (5). Неизвестные V_1 и T_2 можно найти из уравнений начального и конечного состояний газа. $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (6); $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (7). Из (6) $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$. Из (7) $T_2 = \frac{pV_2\mu}{mR}$. Из уравнения (1) $W_1 = 1{,}8$ кДж. Подставив (7) в (2), получим $W_2 = \frac{5}{2}pV_2$; $V_2 = 7{,}6$ кДж. Из (4), с учетом (3) и (6), $\Delta Q = (W_2 - W_1) + p \cdot \left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)$; $\Delta Q = 7{,}9$ кДж.

5.80. Масса $m = 12$ г азота находится в закрытом сосуде объемом $V = 2$ л при температуре $t = 10°$ C. После нагревания давление в сосуде стало равным $p = 1{,}33$ МПа. Какое количество теплоты Q сообщено газу при нагревании?

Решенне:

При $V = const$ $A = \int pdv = 0$ имеем $dQ = \frac{M}{\mu}C_V dT$, отсюда $Q = \int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{M}{\mu}C_V dt = \frac{m}{\mu}C_V(T_2 - T_1)$. Температуру T_2 найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_2V = \frac{m}{\mu}RT_2$, откуда $T_2 = \frac{p_2V\mu}{mR}$; $T_2 = 747$ К. Молярная теплоемкость азота $c_V = 20{,}8$ Дж/моль·К. Молярная масса азота $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Подставив числовые данные, получим $Q = 4{,}15$ кДж.

5.81. В сосуде объемом $V = 0{,}1$ МПа находится азот при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы: а) при $p = const$ объем увеличился вдвое; б) при $V = const$ давление увеличилось вдвое?

Решение:

а) При $p = const$ количество теплоты $Q = \Delta W + A = = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T + \frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{m}{\mu}C_p\Delta T$ — (1). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ и $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$, откуда $p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T$, или $\frac{m}{\mu}\Delta T = \frac{p\Delta V}{R}$. Тогда из (1) получим $Q = \frac{C_p p\Delta V}{R} = 700$ Дж. б) При $V = const$ имеем $Q = \Delta W = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T$ — (1). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_1V=\frac{m}{\mu}RT_1$ и $p_2V=\frac{m}{\mu}RT_2$, откуда $V\Delta p=\frac{m}{\mu}R\Delta T$, или $\frac{m}{\mu}\Delta T=\frac{V\Delta p}{R}$. Тогда из (1) получим $Q=C_V V\Delta p/R$; $Q=500$ Дж.

5.82. В закрытом сосуде находится масса $m=14$ г азота при давлении $p_1=0{,}1$ МПа и температуре $t=27°$ С. После нагревания давление в сосуде повысилось в 5 раз. До какой температуры t_2 был нагрет газ? Найти объем V сосуда и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение:

Состояние газа до и после нагревания описывается уравнением Менделеева — Клапейрона $p_1V=\frac{m}{\mu}RT_1$ — (1) и $p_2V=\frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). Поскольку $V=const$, то $\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}=5$, откуда $T_2=5T_1=1500$ К. Решая совместно (1) и (2), получим $V=\frac{mRT_1}{\mu p_1}$; $V=12{,}4$ л. Количество теплоты, полученное газом, $Q=\frac{m}{\mu}C_V\Delta T$, где молярная теплоемкость азота $C_V=20{,}8$ Дж/(моль·К). $Q=12{,}4$ Дж.

5.83. Какое количество теплоты Q надо сообщить массе $m=12$ г кислорода, чтобы нагреть его на $\Delta t=50°$ С при $p=const$?

Решение:

Количество тепла, необходимое для нагревания при $p = const$: $Q = c_p m \Delta t$, где c_p — удельная теплоемкость. При постоянном давлении $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Т. к. кислород — двухатомный газ, то $i = 5$ и $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$. Тогда $Q = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu} m \Delta t$; $Q = 545$ Дж.

5.84. На нагревание массы $m = 40$ г кислорода от температуры $t_1 = 16°$ С до $t_2 = 40°$ С затрачено количество теплоты $Q = 628$ Дж. При каких условиях нагревался газ (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

Решение:

В процессе нагревания при постоянном давлении $Q_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu} m \Delta T$ (см. задачу 5.83) $Q_p = 872$ Дж. Аналогично для нагревания при постоянном объеме $Q_V = c_V m (T_2 - T_1)$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$ и $i = 5$. Тогда $Q_V = 626$ Дж. Значит, газ нагревается при постоянном объеме.

5.85. В закрытом сосуде объемом $V = 10$ л находится воздух при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить воздуху, чтобы повысить давление в сосуде в 5 раз?

Решение:

Воздуху надо сообщить количество теплоты $Q = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T$.

По уравнению Менделеева — Клапейрона $V \Delta p = \frac{m}{\mu} R \Delta T$, откуда $\Delta T=\frac{\mu V\Delta p}{mR}$. Тогда $Q=C_V\frac{V\Delta p}{R}=\frac{i}{2}V\Delta p$; $Q=10$ кДж.

5.86. Какую массу m углекислого газа можно нагреть при $p=const$ от температуры $t_1=20°$ С до $t_2=100°$ С количеством теплоты $Q=222$ Дж? На сколько при этом изменится кинетическая энергия одной молекулы?

Решение:

Количество тепла $Q=c_p m\Delta T$. Теплоемкость при $p=const$: $c_p=\frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Молярная масса $\mu=\mu_c+2\mu_o$. Т. к. CO_2 — газ трехатомный, то $i=6$. Тогда $c_p=4\frac{R}{\mu}=\frac{4R}{\mu_c+2\mu_o}$. Откуда $Q=\frac{4R}{\mu_c+2\mu_o}m(T_2-T_1)$, значит, $m=\frac{Q(\mu_c+2\mu_o)}{4R(T_2-T_1)}$; $m=3{,}67$ г. Кинетическая энергия поступательного движения молекул $W=\frac{i}{2}kT$, при $i=6$: $W_1=3kT_1$; $W_2=3kT_2$. Тогда $\Delta W=W_2-W_1=3k(T_2-T_1)$; $\Delta W=3{,}31\cdot10^{-21}$ Дж.

5.87. В закрытом сосуде объем $V=2$ л находится азот, плотность которого $\rho=1{,}4$ кг/м^3. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы нагреть его на $\Delta T=100$ К?

Решение:

Т.к. объем постоянный, то количество тепла $Q=c_V m\Delta T$, где $c_V=\frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, причем т. к. азот — газ двухатомный, то число степеней свободы $i = 5$, значит $c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$. Масса $m = \rho V$, тогда $Q = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}\rho V \Delta T$; $Q = 207{,}75$ Дж.

5.88. Азот находится в закрытом сосуде объемом $V = 3$ л при температуре $t_1 = 27°$ С и давлении $p_1 = 0{,}3$ МПа. После нагревания давление в сосуде повысилось до $p_2 = 2{,}5$ МПа. Найти температуру t_2 азота после нагревания и количество теплоты Q, сообщенное азоту.

Решение:

Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для начального и конечного состояний $p_1 V = \frac{m}{\mu} R T_1$ — (1); $p_2 V = \frac{m}{\mu} R T_2$ — (2). Разделим (1) на (2) $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$, отсюда $T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1}$; $T_2 = 2500$ К. Количество теплоты, необходимое для нагревания при постоянном объеме $Q = c_V \cdot m \Delta t$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$; $i = 5$, т. к. азот двухатомный газ. Следовательно, $c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$. Из (1) $m = \frac{p_1 V_\mu}{R T_1}$ — масса газа, тогда $Q = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}\frac{p_1 V_\mu}{R T_1}(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\frac{p_1 V (T_2 - T_1)}{T_1}$; $Q = 16500$ Дж.

5.89. Для нагревания некоторой массы газа на $\Delta t_1 = 50°$ С при $p = const$ необходимо затратить количество теплоты $Q_1 = 670$ Дж.

Если эту же массу газа охладить на $\Delta t_2 = 100°$ С при $V = const$, то выделяется количество теплоты $Q_2 = 1005$ Дж. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

Решение:

Количество теплоты, необходимое для нагрева при $p = const$: $Q_1 = c_p m \Delta t_1$, где $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Тогда $Q_1 = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu} m \Delta t_1$ — (1). Количество тепла, выделенное при изохорном охлаждении $Q_2 = c_V m \Delta t_2$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$. Тогда $Q_2 = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu} m \Delta t_2$ — (2). Разделим (1) на (2): $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{i+2}{i}\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$, отсюда $Q_1 i \Delta t_2 = Q_2 (i+2) \Delta t_1$; $Q_1 i \Delta t_2 = Q_2 i \Delta t_1 + 2Q_2 \Delta t_1$; $i(Q_1 \Delta t_2 - Q_2 \Delta t_1) = 2Q_2 \Delta t_1$; $i = \frac{2Q_2 \Delta t_1}{Q_1 \Delta t_2 - Q_2 \Delta t_1}$ — число степеней свободы; $i = 6$.

5.90. Масса $m = 10$ г азота находится в закрытом сосуде при температуре $t_1 = 7°$ С. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы увеличить среднюю квадратичную скорость его молекул вдвое? Во сколько раз при этом изменится температура газа? Во сколько раз при этом изменится давление газа на стенки сосуда?

Решение:

Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. Тогда $\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\frac{3kT_1}{m}}$; $\sqrt{\overline{v_2^2}} = \sqrt{\frac{3kT_2}{m}}$. По условию

$2\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\overline{v_2^2}}$ или $2\sqrt{\frac{3kT_1}{m}} = \sqrt{\frac{3kT_2}{m}}$; $4T_1 = T_2$; $\frac{T_2}{T_1} = 4$. Т. к. $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$ при $V = const$ (см. задачу 5.88), то $\frac{p_2}{p_1} = 4$. Изменение температуры $\Delta T = T_2 - T_1 = 4T_1 - T_1 = 3T_1$. Количество тепла, подведенное к системе $Q = c_v m \Delta T$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$; $i = 5$, т.к. азот — двухатомный газ, поэтому $c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$ и $Q = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu} m 3T_1$; $Q = 6{,}23$ кДж.

5.91. Гелий находится в закрытом сосуде объемом $V = 2$ л при температуре $t_1 = 20°$ С и давлении $p_1 = 100$ кПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить гелию, чтобы повысить его температуру на $\Delta t = 100°$ С? Каковы будут при новой температуре средняя квадратичная скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ его молекул, давление p_2, плотность ρ_2 гелия и энергия теплового движения W его молекул?

Решение:

Количество тепла, необходимое для повышения температуры $Q = c_V m \Delta t$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$; $i = 3$, т. к. гелий — одноатомный газ, поэтому $c_V = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}$. Т. к. $p_1 V = \frac{m}{\mu} RT_1$, то $m = \frac{p_1 V \mu}{RT_1}$ — масса гелия в сосуде. Тогда $Q = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}\frac{p_1 V \mu \Delta t}{RT_1} = \frac{3 p_1 V \Delta t}{2T_1}$; $Q = 102{,}39$ Дж. Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3RT_2 / \mu}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 1{,}565$ км/с. Т.к. $p_2 / p_1 = T_2 / T_1$ (см. задачу 5.88), то $p_2 = \dfrac{p_1 T_2}{T_1} = \dfrac{p_1(T_1 + g\Delta t)}{T_1}$; $p_2 = 134$ кПа. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_2 V = \dfrac{m}{\mu} RT_2$, значит, $\rho_2 = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p_2 \mu}{RT_2}$ — плотность газа. $\rho_2 = 0{,}164$ кг/м^3. Энергия теплового движения молекул $W = \dfrac{3}{2}\dfrac{m}{\mu} RT_2 = \dfrac{3}{2} p_2 V$; $W = 402$ Дж.

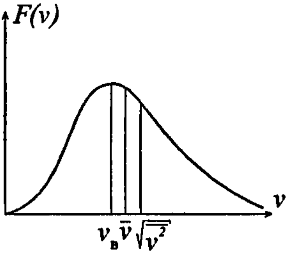
5.92. В закрытом сосуде объемом $V = 2$ л находится масса m азота и масса m аргона при нормальных условиях. Какое количество теплоты Q надо сообщить, чтобы нагреть газовую смесь на $\Delta t = 100°$ С?

Решение:

Количество тепла, необходимое для нагревания газовой смеси, $Q = (c_{V1} m + c_{V2} m)\Delta t = (c_{V1} + c_{V2}) m \Delta t$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{\mu}$. Для аргона $i = 3$, т. к. газ одноатомный, тогда $c_{V1} = \dfrac{3}{2}\dfrac{R}{\mu_1}$. Для азота $i = 5$, т. к. газ двухатомный, поэтому $c_{V2} = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{\mu_2}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \left(\dfrac{m}{\mu_1} + \dfrac{m}{\mu_2}\right) RT = \left(\dfrac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}\right) mRT$, отсюда $m = \dfrac{pV\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)RT}$. Тогда $Q = \left(\dfrac{3}{\mu_1} + \dfrac{5}{\mu_2}\right)\dfrac{R}{2} \times$ $\times \dfrac{pV\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)RT}\Delta t$; $Q = \dfrac{3\mu_2 + 5\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\dfrac{pV\Delta t}{2T}$; $Q = 154{,}2$ Дж.

5.93. Найти среднюю арифметическую $\bar{v}$, среднюю квадратичную $\sqrt{\overline{v^2}}$ и наиболее вероятную $v_\text{в}$ скорости молекул газа, который при давлении $p = 40$ кПа имеет плотность $\rho = 0{,}3$ кг/м^3.

Решение:



На графике функции распределения молекул по скоростям приведено взаимное расположение величин скоростей $v_\text{в}$, $\bar{v}$ и $\sqrt{\overline{v^2}}$. Искомые скорости выражаются следующими соотношениями: $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ — (1); $v_\text{в} = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$ — (2); $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3RT/\mu}$ — (3). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ или $p\mu = \rho RT$, откуда $\dfrac{RT}{\mu} = \dfrac{p}{\rho}$ — (4). Подставив (4) в (1) — (3), получим $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8p}{\pi\rho}}$; $\bar{v} = 579$ м/с; $v_\text{в} = \sqrt{\dfrac{2p}{\rho}}$; $v_\text{в} = 513$ м/с; $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3p}{\rho}}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 628$ м/с. Полученные данные соответствуют графику.

5.94. При какой температуре T средняя квадратичная скорость молекул азота больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta v = 50$ м/с?

Решение:

По определению наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$, а средняя квадратичная $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. По условию задачи $\sqrt{\overline{v^2}} = v_в + \Delta v$, тогда $\Delta v = \sqrt{\overline{v^2}} - v_в = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} - \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$. Отсюда $\sqrt{\frac{RT}{\mu}} = \frac{\Delta v}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; $T = \frac{\mu(\Delta v)^2}{R\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2}$; $T = 83{,}37$ К.

5.95. Какая часть молекул кислорода при $t = 0°$ С обладает скоростями v от 100 до 110 м/с?

Решение:
Согласно закону Максвелла распределение молекул по скоростям определяется соотношением: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u$ — (1), где u — относительная скорость. По условию $v = 100$ м/с и $\Delta v = 10$ м/с. Наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$; $v_в = 376$ м/с. Тогда $u = \frac{v}{v_в} = \frac{100}{376}$; $u^2 = 0{,}071$; $e^{-u^2} = 0{,}93$; $\Delta u = \frac{10}{376}$. Подставляя в (1) числовые значения, найдем $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}004 = 0{,}4\%$. Т. е. число молекул, скорости которых

лежат в заданном интервале, равно 0,4% заданного числа молекул.

5.96. Какая часть молекул азота при $t = 150°$ C обладает скоростями v от 300 до 325 м/с?

Решение:

Из закона Максвелла имеем $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{v^2}} e^{-u^2} u^2 \Delta u$ — (1), где относительная скорость $\frac{v_1}{v_b}$ — (2), $\Delta u = \frac{\Delta v}{v_b} = \frac{v_2 - v_1}{v_b}$ — (3).

Здесь $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — (4) — наиболее вероятная скорость молекул. Решая совместно уравнения (1) — (4), получим $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_1^2 \mu}{2RT}} \cdot \frac{v_1^2 \mu}{2RT} \cdot \frac{(v_2 - v_1)\sqrt{\mu}}{\sqrt{2RT}}$; $\frac{\Delta N}{N} = 2,8$ %.

5.97. Какая часть молекул водорода при $t = 0°$ C обладает скоростями v от 2000 до 2100 м/с?

Решение:

Согласно закону распределения Максвелла $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} exp(-u^2) u^2 \Delta u$. Относительная скорость $u = \frac{v}{v_в}$, где $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — наиболее вероятная скорость. В нашем случае $v = v_1 = 2000$ м/с, $\Delta v = v_2 - v_1$; $\Delta v = 100$ м/с, $v_в = 1506$ м/с. Тогда $u = \frac{v}{v_в}$; $u = 1,328$; $u^2 = 1,764$;

$exp\left(-u^2\right)=0{,}171$; $\Delta u=\dfrac{\Delta v}{v_в}$; $\Delta u=0{,}066$ м/с. Окончательно $\dfrac{\Delta N}{N}=\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$; $\dfrac{\Delta N}{N}=4{,}49\,\%$.

5.98. Во сколько раз число молекул ΔN_1, скорости которых лежат в интервале от $v_в$ до $v_в+\Delta v$, больше числа молекул ΔN_2, скорости которых лежат в интервале от $\sqrt{\overline{v^2}}$ до $\sqrt{\overline{v^2}}+\Delta v$?

Решение:

Воспользуемся функцией Максвелла распределения молекул по скоростям: $f(v)=4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\dfrac{mv^2}{2kT}\right)\cdot v^2$ — (1). Относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от $v_в$ до $v_в+\Delta v$, есть $\dfrac{\Delta N_1}{N}=\int\limits_{v_в}^{v_в+\Delta v} f(v)dv$ — (2). Если $\Delta v \ll v_в$, то функция $f(v)$ на данном интервале можно приближенно считать $f(v_в)=const$. Тогда из (2) имеем $\dfrac{\Delta N_1}{N}=f(v_в)\int\limits_{v_в}^{v_в+\Delta v} dv=f(v_в)[v_в+\Delta v-v_в]=f(v_в)\Delta v$. Поскольку $v_в=\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$, то из уравнений (1) и (2) получим

$$\frac{\Delta N_1}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{m}{2kT}\frac{2kT}{m}\right)\frac{2kT}{m}\cdot\Delta v;$$

$\dfrac{\Delta N_1}{N}=4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp(-1)\dfrac{2kT}{m}\Delta v$ — (3). Аналогично во втором случае $\frac{\Delta N_2}{N}=\int\limits_{\sqrt{\overline{v^2}}}^{\sqrt{\overline{v^2}}+\Delta v} f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)dv$, но т. к. $\Delta v << \sqrt{\overline{v^2}}$, то $f(v)\approx f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)=const$. Тогда из уравнний (1) и (2) $\frac{\Delta N_2}{N}=f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)\int\limits_{\sqrt{\overline{v^2}}}^{\sqrt{\overline{v^2}}+\Delta v} dv=f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)\Delta v$. Поскольку средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{3kT/m}$, то

$$\frac{\Delta N_2}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{m}{2kT}\frac{3kT}{m}\right)\frac{3kT}{m}\Delta v;$$

$\frac{\Delta N_2}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{3kT}{m}\Delta v$ — (4). Разделив уравнение (3) на уравнение (4), получим искомое отношение: $\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{exp(-1)2kT\Delta v/m}{exp(-3/2)3kT\Delta v/m}=exp\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}$. Произведя вычисления, окончательно получим $\Delta N_2/\Delta N_1=1{,}1$.

5.99. Какая часть молекул азота при температуре T имеет скорости, лежащие в интервале от $v_в$ до $v_в+\Delta v$, где $\Delta v=20$ м/с, если: а) $T=400$ К; б) $T=900$ К?

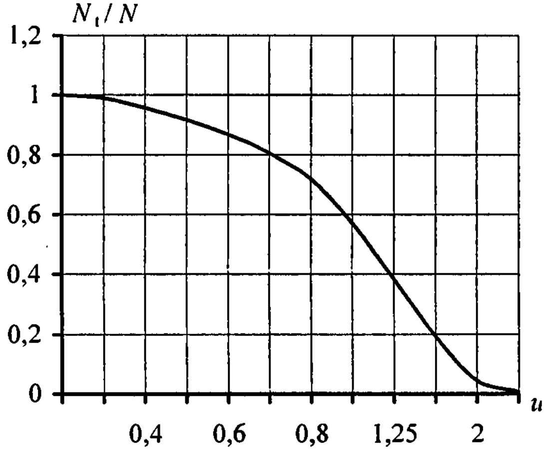
Решение:

Согласно закону Максвелла $\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{v}}u^2e^{-u^2}\Delta u$ — (1), где $u=\frac{v_в}{v_в}=1$ — (2); $\Delta u=\frac{\Delta v}{v_в}$ — (3). Наиболее вероятная скорость молекул $v_в=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — (4). Подставляя (4) в (3), а затем (2) и (3) в (1), получим $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \frac{\Delta v \sqrt{\mu}}{\sqrt{2RT}}$.

а) $\frac{\Delta N}{N} = 3{,}4\ \%$; б) $\frac{\Delta N}{N} = 2{,}2\ \%$.

5.100. Какая часть молекул азота при температуре $t = 150°\,C$ имеет скорости, лежащие в интервале от $v_1 = 300$ м/с до $v_2 = 800$ м/с?

Решение:



В данной задаче нельзя использовать формулу Максвелла, т. к. интервал скоростей велик. Для решения задачи найдем число молекул N_1 и N_2, скорости которых больше v_1 и v_2. Тогда скорости, лежащие в интервале от v_1 до v_2, имеют число молекул $N_x = N_1 - N_2$. Значения N_1 и N_2 найдем по графику зависимости N_x / N от u. Наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 500$ м/с, тогда $u_1 = \frac{300}{500} = 0{,}6$ и $u_2 = \frac{800}{500} = 1{,}6$. По графику найдем

$\frac{N_1}{N} = 0{,}87 = 87\%$ и $\frac{N_2}{N} = 0{,}17 = 17\%$. Т. е. 87% молекул движется со скоростями большими v_1 и 17% молекул имеют скорости превышающие v_2. Тогда искомая часть молекул $\frac{N_x}{N} = 87\% - 17\% = 70\%$.

5.101. Какая часть общего числа N молекул имеет скорости: а) больше наиболее вероятной скорости $v_в$, б) меньше наиболее вероятной скорости $v_в$?

Решение:

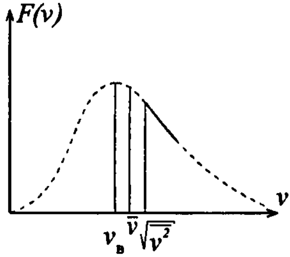
а) Т. к. в данной задаче мы имеем большие интервалы скоростей, то нельзя пользоваться функцией распределения Максвелла. Т.к. относительная скорость $u = \frac{v}{v_в}$, то для $v = v_в$ имеем $u = \frac{v_в}{v_в} = 1$. По таблице 11 находим для $u = 1$; $\frac{N_1}{N} = 0{,}572$. Значит, доля молекул, имеющих скорости $v > v_в$, равна $\frac{N_1}{N} = 57{,}2\%$.

б) Т. к. доля молекул, имеющих скорости $v > v_в$: $\frac{N_1}{N} = 57{,}2\%$ (см. пункт а), то доля молекул у которых скорости $v < v_в$: $\frac{N_1}{N} = 42{,}8\%$. Поэтому график функции Максвелла не симметричен.

5.102. В сосуде находится масса $m = 2{,}5$ г кислорода. Найти число N_x молекул кислорода, скорости которых превышают среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v}^2}$.

Решение:

Наиболее вероятная скорость молекул $v_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}} = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{kT}{m}}$, отсюда $\sqrt{\dfrac{kT}{m}} = \dfrac{v_в}{\sqrt{2}}$. Средняя квадратичная скорость $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}v_в = \sqrt{1{,}5}v_в$. Тогда относи-



тельная скорость u для $v = \sqrt{\overline{v^2}}$: $u = \dfrac{v}{v_в} = \dfrac{\sqrt{\overline{v^2}}}{v_в} = \dfrac{\sqrt{1{,}5}v_в}{v_в}$; $u = 1{,}225$. По таблице 11 $u = 1$, $\dfrac{N_x}{N} = 0{,}572$; $u = 1{,}25$, $\dfrac{N_x}{N} = 0{,}374$. По графику находим, что для $u = 1{,}225$ — $\dfrac{N_1}{N} \approx 0{,}405$. Число молекул кислорода $N = \dfrac{m}{\mu}N_A$; $N = 4{,}705 \cdot 10^{22}$. Тогда $N_1 = 0{,}405N$; $N_1 = 1{,}905 \cdot 10^{22}$.

5.103. В сосуде находится масса $m = 8$ г кислорода при температуре $T = 1600$ К. Какое число N_x молекул кислорода имеет кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию $W_0 = 6{,}65 \cdot 10^{-20}$ Дж?

Решение:

Кинетическая энергия поступательного движения молекулы $W_0 = \dfrac{m_0 v_0^2}{2}$, откуда $v_0 = \sqrt{\dfrac{2W_0}{m_0}}$. Наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$, тогда относительная скорость молекулы $u = \frac{v_0}{v_в} = \sqrt{\frac{W_0}{kT}}$; $u = 1{,}73$. Используя график к задаче 5.100, найдем относительное число молекул $\frac{N_x}{N}$, относительная скорость которых больше u. Получим $\frac{N_x}{N} = 0{,}12$, т. е. 12% молекул имеют кинетическую энергию больше W_0. Общее число молекул кислорода в сосуде $N = \frac{m}{\mu} N_А = 1{,}5 \cdot 10^{23}$. Следовательно, $N_x = 0{,}12N = 1{,}8 \cdot 10^{22}$.

5.104. Энергию заряженных частиц часто выражают в электронвольтах: 1эВ — энергия, которую приобретает электрон, пройдя в электрическом поле разность потенциалов $U = 1$ В, причем $1эВ = 1{,}60219^{-19}$ Дж. При какой температуре T_0 средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул $W_0 = 1$ эВ? При какой температуре 50% всех молекул имеет кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию $W_0 = 1$ эВ?

Решение:

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул $W_0 = \frac{3}{2}kT$. Отсюда $T = \frac{2W_0}{3k}$; $T = 7730$ К. Воспользовавшись графиком из задачи 5.100, найдем, что значению $\frac{N_x}{N} = 0{,}5$ соответствует значение $u = 1{,}1$. В задаче 5.103 мы определили, что относительная скорость молекул $u = \sqrt{\frac{W_0}{kT}}$, отсюда $T = \frac{W_0}{ku^2}$; $T = 9600$ К.

5.105. Молярная энергия, необходимая для ионизации атомов калия, $W_i = 418{,}68$ кДж/моль. При какой температуре T газа 10% всех молекул имеют молярную кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию W_i?

Решение:

Наиболее вероятная кинетическая энергия молекул $W_в = \frac{mv_в^2}{2} = \frac{m \cdot 2\frac{RT}{\mu}}{2} = \frac{mRT}{\mu} = \nu RT = RT$, т. к. по условию рассматривается молярная энергия, т. е. $\nu = 1$. Отношение $\frac{W_i}{W_в} = \frac{mv^2}{2}\frac{2}{mv_в^2} = \frac{v^2}{v_в^2} = u^2$, где u — относительная скорость. По таблице 11 $u = 1{,}5$, $\frac{N_x}{N} = 0{,}231$; $u = 2$, $\frac{N_x}{N} = 0{,}046$. В нашем случае $\frac{N_i}{N} = 0{,}1$, тогда из графика $u \approx 1{,}79$ и $u^2 \approx 3{,}2$. Значит, $\frac{W_i}{W_в} = 3{,}2$, отсюда $W_i = 3{,}2W_в = 3{,}2RT$. Следовательно, $T = \frac{W_i}{3{,}2R}$; $T = 1{,}57 \cdot 10^4$ К.

5.106. Обсерватория расположена на высоте $h = 3250$ м над уровнем моря. Найти давление воздуха на этой высоте. Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 5°$ С. Молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль. Давление воздуха на уровне моря $p_0 = 101{,}3$ кПа.

Решение:

Закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести дает барометрическая формула: $p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$. Подставив числовые данные, получим $p = 67{,}2$ кПа.

5.107. На какой высоте h давление воздуха составляет 75% от давления на уровне моря? Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 0°$ С.

Решение:

Закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести дает барометрическая формула: $p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$, откуда $\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$. Логарифмируя обе части уравнения, получим $\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g h}{RT}$, откуда $h = -\frac{RT \ln p/p_0}{\mu g} =$ $= -\frac{8{,}31\cdot 273\cdot(-0{,}29)}{0{,}029\cdot 9{,}8}$; $h = 2296$ м.

5.108. Пассажирский самолет совершает полеты на высоте $h_1 = 8300$ м. Чтобы не снабжать пассажиров кислородными масками, в кабине при помощи компрессора поддерживается постоянное давление, соответствующее высоте $h_2 = 2700$ м. Найти разность давлений внутри и снаружи кабины. Температуру наружного воздуха считать равной $t_1 = 0°$ С.

Решение:

Согласно барометрической формуле $p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$, где $p_0 = 10^5$ Па — давление на уровне моря. Молярная масса воздуха $\mu = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль. Тогда $p_1 = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h_1}{RT_1}\right)$; $p_1 = 35{,}3$ кПа. Температура воздуха в кабине соответствует давлению на высоте $h_2 = 2700$ м, т. е. $T_2 = 273$ К, тогда

$p_2 = p_0 \, exp\left(-\frac{\mu g h}{RT_2}\right)$; $p_2 = 71{,}3$ кПа. Отсюда $\Delta p = p_2 - p_1$; $\Delta p = 36$ кПа.

5.109. Найти в предыдущей задаче, во сколько раз плотность ρ_2 воздуха в кабине больше плотности ρ_1 воздуха вне ее, если температура наружного воздуха $t_1 = -20°$ С, а температура воздуха в кабине $t_2 = +20°$ С.

Решение:

Согласно барометрической формуле $p = p_0 \, exp\left(-\frac{\mu g h_1}{RT_1}\right)$.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$ имеем $\rho = \frac{p\mu}{RT}$. Тогда отношение плотностей $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = \frac{0{,}713 \cdot 253}{0{,}353 \cdot 293} = 1{,}7$.

5.110. Найти плотность ρ воздуха: а) у поверхности Земли; б) на высоте $h = 4$ км от поверхности Земли. Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 0°$ С. Давление воздуха у поверхности Земли $p_0 = 100$ кПа.

Решение:

а) Из уравнения Менделеева — Клапейрона (см. задачу 5.109) $\rho_1 = \frac{p_0 \mu}{RT_1}$; $\rho_1 = 1{,}278$ кг/м^3. б) На высоте $h_2 = 4$ км плотность воздуха $\rho_2 = \frac{p_2 \mu}{RT_2}$. Для нахождения p_2 воспользуемся барометрической формулой $p_2 = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h_2}{RT_2}\right)$.

Тогда $\rho_2 = \frac{p_0 \mu}{RT_2} \exp\left(-\frac{\mu g h_2}{RT_2}\right)$; $\rho_2 = 0{,}774$ кг/м^3.

5.111. На какой высоте h плотность газа вдвое меньше его плотности на уровне моря? Температуру газа считать постоянной и равной $t = 0°$ С. Задачу решить для: а) воздуха, б) водорода.

Решение:

Плотности газа на уровне моря и на высоте h соответственно равны: $\rho_1 = \frac{p_0 \mu}{RT}$ и $\rho_2 = \frac{p_0 \mu}{RT} \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$ (см. задачи 5.109 и 5.110). По условию $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 2$, тогда $\frac{1}{\exp(-\mu g h / RT)} = 2$ или $\exp\left(\frac{\mu g h}{RT}\right) = 2$. Прологарифмируем полученное выражение: $\frac{\mu g h}{RT} = \ln 2$, отсюда $h = \frac{RT}{\mu g} \ln 2$.

а) Для воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $h = 5{,}53$ км. б) Для водорода $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $h = 80{,}23$ км.

5.112. Перрен, наблюдая при помощи микроскопа изменение концентрации взвешенных частиц гуммигута с изменением высоты и применяя барометрическую формулу, экспериментально нашел значение постоянной Авогадро N_A. В одном из опытов Перрен нашел, что при расстоянии между двумя слоями $\Delta h = 100$ мкм число взвешенных частиц гуммигута в одном слое вдвое больше, чем в другом. Температура гуммигута $t = 20°$ С. Частицы гуммигута диаметром $\sigma = 0{,}3$ мкм были взвешены в жидкости, плотность которой на $\Delta\rho = 0{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3 меньше плотности частиц. Найти по этим данным значение постоянной Авогадро $N_А$.

Решение:

Запишем барометрическую формулу: $p = p_0\, exp\left(-\dfrac{\mu g h}{RT}\right)$.

Число частиц в единице объема $n = \dfrac{p}{kT}$, откуда $p = nkT$. Подставляя последнее выражение в барометрическую формулу, получим $n_1 = n_0\, exp\left(-\dfrac{\mu g h_1}{RT}\right)$; $n_2 = n_0\, exp\left(-\dfrac{\mu g h_2}{RT}\right)$, отсюда, $\dfrac{n_1}{n_2} = exp\left(\dfrac{\mu g \Delta h}{RT}\right)$. Прологарифмировав данное выражение, с учетом $\mu = N_А m$, получим $ln\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{N_А m g \Delta h}{RT}$, откуда, с учетом закона Архимеда, получим $N_А = \dfrac{RT \cdot \ln(n_1/n_2)}{gV\Delta\rho\Delta h}$; $N_А = 6{,}1 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

5.113. Найти среднюю длину свободного пробега λ молекул углекислого газа при температуре $t = 100°$ С и давлении $p = 13{,}3$ Па. Диаметр молекул углекислого газа $\sigma = 0{,}32$ нм.

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекул газа $\bar{\lambda} = \dfrac{\bar{v}}{\bar{z}}$, где $\bar{z} = \sqrt{2}\sigma^2 v \pi n$ — среднее число столкновений каждой молекулы с остальными в единицу времени. Концентрация молекул $n = \frac{p}{kT}$, тогда $\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2 n\pi} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p\pi}$;

$$\overline{\lambda} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{\sqrt{2} \cdot 0{,}32^2 \cdot 10^{-18} \cdot 13{,}3 \cdot 3{,}14} = 850 \text{ мкм.}$$

5.114. При помощи ионизационного манометра, установленного на искусственном спутнике Земли, было обнаружено, что на высоте $h = 300$ км от поверхности Земли концентрация частиц газа в атмосфере $n = 10^{15}$ м$^{-3}$. Найти среднюю длину свободного пробега λ частиц газа на этой высоте. Диаметр частиц газа $\sigma = 0{,}2$ нм.

Решение:

Длина свободного пробега молекул газа $\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2 n\pi}$;

$\overline{\lambda} = 5{,}6$ км.

5.115. Найти среднюю длину свободного пробега $\overline{\lambda}$ молекул воздуха при нормальных условиях. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм.

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекулы $\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$. Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории имеем $p = nkT$, отсюда $n = p / kT$. Тогда $\overline{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $\overline{\lambda} = 94{,}2$ нм.

5.116. Найти среднее число столкновений $\overline{z}$ в единицу времени молекул углекислого газа при температуре $t = 100°$ С, если средняя длина свободного пробега $\overline{\lambda} = 870$ мкм.

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекул $\overline{\lambda}=\frac{\overline{v}}{z}$, где $\overline{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул.

Тогда $z=\frac{\overline{v}}{\overline{\lambda}}=\frac{\sqrt{8RT/\pi\mu}}{\overline{\lambda}}$; $z=4{,}87\cdot10^5\ с^{-1}$.

5.117. Найти среднее число столкновений $\overline{z}$ в единицу времени молекул азота при давлении $p=53{,}33$ кПа и температуре $t=27°$ С.

Решение:
Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории и формулы длины свободного пробега молекул имеем $\overline{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ (см. задачу 5.115). С другой стороны, $\overline{\lambda}=\frac{\overline{v}}{z}$.

Приравняем правые части этих уравнений: $\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}=\frac{\overline{v}}{z}$, где $\overline{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Следовательно, $z=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}{kT}$; $z=2{,}43\cdot10^9\ с^{-1}$.

5.118. В сосуде объемом $V=0{,}5$ л находится кислород при нормальных условиях. Найти общее число столкновений Z между молекулами кислорода в этом объеме за единицу времени.

Решение:

Общее число столкновений $Z=\frac{\overline{z}n}{2}$ — (1), где среднее число столкновений каждой молекулы $\overline{z}=\sqrt{2}\sigma^2 n\overline{v}$ — (2).

Концентрация молекул $n=\frac{p}{RT}$ — (3), средняя арифметическая скорость $\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — (4). Подставляя уравнения (3) и (4) в (2), а затем полученное уравнение в (1), найдем: $Z=\frac{\sqrt{2}\sigma^2 p^2\sqrt{8RT}}{2k^2T^2\sqrt{\pi\mu}}=\frac{2\sigma^2 p^2\sqrt{RT}}{k^2T^2\sqrt{\pi\mu}}$; $Z=3\cdot 10^{31}$.

5.119. Во сколько раз уменьшится число столкновений $\bar{z}$ в единицу времени молекул двухатомного газа, если объем газа адиабатически увеличить в 2 раза?

Решение:

Среднее число столкновений молекул в единицу времени $z=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}{kT}$ (см. задачу 5.117). Т. к. в данной формуле все величины, кроме давления p и температуры T, являются постоянными, то $\frac{z_1}{z_2}=\frac{p_1}{p_2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$. Из уравнения Пуассона для адиабатического процесса имеем $\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$ и $\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, где $\gamma=\frac{c_p}{c_V}$ — показатель адиабаты. Поскольку теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме равны соответственно $c_p=\frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$ и $c_V=\frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$ и для двухатомного газа число степеней свободы $i=5$, то показатель адиабаты $\gamma=\frac{c_p}{c_V}=\frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}\frac{2}{i}\frac{\mu}{R}$; $\gamma=1{,}4$. Тогда $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma\sqrt{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}$.

По условию задачи $\frac{V_2}{V_1} = 2$. Подставляя числовые значения, получим $\frac{z_1}{z_2} = 2{,}34$.

5.120. Найти среднюю длину свободного пробега $\bar{\lambda}$ молекул азота при давлении $p = 10$ кПа и температуре $t = 17°$ С.

Решение:

Имеем: $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$ — (1). Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории $p = nkT$ найдем концентрацию $n = \frac{p}{kT}$ и подставим в (1): $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $\bar{\lambda} = 1$ мкм.

5.121. Найти среднюю длину свободного пробега $\bar{\lambda}$ атомов гелия, если известно, что плотность гелия $\rho = 0{,}021$ кг/м^3.

Решение:

Среднюю длину свободного пробега молекул можно выразить как $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ (см. задачу 5.120). Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ выразим плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. Отсюда давление $p = \frac{\rho RT}{\mu}$. Тогда $\bar{\lambda} = \frac{kT\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho RT} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho N_A}$; $\bar{\lambda} = 1{,}78$ мкм.

5.122. Найти среднюю длину свободного пробега $\bar{\lambda}$ молекул водорода при давлении $p = 0{,}133$ Па и температуре $t = 50°$ С.

Решение:
Исходя из основного уравнения МКТ и формулы длины свободного пробега молекул, можно получить для $\bar{\lambda}$ следующее выражение (см. задачу 5.120): $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$;
$\bar{\lambda} = 14{,}2$ см.

5.123. При некотором давлении и температуре $t = 0°$ C средняя длина свободного пробега молекул кислорода $\bar{\lambda} = 95$ нм. Найти среднее число столкновений $\bar{z}$ в единицу времени молекул кислорода, если при той же температуре давление кислорода уменьшить в 100 раз.

Решение:
Среднее число столкновений молекул в единицу времени $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}_2}$, где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ и $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_1 \frac{p_1}{p_2}$. Т. к. $\frac{p_1}{p_2} = 100$, то
$\bar{z} = \frac{\sqrt{8RT/\pi\mu}}{\bar{\lambda}_1 p_1 / p_2}$; $\bar{z} = 4{,}5 \cdot 10^7$ с$^{-1}$.

5.124. При некоторых условиях средняя длина свободного пробега молекул газа $\bar{\lambda} = 160$ нм; средняя арифметическая скорость его молекул $\bar{v} = 1{,}95$ км/с. Найти среднее число столкновений $\bar{z}$ в единицу времени молекул этого газа, если при той же температуре давление газа уменьшить в 1,27 раза.

Решение:
По определению, средняя длина свободного пробега молекул $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$ — (1). С другой стороны (см. задачу 5.120), $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — (2). Т. к. по условию $T = const$, то из (2)

имеем $\dfrac{\overline{\lambda}_1}{\overline{\lambda}_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$, отсюда $\overline{\lambda}_2=\dfrac{p_1}{p_2}\overline{\lambda}_1=1{,}27\overline{\lambda}_1$. Средняя арифметическая скорость молекул $\overline{v}=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$, и т. к. $T=const$, то $\overline{v}_1=\overline{v}_2$. Тогда $z=\dfrac{\overline{v}_1}{\overline{\lambda}_2}=\dfrac{\overline{v}_2}{1{,}27\overline{\lambda}_1}$; $z=9{,}6\cdot10^9\ \text{с}^{-1}$.

5.125. В сосуде объем $V=100\ \text{см}^3$ находится масса $m=0{,}5$ г азота. Найти среднюю длину свободного пробега $\overline{\lambda}$ молекул азота.

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\overline{\lambda}=\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV=\dfrac{mRT}{\mu V}$, тогда $\overline{\lambda}=\dfrac{k\mu V}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 mR}$; $\overline{\lambda}=23{,}2$ нм.

5.126. В сосуде находится углекислый газ, плотность которого $\rho=1{,}7\ \text{кг/м}^3$. Средняя длина свободного пробега его молекул $\overline{\lambda}=79$ нм. Найти диаметр σ молекул углекислого газа.

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.121) $\overline{\lambda}=\dfrac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho N_A}$. Молярная масса углекислого газа $\mu=\mu_C+2\mu_0$; $\mu=44\cdot10^{-3}$ кг/моль. Из формулы для $\overline{\lambda}$:
$\sigma=\sqrt{\dfrac{\mu}{\sqrt{2}\pi\rho N_A\overline{\lambda}}}$; $\sigma=0{,}35$ нм.

5.127. Найти среднее время $\overline{\tau}$ между двумя последовательными столкновениями молекул азота при давлении $p = 133$ Па и температуре $t = 10°$ C.

Решение:

Имеем $\tau = \dfrac{\lambda}{v}$, где $v = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул, $\overline{\lambda} = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p\pi}$ — средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.113). Отсюда $\tau = \dfrac{kT \cdot \sqrt{\pi\mu}}{\sqrt{2}\sigma^2 p\pi\sqrt{8RT}} = \dfrac{k\sqrt{\mu T}}{4\sigma^2 p\sqrt{\pi R}}$; $\tau = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ с.

5.128. Сосуд с воздухом откачан до давления $p = 1{,}33 \cdot 10^{-4}$ Па. Найти плотность ρ воздуха в сосуде, число молекул n в единице объема сосуда и среднюю длину свободного пробега $\overline{\lambda}$ молекул. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм. Молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль. Температура воздуха $t = 17°$ C.

Решение:

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории $p = nkT$. Отсюда концентрация $n = \dfrac{p}{kT}$; $n = 3{,}32 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$.

Средняя длина свободного пробега молекул $\overline{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$; $\overline{\lambda} = 75{,}33$ м. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ плотность $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p\mu}{RT}$; $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ кг/м^3.

5.129. Какое предельное число n молекул газа должно находиться в единице объема сферического сосуда, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом? Диаметр молекул газа $\sigma = 0{,}3$ нм, диаметр сосуда $D = 15$ см.

Решение:

Чтобы молекулы не сталкивались друг с другом, средняя длина свободного пробега должна быть не меньше диаметра данного сосуда. $\bar{\lambda} \ge D \ge \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$, отсюда $n \le \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 D} = 1{,}7 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.

5.130. Какое давление p надо создать внутри сферического сосуда, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом, если диаметр сосуда: а) $D = 1$ см; б) $D = 10$ см; в) $D = 100$ см? Диаметр молекул газа $\sigma = 0{,}3$ нм.

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Чтобы молекулы не сталкивались друг с другом, необходимо, чтобы $x \ge D$. Рассмотрим предельный случай, когда $D = \bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$, откуда давление $p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 D}$. а) При $D = 1$ см; $p = 942$ МПа; б) при $D = 10$ см; $p = 94{,}2$ МПа; в) при $D = 100$ см; $p = 9{,}42$ МПа.

5.131. Расстояние между катодом и анодом в разрядной трубке $d = 15$ см. Какое давление p надо создать в разрядной трубке, чтобы электроны не сталкивались с молекулами воздуха на пути от катода к аноду? Температура воздуха $t = 27°$ С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм. Средняя длина свободного пробега электрона в газе приблизительно в 5,7 раза больше средней длины свободного пробега молекул самого газа.

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекул воздуха $\overline{\lambda}_{воз} = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ (см. задачу 5.120). Чтобы электроны не стакивались с молекулами воздуха, необходимо, чтобы средняя длина свободного пробега электронов была не меньше расстояния между катодом и анодом, т. е. $\overline{\lambda}_{эл} \geq d$. По условию $\overline{\lambda}_{эл} = 5{,}7\overline{\lambda}_{воз}$, отсюда $d \leq \dfrac{5{,}7kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Тогда давление должно быть $p \leq \dfrac{5{,}7kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 d}$; $p \leq 394$ мПа.

5.132. В сферической колбе объемом $V = 1$ л находится азот. При какой плотности ρ азота средняя длина свободного пробега молекул азота больше размеров сосуда?

Решение:

Т. к. колба сферическая, то ее объем $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \times \times \left(\dfrac{D}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi D^3}{6}$. Отсюда диаметр колбы $D = \sqrt[3]{\dfrac{6V}{\pi}}$. Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.121) $\overline{\lambda} = \dfrac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho N_A}$. По условию $\overline{\lambda} > D$, следовательно, $\sqrt[3]{\dfrac{6V}{\pi}} < \dfrac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho N_A}$. Значит, плотность должна быть $\rho < \dfrac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 N_A \sqrt[3]{6V/\pi}}$; $\rho < 9{,}38 \cdot 10^{-7}$ кг/м^3.

5.133. Найти среднее число столкновений $\overline{z}$ в единицу времени молекул некоторого газа, если средняя длина свободного пробега $\overline{\lambda} = 5$ мкм, а средняя квадратичная скорость его молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = 500$ м/с.

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекул $\overline{\lambda} = \frac{\overline{v}}{z}$. Тогда среднее число столкновений в единицу времени $z = \frac{\overline{v}}{\overline{\lambda}}$. Поскольку средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{kT}{m}}$, то $\sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{\sqrt{3}}$. Средняя арифметическая скорость молекул $\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\overline{v^2}}$. Тогда $z = \frac{\sqrt{8/3\pi}\sqrt{\overline{v^2}}}{\overline{\lambda}}$; $z = 9{,}21 \cdot 10^7$ сек$^{-1}$.

5.134. Найти коэффициент диффузии D водорода при нормальных условиях, если средняя длина свободного пробега $\overline{\lambda} = 0{,}16$ мкм.

Решение:

По определению коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}$, где $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул. Тогда коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$; $D = 9{,}06 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

5.135. Найти коэффициент диффузии D гелия при нормальных условиях.

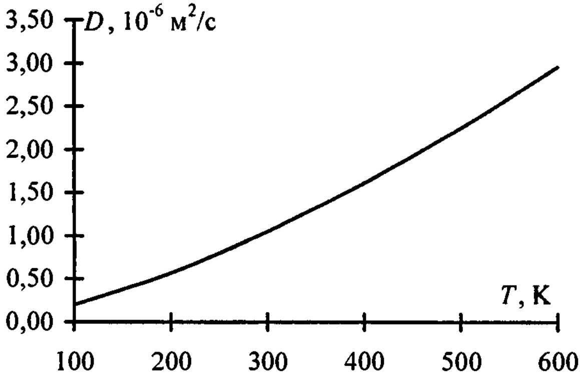
Решение:

Коэффициент диффузии (см. задачу 5.134) $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.

Длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Тогда коэффициент диффузии гелия $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $D = 8{,}25 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

5.136. Построить график зависимости коэффициента диффузии D водорода от температуры T в интервале $100 \le T \le 600$ К через каждые 100 К при $p = const = 100$ кПа.

Решение:



Коэффициент диффузии определяется следующим соотношением $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$; $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Подставив числовые данные, получим $D = 2 \cdot 10^{-10} T^{\frac{3}{2}}$. Характер зависимости коэффициента диффузии D от температуры T дан на графике.

5.137. Найти массу m азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 0{,}01\,\text{м}^2$ за время $t = 10\,\text{с}$, если градиент плоскости в направлении, перпендикулярном к площадке, $\Delta\rho / \Delta x = 1{,}26\,\text{кг/м}^4$. Температура азота $t = 27°\,\text{C}$. Средняя длина свободного пробега молекул азота $\overline{\lambda} = 10\,\text{мкм}$.

Решение:

По закону Фика $m = -D\dfrac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S \Delta t$. Знак минус означает направление вектора градиента плотности, и т. к. масса не может быть отрицательной, то ее следует взять по модулю. Коэффициент диффузии (см. задачу 5.134) $D = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$.

Масса азота $m = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}\lambda\dfrac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S \Delta t$; $m = 19{,}9\,\text{г}$.

5.138. При каком давлении p отношение вязкости некоторого газа к коэффициенту его диффузии $\eta / D = 0{,}3\,\text{кг/м}^3$, а средняя квадратичная скорость его молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = 632\,\text{м/с}$?

Решение:

Коэффициент диффузии газа и его динамическая вязкость определяются следующим соотношением: $D = \dfrac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}$ ($\overline{v}$ — средняя арифметическая скорость, $\overline{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега молекул); $\eta = \dfrac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}\rho$. Таким образом, $\dfrac{\eta}{D} = \rho$ — плотность газа. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ или $p = \dfrac{\rho RT}{\mu}$. Отсюда

$\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho}$. Но $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, следовательно, $\frac{p}{\rho} = \frac{\overline{v^2}}{3}$, откуда $p = \frac{\rho \cdot \overline{v^2}}{3}$ или $p = \frac{\eta}{D} \cdot \frac{\overline{v^2}}{3}$; $p = 39{,}9$ кПа.

5.139. Найти среднюю длину свободного пробега $\overline{\lambda}$ молекул гелия при давлении $p = 101{,}3$ кПа и температуре $t = 0°$ С, если вязкость гелия $\eta = 13$ мкПа·с.

Решение:

Коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3}\rho\overline{v}\lambda$, где $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ выразим плотность $\rho V = \frac{m}{\mu}RT$. Тогда коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$. Отсюда средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = \frac{3RT}{p\mu}\eta\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} = \frac{3}{p}\eta\sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}}$; $\lambda = 182$ нм.

5.140. Найти вязкость η азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии для него $D = 1{,}42 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Найти диаметр молекулы кислорода, если при температуре вязкость кислорода.

Решение:

Коэффициент диффузии газа и его динамическая вязкость определяются следующим соотношением: $D = \frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}$ ($\overline{v}$ —

средняя арифметическая скорость, $\bar{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега молекул); $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$. Таким образом, $\frac{\eta}{D} = \rho$ — плотность газа. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ или $p = \frac{\rho RT}{\mu}$. Отсюда $\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho}$ или $\frac{RT}{\mu} = \frac{pD}{\eta}$, откуда $\eta = \frac{pD\mu}{RT}$; $\eta = 17{,}8$ мкПа·с.

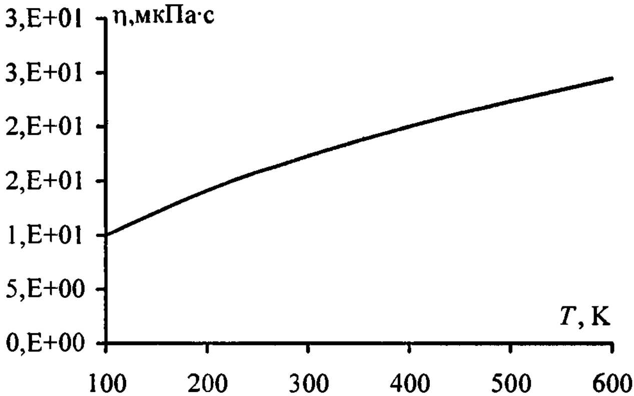
5.141. Найти диаметр σ молекулы кислорода, если при температуре $t = 0°$ С вязкость кислорода $\eta = 18{,}8$ мкПа/с.

Решение:

Динамическая вязкость кислорода определяется соотношением $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$ — (1), где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул, $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — средняя длина свободного пробега, $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ — плотность газа. Подставляя эти выражения в (1), получим $\eta = \frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}$, откуда $\sigma = \sqrt{\frac{2k}{3\pi\eta}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}}$; $\sigma = 0{,}3$ нм.

5.142. Построить график зависимости вязкости η азота от температуры T в интервале $100 \le T \le 600$ К через каждые 100 К.

Решение:



Динамическая вязкость азота определяется соотношением $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$ — (1), где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул, $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — средняя длина свободного пробега, $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ — плотность газа. Подставляя эти выражения в (1), получим $\eta = \frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}$. Величина $\frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu}{R\pi}} = const \approx 10^{-6}$, тогда $\eta = 10^{-6}\sqrt{T}$. Характер зависимости вязкости η от температуры T дан на графике.

5.143. Найти коэффициент диффузии D и вязкость η воздуха при давлении $p = 101{,}3$ кПа и температуре $t = 10°$ С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм.

Решение:

Коэффициент диффузии (см. задачи 5.134 и 5.135) $D=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $D=1{,}45\cdot10^{-5}$ м²/с. Кроме того, коэффициент диффузии $D=\frac{1}{3}\bar{v}\lambda$, а коэффициент вязкости $\eta=\frac{1}{3\rho}\bar{v}\lambda$. Таким образом, $\eta=pD$, где плотность ρ можно выразить из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV=\frac{m}{\mu}RT$, отсюда $\rho=\frac{m}{V}=\frac{p\mu}{RT}$. Тогда $\eta=\frac{p\mu}{RT}D$; $\eta=18{,}2$ мкПа·с.

5.144. Во сколько раз вязкость кислорода больше вязкости азота? Температуры газов одинаковы.

Решение:

Коэффициент вязкости (см. задачу 5.139) $\eta=\frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\times$ $\times\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$. Средняя длина свободного пробега молекул $\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$. Тогда $\eta=\frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$. Т. к. температура газов одинакова , то $\frac{\eta_1}{\eta_2}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2$; $\frac{\eta_1}{\eta_2}=1{,}07$.

5.145. Коэффициент диффузии и вязкость водорода при некоторых условиях равны $D=1{,}42\cdot10^{-4}$ м²/с и $\eta=8{,}5$ мкПа·с. Найти число n молекул водорода в единице объема.

Решение:

Коэффициенты вязкости и диффузии связаны соотношением $\eta = \rho D$ (см. задачу 5.143). Отсюда плотность $\rho = \frac{\eta}{D}$. Число частиц в единице объема $n = \frac{\rho}{\mu} N_A = \frac{\eta N_A}{\mu D}$; $n = 1{,}8 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}$.

5.146. Коэффициент диффузии и вязкость кислорода при некоторых условиях равны $D = 1{,}22 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2/\text{с}$ и $\eta = 19{,}5$ мкПа·с. Найти плотность ρ кислорода, среднюю длину свободного пробега $\bar{\lambda}$ и среднюю арифметическую скорость $\bar{v}$ его молекул.

Решение:

Коэффициент диффузии газа и его динамическая вязкость определяются следующим соотношением: $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$ ($\bar{v}$ — средняя арифметическая скорость, $\bar{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега молекул); $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$. Таким образом $\frac{\eta}{D} = \rho$ — плотность газа $\rho = 1{,}6\ \text{кг/м}^3$. Средняя арифметическая скорость $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — (2); согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ или, после несложных преобразований, $\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho}$, но из (2) $\frac{RT}{\mu} = \frac{\bar{v}^2\pi}{8}$, следовательно, $\frac{p}{\rho} = \frac{\bar{v}^2\pi}{8}$, откуда $p = \frac{\rho\bar{v}^2\pi}{8}$. Средняя длина свободного пробега молекул $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2\pi n}$, где

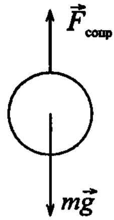
$$n=\frac{p}{kT}=\frac{\rho\bar{v}^2\pi}{8kT}=\frac{\rho R}{k\mu},\ \text{отсюда}\ \ \lambda=\frac{k\mu}{\sqrt{2}\sigma^2\pi\rho R};\quad \lambda=83{,}5\ \text{нм}.$$

Из уравнения (1) $\bar{v}=\frac{3D}{\lambda}$; $\bar{v}=440$ м/с.

5.147 Какой наибольшей скорости v может достичь дождевая капля диаметром $D=0{,}3$ мм? Диаметр молекул воздуха $\sigma=0{,}3$ нм. Температура воздуха $t=0°$ С. Считать, что для дождевой капли справедлив закон Стокса.

Решение:

На каплю действует сила тяжести и сила сопротивления воздуха. По второму закону Ньютона $m\vec{g}+\vec{F}_{сопр}=m\vec{a}$. Когда капля достигнет максимальной скорости ускорение a станет равным нулю, тогда $mg=F_{сопр}$. По закону Стокса $F_{сопр}=6\pi\eta r v_{max}$. Каплю считаем шаром, поэтому ее объем $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, а масса



$m=\rho V=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$. Тогда имеем $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g=6\pi\eta r v$. Отсюда $v=\frac{4r^2\rho g}{18\eta}=\frac{2(D/2)^2\rho g}{9\eta}=\frac{D^2\rho g}{18\eta}$. Коэффициент вязкости (см. задачу 5.139) $\eta=\frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$, где $\lambda=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$.

Тогда, искомая, максимальная скорость дождевой капли $v=\frac{D^2\rho g}{18}\frac{3RT\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}{p\mu kT}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}=\frac{\sqrt{2}D^2\rho g N_A\pi\sigma^2}{6\mu}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}$;

$v=2{,}73$ м/с.

5.148. Самолет летит со скоростью $v=360$ км/ч. Считая, что слой воздуха у крыла самолета, увлекаемый вследствие вязкости,

$d = 4$ см, найти касательную силу F_S, действующую на единицу поверхности крыла. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм. Температура воздуха $t = 0°$ С.

Решение:

По закону Ньютона $F_{\text{тр}} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$. Знак минуса означает направление градиента скорости, поэтому нас интересует модуль силы. Сила на единицу площади $F_S = \frac{F_{\text{тр}}}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x}$. В нашем случае $\Delta v = v$ и $\Delta x = d$. Коэффициент вязкости (см. задачи 5.139 и 5.147). $\eta = \frac{1}{3} \frac{p\mu}{RT} \sqrt{\frac{8RT}{\mu\pi}} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} =$ $= \frac{\mu}{3\sqrt{2} N_A \pi\sigma^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Отсюда $F_S = \frac{\mu}{3\sqrt{2} N_A \pi\sigma^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{v}{d}$; $F_S = 44{,}77$ мН/м^2.

5.149. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено газом. Радиусы цилиндров равны $r = 5$ см и $R = 5{,}2$ см. Высота внутреннего цилиндра $h = 25$ см. Внешний цилиндр вращается с частотой $n = 360$ об/мин. Для того чтобы внутренней цилиндр оставался неподвижным, к нему надо приложить касательную силу $F = 1{,}38$ мН. Рассматривая в первом приближении случай как плоский, найти из данных этого опыта вязкость η газа, находящегося между цилиндрами.

Решение:

По закону Ньютона для вязкости $F_{\text{тр}} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$. Пространство между цилиндрами $\Delta x = R - r$. Линейная скорость вращения внешнего цилиндра $\Delta v = Ln$, где $L = 2\pi R$ — длина окружности внешнего цилиндра. Тогда $\Delta v = 2\pi Rn$. Площадь боковой поверхности внутреннего цилиндра $\Delta S = 2\pi rh$. По третьему закону Ньютона, касательная сила

$F = -F_{тр} = \eta \dfrac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$. Следовательно, $F = \eta \dfrac{2\pi R n}{R - r} 2\pi r h =$ $= \eta \dfrac{4\pi^2 R r n h}{R - r}$. Отсюда $\eta = \dfrac{F(R - r)}{4\pi^2 R r n h}$; $\eta = 17{,}92$ мкПа·с.

5.150. Найти теплопроводность K водорода, вязкость которого $\eta = 8{,}6$ мкПа·с.

Решение:

Коэффициент теплопроводности $K = \dfrac{1}{3} c_V \rho \bar{v}_{ср} \lambda$, а коэффициент вязкости $\eta = \dfrac{1}{3} \rho \bar{v}_{ср} \lambda$. Отсюда следует, что коэффициенты теплопроводности и вязкости связаны соотношением $K = c_V \eta$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \dfrac{i}{2} \dfrac{R}{\mu}$, где $i = 5$, т. к. водород — двухатомный газ. Тогда $c_V = \dfrac{5}{2} \dfrac{R}{\mu}$, поэтому $K = \dfrac{5}{2} \dfrac{R}{\mu} \eta$; $K = 89{,}33$ мВт/(м·К).

5.151. Найти теплопроводность K воздуха при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 10°$ С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм.

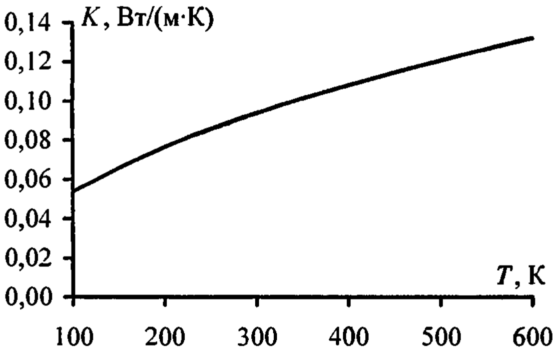
Решение:

Коэффициент теплопроводности $K = \dfrac{1}{3} c_V \rho \bar{v}_{ср} \lambda$. Средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Средняя арифметическая скорость $\bar{v}_{ср} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu} RT$, плотность $\rho = m / V =$

$= \frac{p\mu}{RT}$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, где для воздуха $i = 5$. Тогда коэффициент теплопроводности $K = \frac{1}{3}\frac{i}{2}\frac{R}{\mu}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $K = \frac{ik}{6\sqrt{2}\pi\sigma^2} \times \sqrt{8RT/\pi\mu}$; $K = 13{,}1$ мВт/(м·К).

5.152. Построить график зависимости теплопроводности K от температуры T в интервале $100 \le T \le 600$ К через каждые 100К.

Решение:



Имеем $K = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}c_V\rho$ — (1), где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — (2); $\bar{\lambda} = \frac{RT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — (3); $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ — (4). Удельная теплоемкость водорода $c_V = 10400$ Дж/кг·К. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), получим $K = \frac{2kc_V}{3\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu}{R\pi^3}} \cdot \sqrt{T}$

или $K = 5{,}4 \cdot 10^{-3}\sqrt{T}$. Характер зависимости теплопроводности K от температуры T дан на графике.

5.153. В сосуде объемом $V = 2$ л находится $N = 4 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа. Теплопроводность газа $K = 14$ мВт/(м·К). Найти коэффициент диффузии D газа.

Решение:

Коэффициент теплопроводности $K = c_V \rho \bar{v} \lambda / 3$, а коэффициент диффузии $D = \bar{v}\lambda / 3$, следовательно, коэффициенты теплопроводности и диффузии связаны соотношением $K = c_V \rho D$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{\mu}$, где $i = 5$, т. к. газ двухатомный. Число частиц в единице объема $n = \dfrac{\rho}{\mu} N_A$, а в объеме V $N = nV = \dfrac{\rho V N_A}{\mu}$, отсюда $\rho = \dfrac{\mu N}{V N_A}$. Тогда $K = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{\mu}\dfrac{\mu N}{V N_A}$; $D = \dfrac{5kND}{2V}$, откуда $D = \dfrac{2VK}{5kN}$; $D = 2{,}02 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

5.154. Углекислый газ и азот находится при одинаковых температурах и давлениях. Найти для этих газов отношение: а) коэффициентов диффузии; б) вязкостей; в) теплопроводностей. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

Решение:

а) Коэффициент диффузии (см. задачу 5.135) $D = \dfrac{1}{3} \times$ $\times \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}} \dfrac{rT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Т. к. $\sigma_1 = \sigma_2$, то $\dfrac{D_1}{D_2} = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}$; $\dfrac{D_1}{D_2} = 0{,}8$.

б) Коэффициент вязкости (см. задачу 5.148) $\eta = \frac{\mu}{3\sqrt{2}N_A\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Тогда $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$; $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1,25$.

в) Коэффициент теплопроводности (см. задачу 5.151) $K = \frac{ik}{6\sqrt{2}\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, тогда $\frac{K_1}{K_2} = \frac{i_1}{i_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$; $\frac{K_1}{K_2} = 0,96$.

5.155. Расстояние между стенками дьюаровского сосуда $d = 8$ мм. При каком давлении p теплопроводность воздуха, находящегося между стенками сосуда, начнет уменьшатся при откачке? Температура воздуха $t = 17°$ С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0,3$ нм.

Решение:

Теплопроводность воздуха между стенками сосуда начинает уменьшаться, когда средняя длина свободного пробега молекул станет равной расстоянию между стенками сосуда, т. е. $\lambda = d$. Т. к. $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ (см. задачу 5.120), отсюда $p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 d}$; $p = 1,25$ Па.

5.156. Цилиндрический термос с внутренним радиусом $r_1 = 9$ см и внешним радиусом $r_2 = 10$ см наполнен льдом. Высота термоса $h = 20$ см. Температура льда $t_1 = 0°$ С, температура наружного воздуха $t_2 = 20°$ С. При каком предельном давлении p воздуха между стенками термоса теплопроводность K еще будет зависеть от давления? Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0,3$ нм, а температуру воздуха между стенками термоса считать равной среднему арифметическому температур льда и наружного воздуха. Найти теплопроводность K воздуха, заключенного между стенками термоса, при давлениях $p_1 = 101,3$ кПа и $p_2 = 13,3$ мПа, если молярная масса воздуха $\mu = 0,029$ кг/моль.

Какое количество теплоты Q проходит за время $\Delta t = 1$ мин через боковую поверхность термоса средним радиусом $r = 9{,}5$ см при давлениях $p_1 = 101{,}3$ кПа и $p_2 = 13{,}3$ мПа?

Решение:

Теплопроводность начнет зависеть от давления при средней длине свободного пробега молекул $\bar{\lambda} = d$, где d — расстояние между стенками термоса. Т. к. $\bar{\lambda} = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$, то при $\bar{\lambda} = d$ получим $p = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi s^2 d} = 980$ мПа. При $p_1 = 101{,}3$ кПа коэффициент теплопроводности (см. задачу 5.151) $K_1 = \dfrac{ik}{6\sqrt{2}\pi\sigma^2}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}} = 13{,}1$ мВт/(м·К). При $p_2 = 13{,}3$ мПа средняя длина свободного пробега $\bar{\lambda}$ больше расстояния d между стенками термоса. Тогда

$$K = \frac{1}{3}d\bar{v}\rho c_V = \frac{1}{3}(r_2 - r_1)\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{p\mu}{RT}\frac{iR}{2\mu} = \frac{1}{6}(r_2 - r_1)pi\sqrt{\frac{8R}{\pi\mu T}}.$$

Подставляя числовые данные, получим $K_2 = 178$ мВт/(м·К).

Количество теплоты $Q = K\dfrac{\Delta T}{\Delta x}\Delta S \cdot \Delta t$. Но $\Delta S = 2\pi r h = 2\pi h\dfrac{r_1 + r_2}{2} = \pi h(r_1 + r_2)$. Тогда $Q = K\dfrac{\Delta T}{\Delta x}\pi h(r_1 + r_2)\cdot \Delta t$. Подставляя числовые данные, получим $Q_1 = 188$ Дж; $Q_2 = 2{,}55$ Дж.

5.157. Какое количество теплоты Q теряет помещение за время $t = 1$ час через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы $S = 4\ \text{м}^2$, расстояние между ними $d = 30$ см. Температура помещения $t_1 = 18°$ С, температура наружного воздуха $t_2 = -20°$ С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм. Температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур помещения и наружного воздуха. Давление $p = 101{,}3$ кПа.

Решение:

Количество теплоты, перенесенное за время t вследствие теплопроводности, определяется формулой $Q = K\dfrac{\Delta T}{\Delta x}S \cdot t$. Воспользуемся уравнением из задачи 5.152, выражающим зависимость теплопроводности K от температуры T: $K = \dfrac{2Kc_v}{3\sigma^2}\sqrt{\dfrac{\mu T}{\pi^2 R}}$. Здесь T — температура воздуха между рамами, $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2} = 272$ К; удельная теплоемкость воздуха $c_V = 717$ Дж/кг·К; молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$. Подставив числовые данные, найдем $K = 12{,}9 \cdot 10^{-3}$ Вт/м·К. Учитывая, что $\Delta x = d$, имеем $Q = K\dfrac{T_2 - T_1}{d}S \cdot t$; $Q = 24$ кДж.

5.158. Между двумя пластинами, находящимися на расстоянии $d = 1$ мм друг от друга, находится воздух. Между пластинами поддерживается разность температур $\Delta T = 1$ К. Площадь каждой пластины $S = 0{,}01\ \text{м}^2$. Какое количество теплоты Q передается за счет теплопроводности от одной пластины к другой за время $t = 10$ мин? Считать, что воздух находится при нормальных условиях. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм.

Решение:

Количество теплоты, перенесенное за время t вследствие теплопроводности, определяется формулой $Q = K\dfrac{\Delta T}{\Delta x}S \cdot t$. Воспользуемся уравнением из задачи 5.152, выражающим зависимость теплопроводности K от температуры T: $K=\frac{2Kc_V}{3\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{\pi^2 R}}$. Здесь $T=273$ К. Удельная теплоемкость воздуха $c_V=717$ Дж/кг·К; молярная масса воздуха $\mu=0{,}029$. Подставив числовые данные, найдем $K=13\cdot10^{-3}$ Вт/м·К. Учитывая, что $\Delta x=d$, имеем $Q=K\frac{\Delta T}{d}S\cdot t$; $Q=24$ кДж.

5.159. Масса $m=10$ г кислорода находится при давлении $p=300$ кПа и температуре $t=10°$ С. После нагревания при $p=const$ газ занял объем $V=10$ л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, изменение ΔW внутренний энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

Решение:

Количество теплоты, полученное газом определяется следующим соотношением: $Q=\frac{m}{\mu}C_p\Delta T$ — (1). Молярная теплоемкость кислорода при $p=const$ $C_p=29{,}1$ Дж/моль·К. Запишем уравнения состояния газа до и после нагревания. $pV_1=\frac{m}{\mu}RT_1$ — (2); $pV_2=\frac{m}{\mu}RT_2$ — (3). Вычитая из уравнения (3) уравнение (2), получим $p(V_2-V_1)=\frac{m}{\mu}R\Delta T$ — (4). Из (2) $V_1=\frac{mRT_1}{\mu p}$ — (5). Выразим из (4) ΔT с учетом (5): $\Delta T=\frac{\mu p\left(V_2-\frac{mRT_1}{\mu p}\right)}{mR}=\frac{\mu pV_2-mRT_1}{mR}$ — (6). Тогда уравнение (1) можно записать в виде $Q = C_p \frac{(\mu p V_2 - mRT_1)}{\mu R}$; $Q = 7{,}92$ кДж. Изменение внутренней энергии кислорода $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$ или, подставляя (6), $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{1}{\mu}\times$ $\times(\mu p V_2 - mRT_1)$; $\Delta W = 5{,}66$ кДж. Работа, совершаемая при изменении объема газа $A = p\int\limits_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$ или, с учетом (5), $A = p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)$; $A = 2{,}26$ кДж.

5.160. Масса $m = 6{,}5$ г водорода, находящегося при температуре $t = 27°$ C, расширяется вдвое при $p = const$ за счет притока тепла извне. Найти работу A расширения газа, изменение ΔW внутренний энергии газа и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение:

Работа расширения газа $A = p\int\limits_{V}^{2V} dV = p(2V - V) = pV$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ работа $A = \frac{m}{\mu}RT$; $A = 8{,}1$ Дж. Изменение внутренней энергии $\Delta W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$, где $i = 5$. Т. к. $p = const$, то $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, следовательно, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2$. Отсюда $T_2 = 2T_1$ и $\Delta T = T_2 - T_1 = 2T_1 - T_1 = T_1 = t + 273^o$. Тогда $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT_1$;

$\Delta W = 20{,}25$ кДж. Согласно первому началу термодинамики $Q = \Delta W + A$; $Q = 28{,}35$ кДж.

5.161. В закрытом сосуде находится масса $m_1 = 20$ г азота и масса $m_2 = 32$ г кислорода. Найти изменение ΔW внутренней энергии смеси газов при охлаждении ее на $\Delta T = 28$ К.

Решение:

Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$. Для двухатомных газов количество степеней свободы $i = 5$, следовательно, для смеси кислорода и азота имеем; $\Delta W = \frac{5}{2}R\Delta T\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$; $\Delta W = 1$ кДж.

5.162. Количество $\nu = 2$ кмоль углекислого газа нагревается при постоянном давлении на $\Delta T = 50$ К. Найти изменение ΔW внутренней энергии газа, работу A расширения газа и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение:

Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$. В условиях данной задачи $\Delta W = \nu 3R\Delta T$; $\Delta W = 2{,}5$ МДж. Работа, совершаемая при расширении газа, $A = p\Delta V$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T$, следовательно, $\Delta V = \frac{mR\Delta T}{\mu p}$, тогда $A = \frac{mR\Delta T}{\mu} = \nu R\Delta T$; $A = 0{,}83$ МДж. Количество теплоты, сообщенное газу, $Q = \nu \cdot C_p\Delta T$. Молярная теплоемкость углекислого газа $C_p = 33{,}2$ Дж/моль·К. $Q = 3{,}32$ МДж.

5.163. Двухатомному газу сообщено количество теплоты $Q = 2{,}093$ кДж. Газ расширяется при $p = const$. Найти работу A расширения газа.

Решение:

Т. к. по условию давление постоянно, то количество тепла, сообщенное газу $Q = c_p m\Delta T$, где $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$ и $i = 5$, т. к. газ двухатомный. Тогда $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$ и $Q = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Изменение внутренней энергии $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Из первого закона термодинамики следует, что $A = Q - \Delta W = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T - \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Т. к. $Q = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$, то $\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{2Q}{7}$, следовательно, работа расширения газа $A = \frac{2Q}{7}$; $A = 598$ Дж.

5.164. При изобарическом расширении двухатомного газа была совершена работа $A = 156{,}8$ Дж. Какое количество теплоты Q было сообщено газу?

Решение:

Количество теплоты, сообщенное газу, $dQ = C_p dT$, откуда $Q = C_p \int\limits_{T_1}^{T_2} dT$; $Q = C_p(T_1 - T_2)$ — (1). Работа, совершаемая при расширении газа, $dA = pdV$; $A = p\int\limits_{V_1}^{V_1} dV$; $A = p\times$ $\times(V_2 - V_1)$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p\Delta v = vR\Delta T$, тогда $A = vR(T_2 - T_1)$ — (2). Решая совместно

(1) и (2), получим $Q = C_p \frac{A}{\nu R}$, где $C_p = \nu \frac{7}{2} R$. Отсюда $Q = \frac{7}{2} A$; $Q = 550$ Дж.

5.165. В сосуде объемом $V = 5$ л находится газ при давлении $p = 200$ кПа и температуре $t = 17°$ С. При изобарическом расширении газа была совершена работа $A = 196$ Дж. На сколько нагрели газ?

Решение:
Воспользуемся уравнением (2) из предыдущей задачи. $A = \nu R \Delta T$, откуда $\Delta T = \frac{A}{\nu R}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$, откуда $\nu = pV / RT$. Тогда $\Delta T = \frac{AT}{pV}$; $\Delta T = 57$ К.

5.166. Масса $m = 7$ г углекислого газа была нагрета на $\Delta T = 10$ К в условиях свободного расширения. Найти работу A расширения газа и изменение ΔW его внутренней энергии.

Решение:
Работа по расширению газа $A = \nu R \Delta T = \frac{m}{\mu} R \Delta T$ (см. уравнение (2) из задачи 2.164), $A = 13{,}2$ Дж. Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T$, для CO_2 — $i = 6$, тогда $\Delta W = 3 \cdot \left(\frac{m}{\mu} R \Delta T \right)$, т. е. $\Delta W = 3A$; $\Delta W = 39{,}6$ Дж.

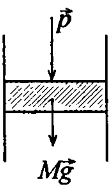
5.167. Количество $\nu = 1$ кмоль многоатомного газа нагревается на $\Delta T = 100$ К в условиях свободного расширения. Найти количество теплоты Q, сообщенное газу, изменение ΔW его внутренней энергии и работу A расширения газа.

Решение:

Работа расширения газа (см. задачу 5.160) $A=\frac{m}{\mu}R\Delta T=$ $=\nu R\Delta T$; $A=831$ кДж. Изменение внутренней энергии $\Delta W=\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$, где $i=6$, т. к. газ многоатомный, тогда $\Delta W=3\nu R\Delta T$; $\Delta W=2{,}49$ МДж. Согласно первому закону термодинамики $Q=\Delta W+A$; $Q=3{,}32$ МДж.

5.168. В сосуде под поршнем находится масса $m=1$ г азота. Какое количество теплоты Q надо затратить, чтобы нагреть азот на $\Delta T=10$ К? На сколько при этом поднимется поршень? Масса поршня $M=1$ кг, площадь его поперечного сечения $S=10\text{ см}^2$. Давление над поршнем $p=100$ кПа.

Решение:



Согласно первому закону термодинамики $Q=\Delta W+A$. Изменение внутренней энергии газа $\Delta W=\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$, где количество степеней свободы $i=5$, поскольку азот двухатомный газ. Работа газа по подъему поршня (см. задачу 5.160) $A=\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Тогда количество теплоты необходимое для нагрева азота $Q=\frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T+\frac{m}{\mu}R\Delta T=$ $=\frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$; $Q=10{,}39$ Дж. При расширении газ совершает работу против сил тяжести и против сил атмосферного давления. Тогда $A=(Mg+pS)\Delta h$, но т. к. $A=\frac{m}{\mu}R\Delta T$, то

$(Mg+pS)\Delta h=\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Отсюда найдем $\Delta h=\frac{mR\Delta T}{\mu(Mg+pS)}$; $\Delta h=2{,}7$ см.

5.169. В сосуде под поршнем находится гремучий газ. Какое количество теплоты Q выделяется при взрыве гремучего газа, если известно, что внутренняя энергия газа изменилась при этом на $\Delta W=336$ Дж и поршень поднялся на высоту $\Delta h=20$ см? Масса поршня $M=2$ кг, площадь его поперечного сечения $S=10$ см^2. Над поршнем находится воздух при нормальных условиях.

Решение:

Работа гремучего газа по подъему поршня (см. задачу 5.168) $A=(Mg+pS)\Delta h$. Согласно первому закону термодинамики $Q=A+\Delta W=(Mg+pS)\Delta h+\Delta W$; $Q=360{,}12$ Дж.

5.170. Масса $m=10{,}5$ г азота изотермически расширяется при температуре $t=-23°$ С, причем его давление изменится от $p_1=250$ кПа до $p_2=100$ кПа. Найти работу A, совершенную газом при расширении.

Решение:

Работа, совершаемая при изотермическом изменении объема газа, $A=RT\frac{m}{\mu}\ln\frac{V_2}{V_1}$, где $T=250$ К. Из закона Бойля — Мариотта $p_1V_1=p_2V_2$ следует, что $\frac{V_2}{V_1}=\frac{p_1}{p_2}$, поэтому работа $A=RT\frac{m}{\mu}\ln\frac{p_1}{p_2}$; $A=713{,}85$ Дж.

5.171. При изотермическом расширении массы $m = 10$ г азота, находящегося при температуре $t = 17°$ С, была совершена работа $A = 860$ Дж. Во сколько раз изменилось давление азота при расширении?

Решение:
Работа, совершаемая при изотермическом расширении (см. задачу 5.170), $A = RT\frac{m}{\mu}ln\frac{p_1}{p_2}$. Отсюда $ln\frac{p_1}{p_2} = \frac{A\mu}{RTm}$, тогда $\frac{p_1}{p_2} = exp\left(\frac{A\mu}{RTm}\right)$; $\frac{p_1}{p_2} = 2,72$.

5.172. Работа изотермического расширения массы $m = 10$ г некоторого газа от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$ оказалась равной $A = 575$ Дж. Найти среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ молекул газа при этой температуре.

Решение:

Работа по расширению газа $dA = pdV$, откуда $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} pdV$.

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, следовательно, $p = \frac{mRT}{\mu V}$. Тогда работа $A = \int\limits_{V_1}^{V_2}\frac{m}{\mu}RT\frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}RT\,ln\frac{V_2}{V_1}$. Откуда выразим температуру $T = \frac{A\mu}{mR \cdot ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{A\mu}{mR\,ln 2}$ — (1). Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Из (1) $\frac{RT}{\mu} = \frac{A}{m\,ln 2}$, тогда $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3A}{m\,ln 2}}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 500$ м/с.

5.173. Гелий, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется от объема $V_1 = 1$ л до $V_2 = 2$ л. Найти работу A, совершенную газом при расширении, и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение:
Работа, совершаемая при изотермическом изменении объема газа, $A = RT\frac{m}{\mu}ln\frac{V_2}{V_1}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT$, тогда работа $A = pV_1 ln\frac{V_2}{V_1}$; $A = 70$ Дж. согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta W + A$, но т. к. $T = const$, то изменение внутренней энергии $\Delta W = 0$, поэтому здесь $Q = A$; $Q = 70$ Дж.

5.174. При изобарическом расширении газа, занимавшего объем $V = 2$ м^3, давление его меняется от $p_1 = 0{,}5$ МПа до $p_2 = 0{,}4$ МПа. Найти работу A, совершенную при этом.

Решение:
Работа, совершаемая при изотермическом расширении газа, $A = \nu RT ln\frac{V_2}{V_1}$ (см. задачу 5.172). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_1V_1 = \nu RT$; $p_2V_2 = \nu RT$, откуда $T = \frac{p_1V_1}{\nu R}$; $V_2 = \frac{\nu RT}{p_2}$. Тогда $A = \nu R\frac{p_1V_1}{\nu R}ln\frac{\nu Rp_1V_1}{V_1p_2\nu R}$; $A = p_1V_1 ln\frac{p_1}{p_2}$; $A = 223$ кДж.

5.175. До какой температуры t_2 охладится воздух, находящийся при $t_1 = 0°$ С, если он расширяется адиабатически от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$?

Решение:

Воздух в первом приближении можно считать азотом, т.е. число степеней свободы $i = 5$. Показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$, где $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$ и $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, тогда $\gamma = \frac{i+2}{2}$; $\gamma = 1{,}4$. Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$. Т. к. по условию $V_2 = 2V_1$, то $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{2V_1}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 2^{0,4}$. Отсюда $T_2 = 206{,}89$ К.

5.176. Объем $V_1 = 7{,}5$ л кислорода адиабатически сжимается до объема $V_2 = 1$ л, причем в конце сжатия установилось давление $p_2 = 1{,}6$ МПа. Под каким давлением p_1 находится газ до сжатия?

Решение:

Согласно уравнению Пуассона $pV^\gamma = const$, где показатель адиабаты $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, для кислорода $\gamma = 1{,}4$; $p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$, откуда $p_1 = p_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$; $p_1 = 95$ кПа.

5.177. При адиабатическом сжатии воздуха в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания давление изменится от $p_1 = 0{,}1$ МПа до $p_1 = 3{,}5$ МПа. Начальная температура воздуха $t_1 = 40°$ С. Найти температуру воздуха в конце сжатия.

Решение:

Показатель адиабаты для воздуха (см. задачу 5.175) $\gamma = 1{,}4$. Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, где $T_1 = 273$ К. Тогда $T_2 = \frac{T_1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$; $T_2 = 862{,}86$ К.

5.178. Газ расширяется адиабатически, причем объем его увеличивается вдвое, а термодинамическая температура падает в 1,32 раза. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

Решение:

Показатель адиабаты (см. задачу 5.175) $\gamma = \frac{i+2}{i}$. Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$. По условию $\frac{T_1}{T_2} = 1{,}32$ и $\frac{V_2}{V_1} = 2$, тогда $2^{\gamma-1} = ln1{,}32$ или $\left(\frac{i+2}{i} - 1\right) \cdot ln2 = ln1{,}32$. Отсюда $\frac{i+2-i}{i} = \frac{2}{i} = \frac{ln1{,}32}{ln2} = 0{,}4$. Тогда $i = \frac{2}{0{,}4} = 5$.

5.179. Двухатомный газ, находящийся при давлении $p_1 = 2$ МПа и температуре $t_1 = 27°$ С, сжимается адиабатически от объема V_1 до $V_2 = 0{,}5V_1$. Найти температуру t_2 и давление p_2 газа после сжатия.

Решение:
Показатель адиабаты для двухатомного газа $\gamma = 1{,}4$ (см. задачу 5.175). Из уравнения Пуассона $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$ или $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$. По условию $\frac{V_2}{V_1} = 0{,}5$, тогда $\frac{p_1}{p_2} = 0{,}5^{1,4}$, $p_2 = 5{,}28$ МПа; $T_1 / T_2 = 0{,}5^{1,4-1}$, $T_2 = 395{,}85$ К $= 122{,}85°$ С.

5.180. В сосуде под поршнем находится гремучий газ, занимающий при нормальных условиях объем $V_1 = 0{,}1$ л. При быстром сжатии газ воспламеняется. Найти температуру T воспламенения гремучего газа, если известно, что работа сжатия $A = 46{,}35$ Дж.

Решение:
Процесс быстрого сжатия гремучего газа в первом приближении можно считать адиабатическим. Гремучий газ представляет из себя смесь водорода и кислорода, а т. к. оба газа двухатомные, то показатель адиабаты (см. задачу 5.175) $\gamma = 1{,}4$. Работа, совершаемая над газом при адиабатическом сжатии, $A = \frac{p_1 V_1 (T_2 - T_1)}{(\gamma - 1) T_1}$. Отсюда $T_2 - T_1 = \frac{A T_1 (\gamma - 1)}{p_1 V_1}$, тогда температура воспламенения гремучего газа $T_2 = \frac{A T_1 (\gamma - 1)}{p_1 V_1} + T_1 = T_1 \left[\frac{A(\gamma - 1)}{p_1 V_1} + 1\right]$; $T_2 = 774{,}13$ К.

5.181. В сосуде под давлением находится газ при нормальных условиях. Расстояние между дном сосуда и дном поршня $h = 25$ см. Когда на поршень положили груз массой $m = 20$ кг, поршень опустится на $\Delta h = 13{,}4$ см. Считая сжатие адиабатическим, найти для данного газа отношение c_p / c_V. Площадь поперечного сечения поршня $S = 10\,\text{см}^2$. Массой поршня пренебречь.

Решение:

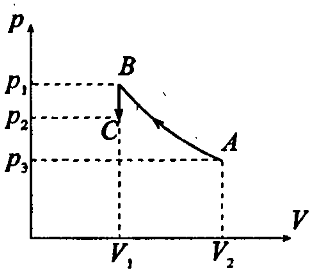
Т. к. по условию сжатие адиабатическое, то $\frac{c_p}{c_V} = \gamma$ — показатель адиабаты. Из уравнения Пуассона $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$.

Когда на поршень положили груз, давление стало равным $p_2 = p_1 + \frac{mg}{S}$. Начальный и конечный объемы соответственно равны $V_1 = Sh$ и $V_2 = S(h - \Delta h)$, тогда $\frac{V_2}{V_1} = \frac{h - \Delta h}{h}$. Следовательно, $\frac{p_1}{p_1 + mg / S} = \left(\frac{h - \Delta h}{h}\right)^\gamma$ или $\frac{p_1}{p_1 S + mg} = \left(\frac{h - \Delta h}{h}\right)^\gamma$. Чтобы выразить γ, прологарифмируем полученное выражение $ln\left(\frac{p_1 S}{p_1 S + mg}\right) = \gamma\, ln\left(\frac{h - \Delta h}{h}\right)$, откуда $\frac{c_p}{c_V} = \gamma = \frac{ln(p_1 S / (p_1 S + mg))}{ln((h - \Delta h)/h)} = \frac{ln(p_1 S) - ln(p_1 S + mg)}{ln(h - \Delta h) - ln\, h}$.

Подставив числовые значения, получим $\frac{c_p}{c_V} = 1{,}4$.

5.182. Двухатомный газ занимает объем $V_1 = 0{,}5$ л при давлении $p = 50$ кПа. Газ сжимается адиабатически до некоторого объема V_2 и давления p_2. Затем он охлаждается при $V_2 = const$ до первоначальной температуры, причем его давление становится равным $p_0 = 100$ кПа. Начертить график этого процесса. Найти объем V_2 и давление p_2.

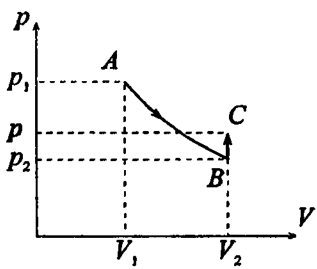
Решение:



Для двухатомного газа (см. задачу 5.175) $\gamma = 1{,}4$. Из уравнения Пуассона $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$ или $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$. Т. к. $V_2 = const$, то $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_0}{T_1}$, откуда $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_0}{p_2}$. Тогда имеем $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$ — (1) и $\frac{p_0}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ — (2). Разделим (1) на (2), тогда $\frac{p_1}{p_0} = \frac{(V_2/V_1)^{\gamma}}{(V_2/V_1)^{\gamma-1}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{[\gamma-(\gamma-1)]} = \frac{V_2}{V_1}$. Отсюда $V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_0} = 0{,}25$ л. Из (1) $p_2 = \frac{p_1}{(V_2/V_1)^{\gamma}} = 132$ кПа.

5.183. Газ расширяется адиабатически так, что его давление падает от $p_1 = 200$ кПа до $p_2 = 100$ кПа. Затем он нагревается при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем его давление становится равным $p = 122$ кПа. Найти отношение c_p/c_V для этого газа. Начертить график этого процесса.

Решение:



Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Т. к. $V = const$, то $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p}{T_1}$ или $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{p_2}$. Тогда

$\frac{p}{p_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Прологарифмируем полученное выражение

$ln\left(\frac{p}{p_2}\right)=ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ или $ln\left(\frac{p}{p_2}\right)=\frac{\gamma-1}{\gamma}ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$. Отсюда $\frac{\gamma-1}{\gamma}=\frac{ln(p/p_2)}{ln(p_1/p_2)}$ или $\frac{1}{\gamma}=1-\frac{ln(p/p_2)}{ln(p_1/p_2)}$. Окончательно получим $\gamma=\frac{1}{1-(ln(p/p_2)/ln(p_1/p_2))}=1{,}4$.

5.184. Количество $\nu=1$ кмоль азота, находящегося при нормальных условиях, расширяется адиабатически от объема V_1 до $V_2=5V_1$. Найти изменение ΔW внутренней энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

Решение:

Изменение внутренней энергии при адиабатическом процессе $\Delta W=-A$ или $\Delta W=\frac{i}{2}\nu R(T_2-T_1)$. Из уравнения Пуассона найдем $T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$. Для азота количество степеней свободы $i=5$. Тогда $\Delta W=\frac{5}{2}\nu RT_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}-1\right)$; $\Delta W=-2{,}69$ МДж; $A=2{,}69$ МДж.

5.185. Необходимо сжать воздух от объема $V_1=10$ л до $V_2=2$ л. Как выгоднее его сжимать (адиабатически или изотермически)?

Решение:

Работа, совершаемая при адиабатическом сжатии, $A_1 = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$. Работа, совершаемая при изотермическом сжатии, $A_2 = RT\frac{m}{\mu}ln\frac{V_2}{V_1}$. Отсюда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1}}{(\gamma-1)ln(V_2/V_1)}$; $\frac{A_1}{A_2} = 1{,}4$. Следовательно, выгоднее сжимать воздух изотермически.

5.186. При адиабатическом сжатии количества $\nu = 1$ кмоль двухатомного газа была совершена работа $A = 146$ кДж. На сколько увеличилась температура газа при сжатии?

Решение:

Для двухатомного газа (см. задачу 5.175) $\gamma = 1{,}4$. Работа над газом при адиабатическом сжатии $A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\times$ $\times\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\nu\frac{T_1 - T_2}{T_1}$; $A = \frac{R\nu(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} = \frac{R\nu\Delta T}{\gamma - 1}$. Отсюда $\Delta T = \frac{A(\gamma - 1)}{R\nu}$; $\Delta T \approx 7$ К.

5.187. Во сколько раз уменьшится средняя квадратичная скорость молекул двухатомного газа при адиабатическом увеличении объема газа в два раза?

Решение:

Для двухатомного газа (см. задачу 5.175) $\gamma = 1{,}4$. Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, тогда

$\dfrac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{\sqrt{\overline{v_2^2}}} = \dfrac{\sqrt{3RT_1/\mu}}{\sqrt{3RT_2/\mu}} = \sqrt{\dfrac{3RT_1}{\mu}\dfrac{\mu}{3RT_2}} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}$. Из уравнения Пуассона $T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\gamma-1}$, отсюда $\dfrac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{\sqrt{\overline{v_2^2}}} = \sqrt{\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$; $\dfrac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{\sqrt{\overline{v_2^2}}} = 1{,}15$.

5.188. Масса $m = 10$ г кислорода, находящегося при нормальных условиях, сжимается до объема $V_2 = 1{,}4$ л. Найти давление p_2 и температуру t_2 кислорода после сжатия, если кислород сжимается: а) изотермически; б) адиабатически. Найти работу A сжатия в каждом из этих случаев.

Решение:

а) При изотермическом сжатии газа $T = const$, поэтому $T_2 = T_1 = 273$ К. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_2V_2 = \dfrac{m}{\mu}RT_1$, давление $p_2 = \dfrac{mRT_1}{\mu V_2}$; $p_2 = 506{,}39$ кПа.

Работа при изотермическом сжатии $A = RT\dfrac{m}{\mu}\ln\dfrac{V_2}{V_1}$. Из закона Бойля — Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$ имеем $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{p_1}{p_2}$, тогда $A = RT_1\dfrac{m}{\mu}\ln\dfrac{p_1}{p_2}$; $A = -1{,}14$ кДж. б) Поскольку кислород двухатомный газ, то $\gamma = 1{,}4$ (см. задачу 5.175). Из уравнения Пуассона $\dfrac{p_1}{p_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$ — (1) или $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ — (2).

Разделим (1) на (2) $\frac{p_1T_2}{p_2T_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{[g-(\gamma-1)]}=\frac{V_2}{V_1}$ или

$V_1=\frac{p_2V_2T_1}{p_1T_2}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_2V_2=\frac{m}{\mu}RT_2$, тогда $V_1=\frac{(m/\mu)RT_2T_1}{p_1T_2}=\frac{mRT_1}{\mu p_1}$. Подставим в (1) $\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{V_2\mu p_1}{mRT_1}\right)^{\gamma}$, откуда $p_2=\frac{p_1}{(V_2\mu p_1/(mRT_1))^{\gamma}}$;

$p=965$ кПа. Подставим в (2) $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2\mu p_1}{RT_1}\right)^{\gamma-1}$, откуда

$T_2=\frac{T_1}{(V_2\mu p_1/(mRT_1))^{\gamma-1}}$; $T_2=520$ К. Работа при адиабатическом сжатии $A=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)$; $A=-1{,}605$ кДж.

5.189. Масса $m=28$ г азота, находящегося при температуре $t_1=40°$ С и давлении $p_1=100$ кПа, сжимается до объема $V_2=13$ л. Найти температуру t_2 и давление p_2 азота после сжатия, если азот сжимается: а) изотермически; б) адиабатически. Найти работу A сжатия в каждом из этих случаев.

Решение:

а) При изотермическом сжатии газа (см. задачу 5.188) температура $T_2=T_1=313\text{ К}=40°\text{ С}$, давление $p_2=\frac{mRT_1}{\mu V_1}$;

$p_2=200$ кПа, работа $A=RT_1\frac{m}{\mu}\ln\frac{p_1}{p_2}$; $A=-1{,}8$ кДж.

б) Давление $p_2=\frac{p_1}{(V_2\mu p_1/(mRT_1))^{\gamma}}$; $p_2=264$ кПа. Температура $T_2 = \dfrac{T_2}{\left(V_2 \mu p_1 / (mRT_1)\right)^{\gamma-1}}$; $T_2 = 413$ К. Работа $A = \dfrac{RT_1}{\gamma - 1}\dfrac{m}{\mu}\left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right)$; $A = -2{,}08$ кДж.

5.190. Во сколько раз возрастает длина свободного пробега молекул двухатомного газа, если его давление падает в двое при расширении газа: а) изотермически; б) адиабатически?

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\lambda = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Тогда $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = \dfrac{T_2}{T_1}\dfrac{p_1}{p_2}$. а) При изотермическом расширении $T = const$, поэтому $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = \dfrac{p_1}{p_2} = 2$. б) При адиабатическом расширении из уравнения Пуассона имеем $\dfrac{T_2}{T_1} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, тогда $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\dfrac{p_1}{p_2}$, где $\gamma = 1{,}4$; т. к. газ двухатомный (см. задачу 5.175). Следовательно, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}64$.

5.191. Два различных газа, из которых один одноатомный, а другой двухатомный, находятся при одинаковых температурах и занимают одинаковые объемы. Газы сжимаются адиабатически так, что объем их уменьшается вдвое. Какой из газов нагреется больше и во сколько раз?

Решение:

Показатель адиабаты (см. задачу 5.120) $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$. У одноатомного газа число степеней свободы $i_1 = 3$, поэтому

$\gamma_1 = \dfrac{5}{3} = 1{,}67$, а у двухатомного $\gamma = 1{,}4$. Из уравнения Пуассона имеем $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$, откуда $T_2 = \dfrac{T_1}{(V_2/V_1)^{\gamma-1}}$. По условию $\dfrac{V_2}{V_1} = 0{,}5$, следовательно, отношение температур $k = \dfrac{T_{2_1}}{T_{2_2}} = \dfrac{0{,}5^{\gamma_1-1}}{0{,}5^{\gamma_2-1}}$; $k = 0{,}5^{\gamma_1-\gamma_2} = 1{,}2$. Значит, больше нагреется одноатомный газ в 1,2 раза.

5.192. Масса $m = 1$ кг воздуха, находящегося при давлении $p_1 = 150$ кПа и температуре $t_1 = 30°$ С, расширяется адиабатически и давление при этом падает до $p_2 = 100$ кПа. Во сколько раз увеличился объем воздуха? Найти конечную температуру t_2 и работу A, совершенную газом при расширении.

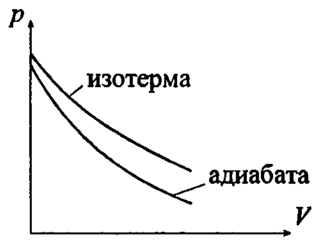
Решение:

Воздух в первом приближении можно считать двухатомным газом, поэтому показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$. Из уравнения Пуассона $\dfrac{p_1}{p_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$, откуда $\dfrac{V_2}{V_1} = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$; $\dfrac{V_2}{V_1} = 1{,}34$. Кроме того, уравнение Пуассона может быть записано в виде: $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, откуда $T_2 = \dfrac{T_1}{(p_1/p_2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$; $T_2 = 720$ К. работа расширения газа при адиабатическом процессе $A = \dfrac{RT_1}{\gamma-1}\dfrac{m}{\mu}\left[1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$; $A = 24$ кДж.

5.193. Количество $\nu = 1$ кмоль кислорода находится при нормальных условиях, а затем объем его увеличивается до $V = 5V_0$. Построить график зависимости $p = f(V)$, приняв за единицу по оси абсцисс значение V_0, если кислород расширяется: а) изотермически; б) адиабатически. Значения давления p найти для объемов, равных: $V_0, 2V_0, 3V_0, 4V_0$ и $5V_0$.

Решение:

а) При изотермическом процессе по закону Бойля — Мариотта $p_0V_0 = pV$, откуда $p = \dfrac{p_0V_0}{V}$.

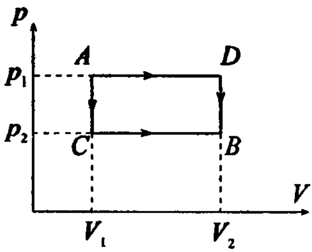


б) При адиабатическом процессе из уравнения Пуассона следует, что $\dfrac{p_0}{p} = \left(\dfrac{V}{V_0}\right)^\gamma$, откуда $p = \dfrac{p_0}{(V/V_0)^\gamma}$.

V	V_0	$2V_0$	$3V_0$	$4V_0$	$5V_0$
p, кПа (изотерма)	101,300	38,386	21,759	14,545	10,643
p, кПа (адиабата)	101,300	50,650	33,767	25,325	20,260

5.194. Некоторая масса кислорода занимает объем $V_1 = 3$ л при температуре $t_1 = 27°$ C и давлении $p_1 = 820$ кПа. В другом состоянии газ имеет параметры $V_2 = 4{,}5$ л и $p_2 = 600$ кПа. Найти количество теплоты Q, полученное газом, работу A, совершенную газом при расширении, и изменение ΔW внутренней энергии газа при переходе газа из одного состояния в другое: а) по участку ACB; б) по участку ADB.

Решение:



а) По участку ACB: Участок AC — изохора, т. е. $A_1 = 0$, поскольку $\Delta V = 0$. Следовательно, $Q_1 = \Delta W_1 = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (1) и $p_2V_1 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). Вычтем уравнение (2) из (1), тогда $(p_1 - p_2)V_1 = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Отсюда $Q_1 = \Delta W_1 = \frac{5}{2}(p_1 - p_2)V_1$; $Q_1 = 1{,}65$ кДж. Участок CB — изобара, следовательно, $A_2 = p_2(V_2 - V_1)$; $A_2 = 0{,}9$ кДж. Изменение внутренней энергии $\Delta W_2 = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_2V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (3) и $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (4). Вычтем (3) из (4), тогда $p_2(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Отсюда $\Delta W_2 = \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1)$; $\Delta W_2 = 2{,}25$ кДж. Таким образом, на всем участке ACB: работа $A = A_2 = 0{,}9$ кДж; изменение внутренней энергии $\Delta W = \Delta W_2 - \Delta W_1 = 0{,}6$ кДж. Согласно первому началу термодинамики количество тепла $Q = \Delta W + A = 1{,}5$ кДж. б) Аналогично на участке ADB: работа $A = A_1 = p_1(V_2 - V_1) = 1{,}23$ кДж; изменение внутренней энергии $\Delta W = \Delta W_1 - \Delta W_2 = \frac{5}{2}p_1(V_2 - V_1) - \frac{5}{2}(p_1 - p_2) \times$ $\times V_2 = 0{,}6$ кДж; количество тепла $Q = \Delta W + A = 1{,}83$ кДж.

5.195. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, за цикл получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 2{,}512$ кДж. Температура нагревателя $T_1 = 400$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Найти работу A, совершаемую машиной за один цикл, и количество теплоты Q_2, отдаваемое холодильнику за один цикл.

Решение:

Работа, совершаемая тепловой машиной, определяется выражением $A = Q_1 - Q_2 = \eta Q_1$, где Q_1 — количество теплоты, полученное машиной от нагревателя, Q_2 — количество теплоты, отдаваемое холодильнику, η — к. п. д. машины. $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}25$. Отсюда $A = 630$ Дж; $Q_2 = Q_1 - A = 1{,}88$ кДж.

5.196. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 2{,}94$ кДж и отдает за один цикл холодильнику количество теплоты $Q_2 = 13{,}4$ кДж. Найти к.п.д. η цикла.

Решение:

К.п.д. цикла Карно $\eta = \frac{A}{Q_1}$ — (1), где Q_1 — количество тепла, подведенного к рабочему телу. Т. к. по условию машина является идеальной, то $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ — (2). Сравнивая выражения (1) и (2), получим $A = Q_1 - Q_2$, откуда $Q_1 = A + Q_2$. Тогда $\eta = \frac{A}{A + Q_2}$; $\eta = 18\%$.

5.197. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 73{,}5$ кДж. Температура нагревателя $t_1 = 100°$ С, температура холодильиика $t_2 = 0°$ С. Найти к. п. д. η цикла, количество теплоты Q_1, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отдаваемое за один цикл холодильнику.

Решенне:

К. п. д. идеального цикла Карно $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$; $\eta = 26{,}8\,\%$. С другой стороны, $\eta = \frac{A}{Q_1}$, откуда $Q_1 = \frac{A}{\eta}$; $Q_1 = 274$ кДж. Т. к. машина идеальная, то количество тепла, отданное холодильнику $Q_2 = Q_1 - A$; $Q_2 = 200$ кДж.

5.198. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80% количества теплоты, получаемого от нагревателя, передается холодильнику. Машина получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 6{,}28$ кДж. Найти к. п. д. η цикла и работу A, совершаемую за один цикл.

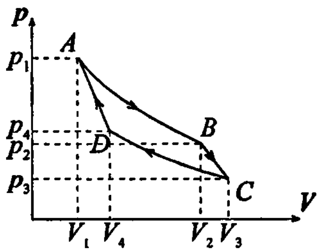
Решенне:

Поскольку $\frac{Q_2}{Q_1} = 0{,}8$, то $Q_2 = 0{,}8Q_1 = 5{,}024$ кДж. По условию, машина идеальная, значит, $A = Q_2 - Q_1$; $A = 1{,}256$ кДж и $\eta = \frac{A}{Q_1}$; $\eta = 20\,\%$.

5.199. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Воздух при давлении $p_1 = 708$ кПа и температуре $t_1 = 127°$ С занимает объем $V_1 = 2$ л. После изотермического расширения воздух занял объем $V_2 = 5$ л; после адиабатического расширения объем стал равным $V_3 = 8$ л. Найти: а) координаты пересечения изотерм и адиабат; б) работу A, совершаемую на каждом участке цикла; в) полную работу A, совершаемую за весь цикл; г) к. п. д. η цикла; д) количество теплоты Q_1, полученное от нагревателя за один цикл; е) количество теплоты Q_2, отданное холодильнику за один цикл.

Решение:

а) Запишем уравнение изотермы AB: $pV = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (1). Поскольку точка A принадлежит AB, то $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, откуда $\frac{m}{\mu} = \nu = \frac{p_1V_1}{RT_1}$; $\nu = 0{,}427$ моль.



Тогда (1) можно записать в виде $pV = 0{,}427RT_1 = 1{,}42$ кДж. По закону Бойля — Мариотта для точки B $p_2 = \frac{pV}{V_2} = 284$ кПа. Точки B и C принадлежат адиабате BC, следовательно, $p_2V_2^\gamma = p_3V_3^\gamma$, откуда $p_3 = p_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^\gamma = 146$ кПа. Уравнение изотермы CD имеет вид $pV = \nu RT_2 = p_3V_3$, отсюда $T_2 = \frac{p_3V_3}{\nu R}$; $T_2 = 330$ К. Координаты точек D и A удовлетворяют уравнению адиабаты DA, следовательно, $\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$, откуда $V_4 = 3{,}2$ л. Кроме того, $\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^\gamma = \frac{p_1}{p_4}$, откуда $p_4 = p_1\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^\gamma = 365$ кПа. Таким образом, координаты искомых точек: $A(2;708)$, $B(5;284)$, $C(8;146)$, $D(3{,}2;365)$, здесь объем измеряется в литрах, давление — в килопаскалях.

б) Работа на участке AB (изотерма): $A_1 = RT_1 \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1} =$ $= 1300$ Дж. Работа на участке BC (адиабата): $A_2 = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = 620$ Дж. Работа на участке CD (изотерма): $A_3 = RT_2 \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_4}{V_3} = -1070$ Дж.

Работа на участке DA (адиабата): $A_4 = \frac{RT_2}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) =$ $= -620$ Дж.

в) Работа за полный цикл $A = A_1 + A_2 + A_2 + A_4 = 230$ Дж.

г) К. п. д. цикла $\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} = 0{,}175$.

д) Количество теплоты, полученное от нагревателя за один цикл, $Q = \frac{A}{\eta} = 1300$ Дж.

е) Количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл $Q_2 = Q_1 - A = 1070$ Дж.

5.200. Количество $\nu = 1$ кмоль идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом объем газа изменяется от $V_1 = 25\ м^3$ до $V_2 = 50\ м^3$ и давление изменяется от $p_1 = 100$ кПа до $p_2 = 200$ кПа. Во сколько раз работа, совершаемая при таком цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла, если при изотермическом расширении объем увеличился в 2 раза?

Решение:

Работа, совершаемая при цикле из двух изобар и двух изохор, $A_1 = p_1(V_2 - V_1) - p_2(V_2 - V_1) = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1)$; $A_1 = -2500$ кДж. Работа, совершаемая по циклу Карно,

$A_2 = A_{1из} + A_{1ад} + A_{2из} + A_{2ад}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$ имеем $T = \dfrac{pV}{\nu R}$. Тогда температура при изотермическом расширении и сжатии соответственно $T_1 = \dfrac{p_1V_1}{\nu R}$ и $T_2 = \dfrac{p_2V_2}{\nu R}$. Значит, работа при изотермическом расширении и сжатии $A_{1из} = RT_1\nu\, ln 2 = p_1V_1\, ln 2$; $A_{2из} = RT_2\nu\, ln 0{,}5 = p_2V_2\, ln 0{,}5$. Идеальный газ является одноатомным, поэтому показатель адиабаты $\gamma = 1{,}67$ (см. задачу 5.191). Тогда работа при адиабатическом расширении и сжатии $A_{1ад} = \dfrac{RT_1}{\gamma-1}\nu\left(1-\dfrac{T_2}{T_1}\right) = \dfrac{p_1V_1}{\gamma-1}\times$ $\times\left(1-\dfrac{p_2V_2}{p_1V_1}\right)$ и $A_{2ад} = \dfrac{RT_2}{\gamma-1}\nu\left(1-\dfrac{T_1}{T_2}\right) = \dfrac{p_2V_2}{\gamma-1}\left(1-\dfrac{p_1V_1}{p_2V_2}\right)$, отсюда $A_2 = p_2V_2\left[ln 0{,}5 + \left(1-\dfrac{p_1V_1}{p_2V_2}\right)\right] + p_1V_1\left[ln 2 + \left(1-\dfrac{p_2V_2}{p_1V_1}\right)\right]$. Подставляя числовые данные, получим: $A_2 = -5198$ кДж, тогда $\dfrac{A_2}{A_1} = 2{,}1$.

5.201. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 37$ кДж. При этом она берет тепло от тела с температурой $t_2 = -10°$ С и передает тепло телу с температурой $t_1 = 17°$ С. Найти к. п. д. η цикла, количество теплоты Q_2, отнятое у холодного тела за один цикл, и количество теплоты Q_1, переданное более горячему телу за один цикл.

Решение:

Поскольку холодильная машина работает по обратному циклу, то для перехода тепла от менее нагретого тела к более нагретому необходимо, чтобы внешние силы совершили положительную работу. Количество теплоты Q_2, отнятое у холодного тела, вместе с работой внешних сил A равно количеству теплоты Q_1, переданному более нагретому телу, $Q_2 = Q_1 - A = \frac{A}{\eta} = \frac{1-\eta}{\eta} A$. Поскольку $\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} = 0{,}093$, то $Q_2 = 360$; $Q_1 = Q_2 + A = 379$ кДж. Таким образом холодильная машина за каждый цикл передает более горячему телу количество теплоты 397кДж, из которых 37кДж за счет механической работы, а 360кДж от холодного тела.

5.202. Идеальная холодильная машина работает как тепловой насос по обратному циклу Карно. При этом она берет тепло от воды с температурой $t_2 = 2°$ C и передает его воздуху с температурой $t_1 = 27°$ C. Найти: а) коэффициент η_1 — отношение количества теплоты, переданного воздуху за некоторый промежуток времени, к количеству теплоты, отнятому за это же время от воды; б) коэффициент η_2 — отношение количества теплоты, отнятого за некоторый промежуток времени от воды, к затраченной на работу машины энергии за этот же промежуток времени (коэффициент η_2 называется холодильным коэффициентом машины); в) коэффициент — η_3 отношение затраченной на работу машины энергии за некоторый промежуток времени к количеству теплоты, переданному за это же время воздуху (коэффициент η_3 — к. п. д. цикла). Найти соотношение между коэффициентами η_1, η_2 и η_3.

Решение:

Согласно условию задачи $\eta_1 = \frac{Q_1}{Q_2}$ — (1); $\eta_2 = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$ — (2); $\eta_3 = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ — (3). Кроме того, к. п. д. цикла $\eta_3 = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}083$. Из (3) имеем $Q_2 = \dfrac{Q_1}{(1-\eta_3)}$. Тогда из (1) $\eta_1 = \dfrac{1}{1-\eta_3} = 1{,}09$. Из (2) имеем $\dfrac{1}{\eta_2} = \eta_1 - 1 = \dfrac{1}{1-\eta_3} - 1$, откуда $\eta_2 = \dfrac{1-\eta_3}{\eta_3} = 11$.

5.203. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре $t_2 = 0°$ С кипятильнику с водой при температуре $t_1 = 100°$ С. Какую массу m_2 воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар массу $m_1 = 1$ кг воды в кипятильнике?

Решение:

К. п. д. идеальной холодильной машины $\eta = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2} = 2{,}73$. Количество тепла, отдаваемое холодильнику $Q_2 = \lambda m_2$, где $\lambda = 335$ кДж/кг — удельная теплота плавления льда. Количество тепла, принимаемое кипятильником $Q_1 = rm_1$, где $r = 2{,}26$ МДж/кг — удельная теплота парообразования воды. С другой стороны, $\eta = \dfrac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$, откуда $\eta = (Q_1 - Q_2) = Q_2$ или $\eta Q_1 - \eta Q_2 = Q_2$. Отсюда $Q_1 = \dfrac{Q_2(1+\eta)}{\eta}$ или $rm_1 = \dfrac{\lambda m_2(1+\eta)}{\eta}$. Окончательно $m_2 = \dfrac{rm_1\eta}{\lambda(1+\eta)}$; $m_2 = 4{,}94$ кг.

5.204. Помещение отапливается холодильной машиной, работающей по обратному циклу Карно. Во сколько раз количество теплоты Q, получаемое помещением от сгорания дров в печке, меньше количества теплоты Q', переданного помещению холодильной машиной, которая приводится в действие тепловой машиной, потребляющей ту же массу дров? Тепловой двигатель работает между температурами $t_1 = 100°$ C и $t_2 = 0°$ C. Помещение требуется поддерживать при температуре $t_1' = 16°$ C. Температура окружающего воздуха $t_2' = -10°$ C.

Решение:

Пусть к. п. д. тепловой машины $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, а к. п. д. холодильной машины $\eta' = \frac{T_1' - T_2'}{T_1'}$. Тогда за счет количества тепла Q совершается работа $A = \eta Q$, а помещению передается количество теплоты $Q' = \frac{A}{\eta'}$. Отсюда $\frac{Q'}{Q} = \frac{\eta A}{\eta' A} = \frac{(T_1 - T_2)T_1'}{(T_1' - T_2')T_1}\frac{Q'}{Q} = 3$. Т. е. от сгорания дров в печке помещение получит в три раза меньше тепла, чем при отоплении его холодильной машиной.

5.205. Рабочий цикл идеальной паровой машины изображен на рисунке. В начале доступа пара из котла в цилиндр давление в нем возрастает при $V_0 = const$ от p_0 до p_1 (ветвь AB). При дальнейшем поступлении пара до объема V_1 поршень движется слева направо при $p_1 = const$ (ветвь BC). При дальнейшем движении поршня вправо доступ пара из котла в цилиндр прекращается, происходит адиабатическое расширение пара до объема V_2 (ветвь CD). При крайнем правом положении поршня пар из цилиндра выходит в холодильник — давление падает при $V_2 = const$ до давления p_0 (ветвь DE). При обратном движении поршень выталкивает оставшийся пар при $p_0 = const$; объем при этом уменьшается от V_2 до V_0 (ветвь EA). Найти работу A этой машины, совершаемую за каждый цикл, если $V_0 = 0{,}5$ л,

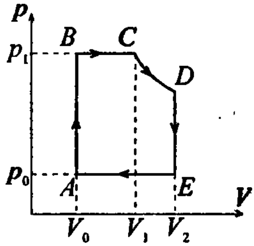
$V_1 = 1,5$ л, $V_2 = 3$ л, $p_0 = 0,1$ МПа, $p_1 = 1,2$ МПа и показатель адиабаты $\gamma = c_p / c_V = 1,33$.

Решение:

Из рисунка видно, что работа за один цикл равна $A = A_{BC} + A_{CD} - A_{EA}$ или

$$A = p_1(V_1 - V_0) + \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] -$$

$-p_0(V_2 - V_0)$, подставляя числовые данные, получим $A = 1,92$ кДж.



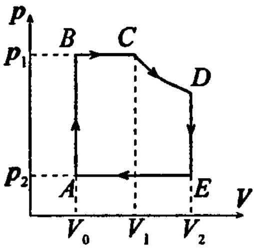
5.206. Паровая машина мощностью $P = 14,7$ кВт потребляет за время $t = 1$ ч работы массу $m = 8,1$ кг угля с удельной теплотой сгорания $q = 33$ МДж/кг. Температура котла $t_1 = 200°$ С, температура холодильника $t_2 = 58°$ С. Найти фактический к. п. д. η машины и сравнить его с к. п. д. η' идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно между теми же температурами.

Решение:

Работа, совершаемая паровой машиной, $A = Pt$. Теплота, выделяемая при сгорании угля, $Q = qm$. Фактический к. п. д. машины $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Pt}{qm}$; $\eta = 19,8$ %. К. п. д. идеальной тепловой $\eta' = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 30$ %.

5.207. Паровая машина мощностью $P = 14,7$ кВт имеет площадь поршня $S = 0,02$ м^2; ход поршня $h = 45$ см. Изобарический процесс BC (рис.) происходит при движении поршня на одну треть его хода. Объемом V_0, по сравнению с объемами

V_1 и V_2, пренебречь. Давление пара в котле $p_1 = 1{,}6$ МПа, давление пара в холодильнике $p_2 = 0{,}1$ МПа. Сколько циклов за время $t = 1$ мин делает машина, если показатель адиабаты $\gamma = 1{,}3$?



Решение:
На изохорных участках работа $A_{AB} = A_{DE} = 0$, т. к. $\Delta V = 0$. На изобарном участке $A_{BC} = \frac{1}{3} p_1 Sh$, т. к. по условию поршень проходит $\frac{1}{3}$ хода. На адиабатном участке (см. задачу 5.200) $A_{CD} = p_1 V_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$, где $V_1 = \frac{2}{3} Sh$. Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ или $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, тогда

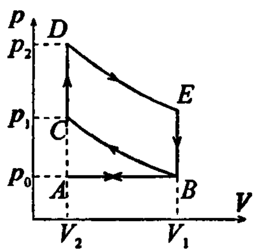
$A_{CD} = \frac{2}{3} p_1 Sh \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$. На изобарном участке $A_{EA} = p_2 Sh$, тогда полная работа одного цикла

$$A_1 = A_{BC} + A_{CD} - A_{EA} = \frac{1}{3} p_1 Sh + \frac{2}{3} p_1 Sh \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] - p_2 Sh;$$

$A_1 = 8{,}43$ кДж. Работа, совершаемая за время t: $A_t = Pt = 882$ кДж, число циклов $n = \frac{A_t}{A_1} = 104{,}6$.

5.208. Цикл карбюраторного и газового четырехтактного двигателя внутреннего сгорания изображен на рисунке. При первом ходе поршня в цилиндр всасывается горючее (в карбюраторных двигателях горючая смесь представляет собой смесь паров бензина с воздухом, приготовляемую в карбюраторах, в газовых двигателях рабочая смесь «газ — воздух» поступает из газогенераторной установки), при этом $p_0 = const$ и объем увеличивается от V_2 до V_1 (ветвь AB). При втором ходе поршня горючее адиабатически сжимается от V_1 до V_2, при этом температура повышается от T_0 до T_1 и давление — от p_0 до p_1 (ветвь BC). Далее происходит зажигание (взрыв) горючего от искры; при этом давление возрастает от p_1 до p_2 при $V_2 = const$ и температура возрастает от T_1 до T_2 (ветвь CD). Третий ход поршня — адиабатическое расширение горючего от V_2 до V_1, температура падает до T_3 (ветвь DE — рабочий ход). При крайнем положении поршня (точка E) открывается выпускной клапан, давление падает при $V_1 = const$ до p_0 (ветвь EB). Четвертый ход поршня — изобарическое сжатие (ветвь BA — выталкивание отработанного газа). Найти к. п. д. η цикла, если степень сжатия $V_1/V_2 = 5$ и показатель адиабаты $\gamma = 1{,}33$.

Решение:



К. п. д. цикла $\eta = \dfrac{A}{Q}$, где A — полная работа за весь цикл и Q — количество теплоты, выделяющееся при сгорании горючего. Т. к. $A_{AB} = -A_{BA}$ и $A_{CD} = A_{EB} = 0$, то $A = A_{BC} - A_{DE} =$ $= \dfrac{m}{\mu}\dfrac{R(T_0 - T_3)}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]$ — (1). Но величина $\frac{R}{(\gamma-1)}=C_V$ и $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}=\frac{T_1}{T_0}=\frac{T_2}{T_3}$; поэтому (1) можно записать как $A=\frac{m}{\mu}C_V(T_0-T_3)\left(1-\frac{T_2}{T_3}\right)$. Т. к. $Q=\frac{m}{\mu}C_V(T_2-T_1)$, то $\eta=\frac{A}{Q}=\frac{(T_0-T_3)\left(1-\frac{T_2}{T_3}\right)}{T_2-T_1}=\frac{T_2-T_3}{T_2}$;

$$\eta=1-\frac{T_3}{T_2}=1-\frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}=0{,}412=41{,}2\%.$$

5.209. В цилиндрах карбюраторного двигателя внутреннего сгорания газ сжимается политропически до $V_2=V_1/6$. Начальное давлеиие $p_1=90$ кПа, начальная температура $t_1=127°$ С. Найти давление p_2 и температуру t_2 газа в цилиндрах после сжатия. Показатель политропы $n=1{,}3$.

Решение:

Уравнение политропического процесса $p_1V_1^n=p_2V_2^n$. По условию $V_2=\frac{V_1}{6}$, следовательно, $p_1V_1^n=p_2\left(\frac{V_1}{6}\right)^n$, откуда $p_2=p_1\cdot 6^n=934$ кПа. Из уравнения политропического процесса $T_1V_1^{n-1}=T_2V_2^{n-1}$ или $T_1V_1^{n-1}=T_2\left(\frac{V_1}{6}\right)^{n-1}$, откуда $T_2=T_1\cdot 6^{n-1}=684{,}7$ К.

5.210. В цилиндрах карбюраторного двигателя внутрениего сгорания газ сжимается политропически так, что после сжатия температура газа становится равной $t_2=427°$ С. Начальная температура $t_1 = 140°$ С газа. Степень сжатия $V_2 / V_1 = 5{,}8$. Найти показатель политропы n.

Решение:

Из уравнения политропического процесса (см. задачу 5.209): $T_2 = T_1 \cdot 5{,}8^{n-1}$ или $\frac{T_2}{T_1} = 5{,}8^{n-1}$. Прологарифмируем полученное выражение: $ln\frac{T_2}{T_1} = ln\,5{,}8^{n-1}$ или $ln\frac{T_2}{T_1} = (n-1) \times$ $\times\, ln\,5{,}8$, откуда $n = \frac{ln(T_2 / T_1)}{ln\,5{,}8} + 1$; $n = 1{,}3$.

5.211. Диаметр цилиндра карбюраторного двигателя внутреннего сгорания $D = 10$ см, ход поршня $h = 11$ см. Какой объем V должна иметь камера сжатия, если известно, что начальное давление газа $p_1 = 0{,}1$ МПа, начальная температура газа $t_1 = 127°$ С и давление в камере после сжатия $p_2 = 1$ МПа? Какова будет температура t_2 газа в камере после сжатия? Найти работу A, совершенную при сжатии. Показатель политропы $n = 1{,}3$.

Решение:

Изменение объема в результате сжатия $V_1 - V_2 = Sh$ — (1), где S — площадь сечения цилиндра. Согласно уравнению Пуассона $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$ — (2). Площадь сечения цилиндра $S = \pi \cdot D^2 / 4 = 7{,}85 \cdot 10^{-3}$ м^2. Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем $V_2 = \frac{Sh}{\sqrt[\gamma]{\frac{p_2}{p_1}} - 1}$; $V_2 = 176 \cdot 10^{-6}$ м^3. Уравнение Пуассона также можно записать в виде $\frac{T_1}{T_2} = (p_1 / p_2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, откуда $T_2 = 680$ К. Работа при сжатии $A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, где $V_1 = Sh + V_2 = 1{,}04 \cdot 10^{-3}$ м^3; $A = 243$ Дж.

5.212. Найти к. п. д. η карбюраторного двигателя внутреннего сгорания, если показатель политропы $n = 1{,}33$ и степень сжатия: а) $\frac{V_1}{V_2} = 4$; б) $\frac{V_1}{V_2} = 6$; в) $\frac{V_1}{V_2} = 8$.

Решение:

К. п. д карбюраторного двигателя внутреннего сгорания $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$. Из уравнения политропического процесса $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_2}\right)^{n-1}$, следовательно, $T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}$. Тогда к. п. д.

$$\eta = \frac{T_1(V_1/V_2)^{n-1} - T_1}{T_1(V_1/V_2)^{n-1}} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}.$$

а) Степень сжатия $\frac{V_1}{V_2} = 4$, тогда $\eta = 36{,}7\,\%$;

б) Степень сжатия $\frac{V_1}{V_2} = 6$, тогда $\eta = 44{,}6\,\%$;

в) Степень сжатия $\frac{V_1}{V_2} = 8$, тогда $\eta = 49{,}6\,\%$.

5.213. Карбюраторный двигатель мощностью $P = 735.5$ Вт потребляет за время $t = 1$ ч минимальную массу $m = 265$ г бензина. Найти потери бензина на трение, теплопроводность и пр. Степень сжатия $V_1/V_2 = 6{,}2$. Удельная теплота сгорания бензина $q = 46$ МДж. Показатель политропы $n = 1{,}2$.

Решение:

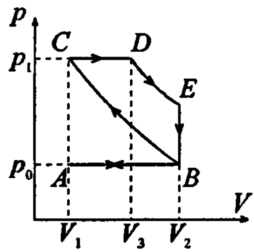
Фактический к. п. д. двигателя $\eta = \dfrac{Pt}{mq}$; $\eta = 0{,}22 = 22\%$.

Теоретический к. п. д. $\eta' = 1 - \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}$; $\eta' = 0{,}3 = 30\%$.

Тогда потери бензина составляют 8%.

5.214. Цикл четырехтактного двигателя Дизеля изображен на рисунке. Ветвь AB — в цилиндры засасывается воздух ($p_0 = 0{,}1$ МПа). Ветвь BC — воздух адиабатически сжимается до давления p_1. В конце такта сжатия в цилиндры впрыскивается топливо, которое воспламеняется в горячем воздухе и сгорает, при этом поршень движется вправо, сначала изобарически (ветвь CD), а затем адиабатически (ветвь DE). В конце адиабатического расширения открывается выпускной клапан, давление падает до p_0 (ветвь EB). При движении поршня влево смесь удаляется из цилиндров (ветвь BA). Найти к.п.д. η двигателя Дизеля.

Решение:



Полная работа цикла $A = Q_1 - Q_2$ — (1), где Q_1 — количество теплоты, выделившееся при сгорании топлива (участок CD), Q_2 — количество теплоты, отданное наружу (участок EB). Участок CD — изобара, следовательно, $Q_1 = \dfrac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1)$ — (2), где T_1 и T_2 — температура в начале и в конце расширения. Участок EB — изохора, следовательно, $Q_1 = \dfrac{m}{\mu} C_V (T_3 - T_0)$

— (3), где T_3 и T_0 — температура в начале и в конце процесса. Подставляя (2) и (3) в формулу (1), имеем $A = \frac{m}{\mu} C_V [\gamma(T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)]$ — (4), откуда $\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}$ — (5). Кроме того, температуры T_0, T_1 и T_3 можно выразить через T_2. Для изобары CD имеем $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_3}{V_1} = \beta$ — степень изобарического расширения, и, следовательно, $T_1 = T_2 / \beta$. Для адиабаты DE имеем $\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \delta^{\gamma-1}$, где δ — степень адиабатического расширения; следовательно, $T_3 = \frac{T_2}{\delta^{\gamma-1}}$. Для адиабаты BC имеем $\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1}$, где ε — степень адиабатического сжатия; следовательно, $T_0 = \frac{T_1}{\delta^{\gamma-1}} = \frac{T_2}{\beta\varepsilon^{\gamma-1}}$. Подставляя полученные значения T_0, T_1 и T_3 в (5) и учитывая, что $\beta = \frac{\varepsilon}{\delta}$, получим $\eta = 1 - \frac{\beta\gamma - 1}{\gamma\,\varepsilon^{\gamma-1}(\beta - 1)}$.

5.215. Двигатель внутреннего сгорания Дизеля имеет степень адиабатического сжатия $\varepsilon = 16$ и степень адиабатического расширения $\delta = 6{,}4$. Какую минимальную массу m нефти потребляет двигатель мощностью $P = 36{,}8$ кВт за время $t = 1$ ч? Показатель адиабаты $\gamma = 1{,}3$. Удельная теплота сгорания нефти $q = 46$ МДж/кг.

Решение:

К. п. д. двигателя $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Pt}{mq}$ — (1), откуда $m = \frac{Pt}{\eta q}$. С другой стороны, $\eta = 1 - \frac{\beta\gamma - 1}{\gamma \varepsilon^{\gamma-1}(\beta - 1)}$ — (2) (см. задачу 2.214). В условиях данной задачи $\beta = \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{16}{6,4} = 2,5$; $\gamma = 1,3$; $\beta\gamma = 3,29$; $\beta^{\gamma} - 1 = 2,29$; $\varepsilon^{\gamma-1} = 2,30$; $\beta - 1 = 1,5$. Подставляя эти данные в (2), получим $\eta = 0,49 = 49\%$. Тогда $m = 5,9$ кг.

5.216. Найти изменение ΔS энтропии при превращении массы $m = 10$ г льда ($t = -20°$ С) в пар ($t_n = 100°$ С).

Решение:

Изменение энтропии при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2 $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$, где, согласно первому началу термодинамики, $dQ = dU + dA = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV$. Т. к. из уравнения Менделеева — Клапейрона давление $p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$, то $dQ = \frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} dV$. При переходе из одного агрегатного состояния в другое, общее изменение энтропии складывается из изменений ее в отдельных процессах. При нагревании льда от T до T_0 (T_0 — температура плавления) $\Delta S_1 = \int_T^{T_0} \frac{mc_л dT}{T} = mc_л \ln\frac{T_0}{T}$, где $c_л = 2,1$ кДж/(кг·К) — удельная теплоемкость льда. При плавлении льда

$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_0} = \frac{m\lambda}{T_0}$, где $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг — удельная теплота плавления. При нагревании воды от T_0 до $T_п$ $\Delta S_3 = \int_{T_0}^{T_п} \frac{mc_в dT}{T} = mc_в \ln\frac{T_п}{T_0}$, где $c_в = 4{,}19$ кДж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды. При испарении воды при температуре $T_п$ $\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_п} = \frac{mr}{T_п}$, где $r = 2{,}26$ МДж/кг — удельная теплота парообразования. Общее изменение энтропии $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4$; $\Delta S = mc_л \ln\frac{T_0}{T} + \frac{m\lambda}{T_0} + mc_в \ln\frac{T_п}{T_0} + \frac{mr}{T_п}$; $\Delta S = 88$ Дж/К.

5.217. Найти изменение ΔS энтропии при превращении массы $m = 1$ г воды ($t = 0°$ С) в пар ($t_п = 100°$ С).

Решение:

Общее изменение энтропии ΔS складывается из изменения энтропии ΔS_1 при нагревании массы m воды от температуры T до температуры $T_п$ и изменения энтропии ΔS_2 при испарении массы m воды. $\Delta S_1 = mc \ln\frac{T_п}{T}$, где $c = 4{,}19$ кДж/кг·К — удельная теплоемкость воды. $\Delta S_2 = \frac{mr}{T_п}$, где $r = 2{,}26$ МДж/кг — удельная теплота парообразования. Тогда $\Delta S = m\left(c \ln\frac{T_п}{T} + \frac{r}{T_п}\right)$; $\Delta S = 7{,}4$ Дж/К.

5.218. Найти изменение ΔS энтропии при плавлении массы $m = 1$ кг льда ($t = 0°$ С).

Решение:

При, плавлении массы m льда при температуре T имеем $\Delta S = \frac{m\lambda}{T}$, где $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг — удельная теплота плавления. $\Delta S = 1209$ Дж/кг.

5.219. Массу $m = 640$ г расплавленного свинца при температуре плавления $t_{пл}$ вылили на лед ($t = 0°$ С). Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

Решение:

Предположим, что система «свинец — лед» замкнута, т.е. потерь тепла во внешнюю среду не происходит и весь образовавшийся пар сконденсировался и остался внутри системы в виде воды. Тогда изменение энтропии системы ΔS будет складываться из изменения энтропии свинца ΔS_1 при затвердевании, изменения энтропии свинца ΔS_2 при охлаждении до $t = 0°$ С и изменения энтропии льда при таянии ΔS_3. Т. е. $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$. Задачу рассматриваем при условии, что льда имеется достаточное количество для поддержания температуры $t = 0°$ С. Обозначим $T_1 = 600$ К — температура плавления свинца, $T_2 = 273$ К — температура льда. Имеем $dS_1 = dQ_1 / T$ или $\Delta S_1 = -\int_1^2 \frac{dQ_1}{T_1} = -\frac{m\lambda}{T_1}$, где $\lambda = 22{,}6$ кДж/кг — удельная теплота плавления (кристаллизации) свинца. $dS_2 = \frac{dQ_2}{T}$, откуда $\Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_c dT}{T} = mc_c \ln\frac{T_2}{T_1}$, где $c_c = 126$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость свинца. $dS_3 = \frac{dQ_3}{T}$ или $\Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_2}$. В соответствии с законом сохранения энергии $Q_3 = Q_1 + Q_2 = \lambda m + cm(T_1 - T_2)$, отсюда $\Delta S_3 = \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}$. Следовательно, полное изменение энтропии системы $\Delta S = -\frac{m\lambda}{T_1} + mc_c \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}$. Подставляя в полученную формулу числовые данные, окончательно получаем $\Delta S = -\frac{0{,}64 \cdot 22{,}6 \cdot 10^3}{600} + 0{,}64 \cdot 126 \cdot (-0{,}79) + \frac{22{,}6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}64 + 126 \cdot 0{,}64(600 - 273)}{273} = 62{,}2$ Дж/К.

5.220. Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы $m = 8$ г кислорода от объема $V_1 = 10$ л при температуре $t_1 = 80°$ С к объему $V_2 = 40$ л при температуре $t_2 = 300°$ С.

Решение:

Изменение энтропии при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2 $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$, где, согласно первому началу термодинамики, $dQ = dU + dA = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV$. Т. к. из уравнения Менделеева — Клапейрона давление $p = \frac{m}{\mu} \times$

$\times\dfrac{RT}{V}$, то $dQ=\dfrac{m}{\mu}C_V dT+\dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT}{V}dV$. Тогда $\Delta S=\int\limits_1^2\dfrac{m}{\mu}C_V dT+$ $+\int\limits_1^2\dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT}{V}dV$; $\Delta S=\dfrac{m}{\mu}C_V\ln\dfrac{T_2}{T_1}+\dfrac{m}{\mu}R\ln\dfrac{V_2}{V_1}=5{,}4$ Дж/кг.

5.221. Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы $m=6$ г водорода от объема $V_1=20$ л под давлением $p_1=150$ кПа к объему $V_2=60$ л под давлением $p_2=100$ кПа.

Решение:

Имеем $\Delta S=\dfrac{m}{\mu}C_V\ln\dfrac{T_2}{T_1}+\dfrac{m}{\mu}R\ln\dfrac{V_2}{V_1}$ (см. задачу 5.220). Т. к. из уравнения Менделеева — Клапейрона $\dfrac{T_2}{T_1}=\dfrac{p_2V_2}{p_1V_1}$, то $\Delta S=\dfrac{m}{\mu}C_V\ln\dfrac{p_2}{p_1}+\dfrac{m}{\mu}C_V\ln\dfrac{V_2}{V_1}+\dfrac{m}{\mu}R\ln\dfrac{V_2}{V_1}$; $\Delta S=\dfrac{m}{\mu}C_V\ln\dfrac{p_2}{p_1}+$ $+\dfrac{m}{\mu}C_p\ln\dfrac{V_2}{V_1}$; $\Delta S=71$ Дж/К.

5.222. Масса $m=6{,}6$ г водорода расширяется изобарически от объема V_1 до объема $V_2=2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом расширении.

Решение:

В предыдущей задаче мы выразили изменение энтропии через параметры p и V: $\Delta S=\dfrac{m}{\mu}C_V\ln\dfrac{p_2}{p_1}+\dfrac{m}{\mu}C_p\ln\dfrac{V_2}{V_1}$.

При $p=const$ первое слагаемое обращается в ноль, тогда $\Delta S=\dfrac{m}{\mu}C_p\ln\dfrac{V_2}{V_1}=66{,}3$ Дж/К.

5.223. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении массы $m = 8$ г гелия от объема $V_1 = 10$ л до объема $V_2 = 25$ л.

Решение:

Изменение энтропии $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$, где $dQ = c_p m dT$, т. к. $p = const$. Теплоемкcсть при постоянном давлении $C_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$, тогда $\Delta S = \int_1^2 c_p m \frac{dT}{T} = \frac{i+2}{2}\frac{m}{\mu} R \ln T\Big|_1^2 = \frac{i+2}{2}\frac{m}{\mu} R \ln \frac{T_2}{T_1}$. Т. к. гелий — одноатомный газ, то число степеней свободы $i = 3$, и т. к. $p = const$, то $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ или $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$, следовательно, $\Delta S = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$; $\Delta S = 38{,}1$ Дж/К.

5.224. Найти изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении массы $m = 6$ г водорода от давления $p_1 = 100$ кПа до давлеиия $p_2 = 50$ кПа.

Решение:

Имеем $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$ (см. задачу 5.220). Т. к. при изотермическом процессе $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$, а $\ln \frac{T_2}{T_1} = 0$, то изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении:
$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{p_1}{p_2} = 17{,}3$ Дж/К.

5.225. Масса $m = 10{,}5$ г азота изотермически расширяется от объема $V_1 = 2$ л до объема $V_2 = 5$ л. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

Решение:

Изменение энтропии $\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{dQ}{T}$, где $dQ = pdV$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ давление $p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$, тогда $dQ = \frac{m}{\mu}RT\frac{dV}{V}$, а изменение энтропии $\Delta S = \frac{m}{\mu}R\int\limits_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}R\ln\frac{V_2}{V_1}$; $\Delta S = 2{,}85$ Дж/К.

5.226. Масса $m = 10$ г кислорода нагревается от температуры $t_1 = 50°$ С до температуры $t_2 = 150°$ С. Найти изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

Решение:

а) При изохорическом нагревании $dQ = c_v m dT$, тогда изменение энтропии $\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{dQ}{T} = c_v m \int\limits_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$. Т. к. кислород — двухатомный газ, то число степеней свободы $i = 5$ и изменение энтропии $\Delta S = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$; $\Delta S = 1{,}75$ Дж/К. б) При изобарическом расширении (см. задачу 5.223), изменение энтропии $\Delta S = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$; $\Delta S = 2{,}45$ Дж/К.

5.227. При нагревании количества $\nu = 1$ кмоль двухатомного газа его термодинамическая температура увеличивается от T_1 до $T_2 = 1{,}5T_1$. Найти изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

Решение:

Т. к. по условию газ двухатомный, то число степеней свободы $i = 5$. а) При изохорическом нагревании (см. задачу 5.226) изменение энтропии $\Delta S = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{2}\nu R\ln\frac{T_2}{T_1}$; $\Delta S = 8{,}5$ кДж/К. б) При изобарическом нагревании изменение энтропии $\Delta S = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{7}{2}\nu R\ln\frac{T_2}{T_1}$; $\Delta S = 11{,}8$ кДж/К.

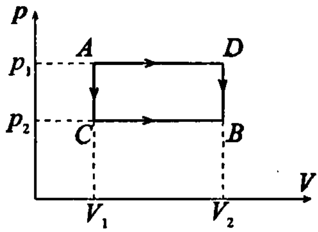
5.228. В результате нагревания массы $m = 22$ г азота его термодинамическая температура увеличилась от T_1 до $T_2 = 1{,}2T_1$, а энтропия увеличилась на $\Delta S = 4{,}19$ Дж/К. При каких условиях производилось нагревание азота (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

Решение:

Изменение энтропии (см. задачу 5.226) $\Delta S = \frac{x}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$, причем если $x = 7$, то $p = const$, а если $x = 5$, то $V = const$. Тогда $x = \frac{2\mu\Delta S}{mR\ln(T_2/T_1)}$; $x = 7$, значит, нагревание производилось при постоянном давлении.

5.229. Найти изменение ΔS энтропии при переходе газа из состояния A в состояние B в условиях задачи 5.194, если переход совершается: а) по участку ACB; б) по участку ADB.

Решение:



а) По участку ACB, изменение энтропии $\Delta S = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB}$, где при $V_1 = const$ (см. задачу 5.226) $\Delta S_{AC} = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$, а при давлении $p_2 = const$ $\Delta S_{CB} = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R \times \times \ln\frac{T_2}{T_1}$. Тогда на всем участке ACB $\Delta S = 7\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ имеем $\frac{m}{\mu}R = \frac{p_1V_1}{T_1}$, следовательно, $\Delta S = \frac{7p_1V_1}{T_1}\ln\frac{T_2}{T_1}$. Учитывая, что $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$ или $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2V_2}{p_1V_1}$, окончательно находим $\Delta S = \frac{7p_1V_1}{T_1}\ln\frac{p_2V_2}{p_1V_1}$; $\Delta S = 5{,}4$ Дж/К. б) По участку ADB, изменение энтропии $\Delta S = \Delta S_{AD} + \Delta S_{DB}$, где $\Delta S_{AD} = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$ и $S_{DB} = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$, отсюда, $\Delta S = 7\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{7p_1V_1}{T_1}\ln\frac{T_2}{T_1}$ или $\Delta S = \frac{7p_1V_1}{T_1}\ln\frac{p_2V_2}{p_1V_1}$; $\Delta S = 5{,}4$ Дж/К. Таким образом, изменение энтропии ΔS не зависит от того, каким образом осуществляется переход газа из одного состояния в другое.

5.230. Объем $V_1 = 1\,м^3$ воздуха, находящегося при температуре $t_1 = 0°\,C$ и давлении $p_1 = 98$ кПа, изотермически расширяется от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

Решение:

При изотермическом расширении изменение энтропии (см. задачу 5.225) $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_1V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ имеем $\frac{m}{\mu}R = \frac{p_1V_1}{T_1}$, тогда изменение энтропии $\Delta S = \frac{p_1V_1}{T_1} \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1V_1}{T_1} \ln\frac{2V_1}{V_1} = 500$ Дж/К.

5.231. Изменение энтропии на участке между двумя адиабатами в цикле Карно $\Delta S = 4{,}19$ кДж/К. Разность температур между двумя изотермами $\Delta T = 100$ К. Какое количество теплоты Q превращается в работу в этом цикле?

Решение:

Изменение энтропии $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T_1}$, откуда $T_1 = \frac{Q}{\Delta S}$ — температура нагревателя. К. п. д. цикла Карно $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T \Delta S}{Q}$. С другой стороны, $\eta = \frac{A}{Q}$, тогда $\frac{\Delta T \Delta S}{Q} = \frac{A}{Q}$, откуда $A = \Delta S \Delta T$; $A = 419$ кДж.

§ 6. Реальные газы

При решении задач этого раздела используются данные таблиц 3,6,7,8,10 из приложения, кроме того, следует учесть указание к § 5. В задаче 6.8 дан авторский вариант решения.

6.1. В каких единицах системы СИ выражаются постоянные a и b, входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса?

Решение:

Постоянные a и b из уравнения Ван-дер-Ваальса выражаются соотношениями $a = \frac{27T_к^2R^2}{64p_к}$; $b = \frac{T_кR}{8p_к}$. Подставив единицы измерения величин, входящих в данные уравнения, получим $[a] = \left[\frac{Па \cdot м^3}{моль^2}\right]$; $[b] = \left[\frac{м^3}{моль}\right]$.

6.2. Пользуясь данными о критических величинах $T_к$ и $p_к$ для некоторых газов (смотри таблицу), найти для них постоянные a и b, входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Решение:

Постоянные a и b из уравнения Ван-дер-Ваальса выражаются соотношениями $a = \frac{27T_к^2R^2}{64p_к}$; $b = \frac{T_кR}{8p_к}$. Воспользовавшись данными о критических величинах $T_к$ и $p_к$ из таблицы 7, составим следующую таблицу:

Вещество	a, Па·м^6/моль^2	b, 10^{-5} м^3/моль
Водяной пар	0,556	3,06
Углекислый газ	0,364	4,26
Кислород	0,136	3,16
Аргон	0,136	3,22
Азот	0,136	3,85
Водород	0,0244	2,63
Гелий	0,00343	2,34

6.3. Какую температуру T имеет масса $m = 2$ г азота, занимающего объем $V = 820\,см^3$ при давлении $p = 0{,}2$ МПа? Газ рассматривать как: а) идеальный; б) реальный.

Решение:

а) Идеальные газы подчиняются уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $T = \frac{\mu pV}{mR} = 280$ К.

б) Реальные газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса $\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT$, следовательно, температура $T = \frac{\mu}{mR}\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = 280$ К. Таким образом, при данном давлении газ ведет себя как идеальный.

6.4. Какую температуру T имеет масса $m = 3{,}5$ г кислорода, занимающего объем $V = 90\,см^3$ при давлении $p = 2{,}8$ МПа? Газ рассматривать как: а) идеальный; б) реальный.

Решение:

Если рассматривать кислород в данных условиях как идеальный газ, то его состояние описывается уравнением Менделеева — Клапейрона: $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $T = \frac{\mu pV}{mR}$,
$T = \frac{0.032 \cdot 2{,}8 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^{-6}}{3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} = 277$ К. Если рассматривать газ как реальный, то его состояние описывается уравнением Ван-дер-Ваальса: $\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT$. Воспользовавшись полученными в задаче 6.2 константами a и b, выразим из последнего уравнения температуру $T = \frac{\mu\left(p + \left(m^2/\mu^2\right)\left(a/V^2\right)\right)\left(V - bm/\mu\right)}{mR}$. Подставляя в полу-

ченное выражение числовые данные, найдем

$$T = \frac{0{,}032\left(2{,}8\cdot 10^6 + \frac{3{,}5^2\cdot 10^{-6}}{0{,}032^2}\frac{0{,}136}{90^2\cdot 10^{-12}}\right)}{3{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31}\times$$

$$\times\frac{\left(90\cdot 10^{-6} - \frac{3{,}5\cdot 10^{-3}}{0{,}032}3{,}16\cdot 10^{-5}\right)}{3{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31} = 285{,}7\text{ К}.$$

6.5. Масса $m = 10$ г гелия занимает объем $V = 100$ см^3 при давлении $p = 100$ МПа. Найти температуру T газа, считая его: а) идеальным; б) реальным.

Решение:

Идеальный газ подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона: $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $T = \frac{\mu pV}{mR}$; $T = 482$ К.

Состояние реального газа описывается уравнением Ван-дер-Ваальса, откуда выразим температуру $T = \frac{\mu\left(p + \left(m^2/\mu^2\right)\left(a/V^2\right)\right)\left(V - bm/\mu\right)}{mR}$ (см. задачу 6.4).

Значения постоянных a и b были получены в задаче 6.2. Подставив числовые данные, найдем $T = 204$ К.

6.6. Количество $\nu = 1$ кмоль углекислого газа находится при температуре $t = 100°$ С. Найти давление p газа, считая его: а) реальным; б) идеальным. Задачу решить для объемов $V_1 = 1$ м^3 и $V_2 = 0{,}05$ м^3.

Решение:

а) Для реального газа, согласно уравнению Ван-дер-Ваальса, $\left(p + \nu^2\frac{a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$, откуда $p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2\frac{a}{V^2}$. В таблице из задачи 6.2 найдем для углекислого газа:

$a = 0{,}364$ Па·м^6/моль^2 ; $b = 4{,}26 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Подставив числовые данные, получим $p_1 = 2{,}87$ МПа ; $p_2 = 277$ МПа.
б) Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$, откуда $p = \frac{\nu RT}{V}$. Подставив числовые данные, получим $p_1 = 3{,}09$ МПа ; $p_2 = 61{,}8$ МПа.

6.7. В закрытом сосуде объемом $V = 0{,}5$ м^3 находится количество $\nu = 0{,}6$ кмоль углекислого газа при давлении $p = 3$ МПа. Пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса, найти, во сколько раз надо увеличить температуру газа, чтобы давление увеличилось вдвое.

Решение:

Из уравнения Ван-дер-Ваальса $T_1 = \frac{\mu}{mR}\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right) \times \left(V - \frac{m}{\mu}b\right)$; $T_2 = \frac{\mu}{mR}\left(2p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right)$ (см. задачу 6.3). Тогда $\frac{T_2}{T_1} = \frac{2p + p_i}{p + p_i}$, где $p_i = \frac{\nu^2 a}{V^2}$; $\frac{T_2}{T_1} = 1{,}85$.

6.8. Количество $\nu = 1$ кмоль кислорода находится при температуре $t = 27°$ С и давлении $p = 10$ МПа. Найти объем V газа, считая, что кислород при данных условиях ведет себя как реальный газ.

Решение:
Чтобы найти объем из уравнения Ван-дер-Ваальса, необходимо решить уравнение третьей степени. В результате мы получили бы три корня, один из которых соответствует газообразному состоянию вещества. Его можно найти более простым методом последовательных приближений. Из уравнения Ван-дер-Ваальса для некоторого количества ν

кислорода имеем $V=\dfrac{\nu RT}{p+\nu^2a/V^2}+\nu b=\dfrac{\nu RT}{p+p_i}+\nu b$ — (1). В качестве первого приближения возьмем объем, получаемый из уравнения Менделеева — Клапейрона $V_1=\dfrac{\nu RT}{p}=0{,}24\,\text{м}^3$. Тогда $p_i=\dfrac{\nu^2a}{V_1^2}=2{,}4\,\text{МПа}$. Подставляя p_i в (1), получим второе приближение $V_2=0{,}232\,\text{м}^3$. Тогда $p_i=\dfrac{\nu^2a}{V_2^2}=2{,}53\,\text{МПа}$, откуда третье приближение $V_3=0{,}231\,\text{м}^3$. Далее $p_i=\dfrac{\nu^2a}{V_3^2}=2{,}55\,\text{МПа}$; $V_4=0{,}231\,\text{м}^3$. Таким образом, искомый объем $V=231$ л.

6.9. Количество $\nu=1$ кмоль азота находится при температуре $t=27°\,\text{C}$ и давлении $p=5\,\text{МПа}$. Найти объем V газа, считая, что азот при данных условиях ведет себя как реальный газ.

Решение:
Решая задачу аналогично задаче 6.8, найдем $V=490$ л.

6.10. Найти эффективный диаметр σ молекулы кислорода, считая известными для кислорода критические значения $T_\text{к}$ и $p_\text{к}$.

Решение:
Поскольку $b\approx 4V$, где V — объем всех молекул, $V=V_0N_\text{A}$, где V_0 — объем одной молекулы, и, кроме того, $b=\dfrac{T_\text{к}R}{8p_\text{к}}$, то $4V_0N_\text{A}=\dfrac{T_\text{к}R}{8p_\text{к}}$. Отсюда $V_0=\dfrac{RT_\text{к}}{32N_\text{A}p_\text{к}}=$ $=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{1}{6}\pi\sigma^3$. Отсюда $\sigma=\sqrt[3]{\dfrac{3RT_\text{к}}{16\pi N_\text{A}p_\text{к}}}$; $\sigma=294\cdot10^{-12}$ м.

6.11. Найти эффективный диаметр σ молекулы азота двумя способами: а) по данному значению средней длины свободного пробега молекул при нормальных условиях $\overline{\lambda} = 95$ нм; б) по известному значению постоянной b в уравнении Ван-дер-Ваальса.

Решение:

а) Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\lambda = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$, следовательно, $\sigma^2 = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi p\lambda}$. Тогда $\sigma = \sqrt{\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi p\lambda}}$; $\sigma = 298 \cdot 10^{-12}$ м. б) Постоянная Ван-дер-Ваальса b, вычисленная по формуле $b = \dfrac{2}{3} N_A \pi\sigma^3$, откуда $\sigma^3 = \dfrac{3b}{2\pi N_A}$. Тогда $\sigma = \sqrt[3]{\dfrac{3b}{2\pi N_A}}$; $\sigma = 313 \cdot 10^{-12}$ м.

6.12. Найти среднюю длину свободного пробега $\overline{\lambda}$ молекул углекислого газа при нормальных условиях. Эффективный диаметр σ молекулы вычислить, считая известными для углекислого газа критические значения $T_к$ и $p_к$.

Решение:

Критическое давление и критическая температура соответственно равны: $p_к = \dfrac{a}{27b^2}$ — (1) и $T_к = \dfrac{8a}{27bR}$ — (2). Из (1) $a = 27b^2 p_к$, подставим в (2) $T_к = \dfrac{8 \cdot 27b^2 p_к}{27bR} = \dfrac{8bp_к}{R}$. Тогда постоянная Ван-дер-Ваальса $b = \dfrac{T_к R}{8p_к}$. Эффективный диаметр молекулы (см. задачу 6.11(б)) $\sigma = \sqrt[3]{\dfrac{3b}{2\pi N_A}} = \sqrt[3]{\dfrac{3T_к R}{16\pi p_к N_A}} = \sqrt[3]{\dfrac{3T_к k}{16\pi p_к}}$. Тогда средняя длина

свободного пробега молекул газа $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} =$
$= \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p\left(3T_\text{к}k/(16\pi p_\text{к})\right)^{\frac{2}{3}}}$; $\lambda = 80$ нм.

6.13. Найти коэффициент диффузии D гелия при температуре $t = 17°$ С и давлении $p = 150$ КПа. Эффективный диаметр атома σ вычислить, считая известными для гелия критические значения $T_\text{к}$ и $p_\text{к}$.

Решение:
Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 6.12) $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p\left(3T_\text{к}k/(16\pi p_\text{к})\right)^{\frac{2}{3}}}$. Коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda$, где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул гелия. Тогда коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p\left(3T_\text{к}k/(16\pi p_\text{к})\right)^{\frac{3}{2}}}$; $D \approx 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

6.14. Построить изотермы $p = f(V)$ для количества $\nu = 1$ кмоль углекислого газа при температуре $t = 0°$ С. Газ рассматривать как: а) идеальный; б) реальный. Значения V (в л/моль) для реального газа взять следующие: 0,07, 0,08, 0,10, 0,12, 0,14, 0,16, 0,18, 0,20, 0,25, 0,30, 0,35 и 0,40; для идеального газа — в интервале $0{,}2 \le V \le 0{,}4$ л/моль.

Решение:
а) Для идеального газа, исходя из уравнения Менделеева — Клапейрона, имеем $pV = \nu RT$, отсюда $p = \frac{\nu RT}{V}$.
б) Для реального газа из уравнения Ван-дер-Ваальса

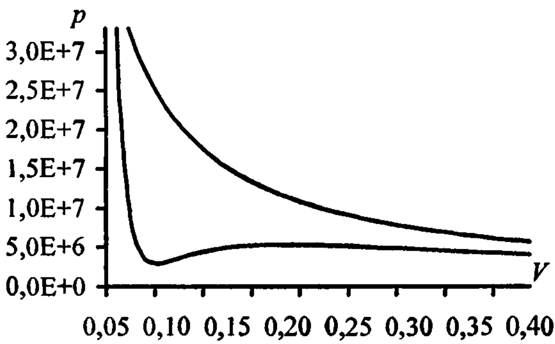
$\left(p+\nu^2\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)=\nu RT$ имеем $p+\nu^2\frac{a}{V^2}=\frac{\nu RT}{V-\nu b}$ или $p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\nu^2\frac{a}{V^2}$. Зависимость $p(V)$ дана в таблицах и на графике, где верхняя изотерма соответствует идеальному газу, нижняя — реальному.

Для реального газа:

V, л/моль	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$P, 10^4$ Па	85,1	37,8	29,2	31,2	40,3	47,2	51,1	52,8	53,1	51,1	47,7	44,1	40,7

Для идеального газа:

V, л/моль	0,20	0,22	0,23	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32	0,33	0,35	0,37	0,38	0,4
$P, 10^4$ Па	85,1	37,8	29,2	31,2	40,3	47,2	51,1	52,8	53,1	51,1	47,7	44,1	40,7



6.15. Найти давление p_i, обусловленное силами взаимодействия молекул, заключенных в количестве $\nu = 1$ кмоль газа при нормальных условиях. Критическая температура и критическое давление этого газа равны $T_к = 417$ К и $p_к = 7{,}7$ МПа.

Решение:

Давление, обусловленное силами взаимодействия молекул $p_i = \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2} = \nu^2\frac{a}{V^2}$, где $a = \frac{27T_к^2R^2}{64p_к}$ — постоянная Ван-дер-Ваальса. Тогда $p_i = \frac{27\nu^2T_к^2R^2}{64p_кV^2}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$ выразим объем $V = \frac{\nu RT}{p}$, тогда $V^2 = \frac{\nu^2R^2T^2}{p^2}$, следовательно, окончательно $p_i = \frac{27\nu^2T_к^2R^2p^2}{64p_к\nu^2R^2T^2} = \frac{27T_к^2p^2}{64p_кT^2}$; $p_i = 1{,}31$ кПа.

6.16. Для водорода силы взаимодействия между молекулами незначительны; преимущественную роль играют собственные размеры молекул. Написать уравнение состояния такого полуидеального газа. Какую ошибку мы допустим при нахождении количества водорода ν, находящегося в некотором объеме при температуре $t = 0°$ С и давлении $p = 280$ МПа, не учитывая собственного объема молекул?

Решение:

Поскольку силы взаимодействия между молекулами водорода незначительны, то в уравнении Ван-дер-Ваальса можно не учитывать параметр p_i. Уравнение такого газа будет иметь вид $p\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT$ — (1). Количество ν водорода без учета собственного объема молекул можно найти из уравнения Менделеева — Клапейрона: $\nu = \frac{pV}{RT}$ — (2). С учетом собственного объема молекул из уравнения (1) имеем $\nu' = \dfrac{pV}{RT + pb}$ — (3). Допускаемая ошибка $\delta = \dfrac{\nu - \nu'}{\nu'}$. Подставляя в последнее уравнение (2) и (3), получим $\delta = \dfrac{pb}{RT}$; $\delta = 0{,}33 = 33\%$.

6.17. В сосуде объемом $V = 10$ л находится масса $m = 0{,}25$ кг азота при температуре $t = 27°$ С. Какую часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? Какую часть объема сосуда составляет собственный объем молекул?

Решение:

Давление, обусловленное силами взаимодействия молекул $p_i = \dfrac{m^2}{\mu^2}\dfrac{a}{V^2}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ имеем $p = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT}{V}$, тогда $\dfrac{p_i}{p} = \dfrac{m^2}{\mu^2}\dfrac{a}{V^2}\dfrac{\mu}{m}\dfrac{V}{RT} = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{a}{VRT}$; $\dfrac{p_i}{p} = 4{,}9\%$. Собственный объем молекул найдем, воспользовавшись постоянной b Ван-дер-Ваальса, равной учетверенному объему молекул, содержащихся в одном моле реального газа. В уравнении Ван-дер-Ваальса $\left(p + \dfrac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$ поправка νb означает учетверенный объем молекул всего газа, т.е. $\nu b = 4V_i$. Отсюда $V_i = \dfrac{\nu b}{4}$ или $V_i = \dfrac{m}{4\mu}b$, тогда $\dfrac{V_i}{V} = \dfrac{mb}{4\mu V}$;

$\dfrac{V_i}{V} = \dfrac{0{,}25 \cdot 3{,}85 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 0{,}028 \cdot 10^{-2}} = 0{,}85\%$.

6.18. Количество $\nu = 0{,}5$ кмоль некоторого газа занимает объем $V_1 = 1\,\text{м}^3$. При расширении газа до объема $V_2 = 1{,}2\,\text{м}^3$ была совершена работа против сил взаимодействия молекул $A = 5{,}684$ кДж. Найти постоянную a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Решение:

Работа, совершенная против сил взаимодействия молекул, $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p_i dV$, где $p_i = \frac{m^2 a}{\mu^2 V^2}$. Таким образом,

$$A = \frac{m^2 a}{\mu^2}\int\limits_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^2} = \frac{m^2 a}{\mu^2}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = \frac{m^2 a(V_2 - V_1)}{\mu^2 V_1 V_2},$$ откуда выразим $a = \frac{A\mu^2 V_1 V_2}{m(V_2 - V_1)} = \frac{A V_1 V_2}{\nu^2 (V_2 - V_1)} = 0{,}136\,\text{Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2$.

6.19. Масса $m = 20$ кг азота адиабатически расширяется в вакуум от объема $V_1 = 1\,\text{м}^3$ до объема $V_2 = 1\,\text{м}^3$. Найти понижение температуры ΔT при этом расширении, считая известной для азота постоянную a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса (смотри ответ 6.2).

Решение:

Работа газа при адиабатическом расширении $A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \times$ $\times \frac{m}{\mu}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\frac{T_1 - T_2}{T_1}$; $A = \frac{R}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}(T_1 - T_2) = \frac{R}{\gamma - 1} \times$ $\times \frac{m}{\mu}\Delta T$, где $\gamma = \frac{i+2}{i}$ — показатель адиабаты, тогда $\gamma - 1 =$ $= \frac{i+2}{i} - \frac{i}{i} = \frac{2}{i}$. Следовательно, работа $A = \frac{iR}{2}\frac{m}{\mu}\Delta T$ — (1).

С другой стороны, работа, совершенная против сил взаимодействия молекул, $A = \int_{V_1}^{V_2} p_i dV$, где $p_i = \frac{m^2 a}{\mu^2 V^2}$, значит,

$A = \frac{m^2 a}{\mu^2} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \frac{m^2 a}{\mu^2} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = \frac{m^2 a (V_2 - V_1)}{\mu^2 V_1 V_2}$ — (2). Т. к. в (1) и (2) левые части равны, то можно приравнять и правые части, тогда $\frac{iR}{2} \frac{m}{\mu} \Delta T = \frac{m^2 a (V_2 - V_1)}{\mu^2 V_1 V_2}$, откуда $\Delta T = \frac{2ma(V_2 - V_1)}{iR\mu V_1 V_2}$; $\Delta T = 2{,}33\ \text{К}$.

6.20. Количества $\nu = 0{,}5$ кмоль трехатомного газа адиабатически расширяется в вакуум от объема $V_1 = 0{,}5\ \text{м}^3$ до объема $V_2 = 3\ \text{м}^3$. Температура газа при этом понижается на $\Delta T = 12{,}2\ \text{К}$. Найти постоянную a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Решение:

Понижение температуры при расширении (см. задачу 6.19) $\Delta T = \frac{2ma(V_2 - V_1)}{iR\mu V_1 V_2} = \frac{2\nu a(V_2 - V_1)}{iRV_1 V_2}$. Т. к. газ трехатомный, то число степеней свободы $i = 6$. Следовательно, постоянная Ван-дер-Ваальса $a = \frac{\Delta T iRV_1 V_2}{2\nu(V_2 - V_1)}$; $a = 0{,}364\ \text{Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$.

6.21. Какое давление p надо приложить, чтобы углекислый газ превратить в жидкую углекислоту при температурах $t_1 = 31°\ \text{С}$ и $t_2 = 50°\ \text{С}$? Какой наибольший объем V_{max} может занимать масса $m = 1$ кг жидкой углекислоты? Каково наибольшее давление p_{max} насыщенного пара жидкой углекислоты?

Решение:

Температура $t_1 = 31°\,C$ — критическая температура углекислого газа, тогда необходимое давление $p = p_к = 7{,}38$ МПа. Поскольку температура t_2 больше критической температуры, то ни при каком давлении нельзя превратить углекислый газ в жидкую кислоту. Наибольший объем $V_{max} = \dfrac{3b}{\mu} = 2{,}9$ л; наибольшее давление $p_{max} = p_к = 7{,}38$ МПа.

6.22. Найти плотность $\rho_к$ водяного пара в критическом состоянии, считая известной для него постоянную b, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса (смотри ответ 6.2).

Решение:

Критический молярный объем водяного пара $V_{0к} = 3b$. Тогда критическая плотность $\rho_к = \dfrac{\mu}{V_{0к}} = \dfrac{\mu}{3b}$; $\rho_к = 196$ кг/м^3.

6.23. Найти плотность $\rho_к$ гелия в критическом состоянии, считая известными для гелия критические значения $T_к$ и $p_к$.

Решение:

Критическая плотность реального газа (см. задачу 6.22) $\rho_к = \dfrac{\mu}{3b}$. Постоянная Ван-дер-Ваальса $b = \dfrac{T_к R}{8p_к}$, тогда $\rho_к = \dfrac{8p_к\mu}{3T_к R}$; $\rho_к = 56{,}77$ кг/м^3.

6.24. Количество $\nu = 1$ кмоль кислорода занимает объем $V = 56$ л при давлении $p = 93$ МПа. Найти температуру t газа, пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса.

Решение:

Если ввести приведенные величины $\pi = \frac{p}{p_к}$; $\tau = \frac{T}{T_к}$; $\omega = \frac{V_0}{V_{0к}}$, то приведенное уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля имеет вид $\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau$, откуда $\tau = \frac{1}{8}\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1)$. Найдем приведенные величины: приведенный молярный объем $\omega = \frac{V_0}{V_{0к}}$, где $V_0 = \frac{V}{\nu}$; $V_0 = 0{,}56 \cdot 10^{-4}$ м^3/моль и $V_{0к} = 3b = \frac{3T_к R}{8p_к}$; $V_{0к} = 9{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль, тогда $\omega = 0{,}59$; приведенное давление $\pi = \frac{p}{p_к} = 18{,}4$. Тогда $\tau = 2{,}6$ и, следовательно, $T = \tau T_к = 400$ К.

6.25. Количество $\nu = 1$ кмоль гелия занимает объем $V = 0{,}237$ м^3 при температуре $t = -200°$ С. Найти давление p газа, пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенных величинах.

Решение:

Если ввести приведенные величины $\pi = \frac{p}{p_к}$; $\tau = \frac{T}{T_к}$; $\omega = \frac{V_0}{V_{0к}}$, то приведенное уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля имеет вид $\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau$, откуда

$\pi + \frac{3}{\omega^2} = \frac{8\tau}{3\omega - 1}$ или $\pi = \frac{8\tau}{3\omega - 1} - \frac{3}{\omega^2}$. Найдем приведенные величины: приведенная температура $\tau = \frac{T}{T_к}$; $\tau = 14{,}03$; приведенный молярный объем $\omega = \frac{V_0}{V_{0к}}$, где $V_0 = \frac{V}{\nu}$; $V_0 = 2{,}37 \cdot 10^{-4}$ м^3/моль и $V_{0к} = 3b = \frac{3T_к R}{8p_к}$; $V_{0к} = 7{,}05 \times$ $\times 10^{-5}$ м^3/моль, тогда $\omega = 3{,}36$. Следовательно, приведенное давление $\pi = 12{,}09$. Окончательно давление газа $p = \pi p_к$; $p = 2{,}78$ МПа.

6.26. Во сколько раз давление газа больше его критического давления, если известно, что его объем и температура вдвое больше критических значений этих величин?

Решение:

По условию $\tau = 2$, $\omega = 2$. Исходя из приведенного уравнения Ван-дер-Ваальса для одного моля, приведенное давление (см. задачу 6.25) $\pi = \frac{8\tau}{3\omega - 1} - \frac{3}{\omega^2}$; $\pi = 2{,}45$.

§ 7. Насыщенные пары и жидкости

При решении задач этого раздела используются данные таблиц 3,6,7,8,10 из приложения, кроме того, следует учесть указание к § 5.

7.1. В таблице 8 дано давление водяного пара, насыщающего пространство при разных температурах. Как составить из этих данных таблицу m масс водяного пара в объеме $V = 1\,\text{м}^3$ воздуха, насыщенного водяным паром при разных температурах? Для примера решить задачу при температуре $t = 50°\,\text{C}$.

Решение:

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $m = \dfrac{pV\mu}{RT}$ — (1). При $T = 323\,\text{К}$ давление насыщенного пара $p_н = 12{,}3\,\text{кПа}$. Молярная масса водяного пара $\mu = 0{,}018\,\text{кг/моль}$, тогда из (1) получим $m = 82\,\text{г}$.

7.2. Найти плотность $\rho_н$ насыщенного водяного пара при температуре $t = 50°\,\text{C}$.

Решение:

По таблице 8 находим давление водяного пара, насыщающего пространство при температуре $t = 50°\,\text{C}$. Оно равно $p_н = 12{,}302\,\text{кПа}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ выразим плотность $\rho_н = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p_н\mu}{RT}$. Подставляя в полученное выражение числовые данные, найдем: $\rho_н = \dfrac{12{,}302 \cdot 10^3 \cdot 0{,}018}{8{,}31 \cdot 323} = 0{,}082\,\text{кг/м}^3$.

7.3. Во сколько раз плотность $\rho_н$ насыщенного водяного пара при температуре $t = 16°$ С меньше плотности ρ воды.

Решение:

Плотность насыщенного пара (см. задачу 7.2) $\rho_н = \frac{p_н \mu}{RT}$, где $p_н = 1{,}809$ кПа, тогда $\rho = 0{,}014$ кг/м^3 и отношение плотностей $\frac{\rho_к}{\rho_н} = 73754$.

7.4. Во сколько разных плотность $\rho_{н1}$ насыщенного водяного пара при температуре $t_1 = 200°$ С больше плотности $\rho_{н2}$ насыщенного водяного пара при температуре $t_1 = 100°$ С?

Решение:

Давления насыщенного пара при температуре t_1 и t_2 соответственно равны $p_{н1} = 1549890$ Па и $p_{н2} = 101080$ Па. Плотность насыщенного пара (см. задачу 7.2) $\rho_н = \frac{p_н \mu}{RT}$, тогда отношение плотностей $\frac{\rho_{н1}}{\rho_{н2}} = \frac{p_{н1} T_2}{p_{н2} T_2} = 12{,}09$.

7.5. Какая масса m водяного пара содержится в объеме $V = 1$ м^3 воздуха в летний день при температуре $t = 30°$ С и относительной влажности $\omega = 0{,}75$?

Решение:

Относительная влажность определяется соотношением $\omega = \frac{p}{p_н}$, где p — давление водяного пара, находящегося в воздухе, и $p_н$ — давление водяного пара, насыщающего пространство при данной температуре. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $m = \frac{pV\mu}{RT} = \frac{\omega p_н V\mu}{RT}$ — (1). При $T = 303$ К давление насыщенного пара $p_н = 4{,}23$ кПа. Молярная масса водяного пара $\mu = 0{,}018$ кг/моль. Тогда из (1) получим $m = 22{,}5$ г.

7.6. В замкнутом объеме $V = 1\ м^3$ относительная влажность воздуха $\omega = 0{,}6$ при температуре $t = 20°$ С. Какая масса Δm воды должна еще испариться в этот объем, чтобы водяной пар стал насыщенным?

Решение:

По определению, относительная влажность $\omega = \frac{p}{p_н}$, где p — давление водяного пара, содержащегося в воздухе, $p_н$ — давление насыщенного пара при той же температуре. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ имеем $(p_н - p)V = \frac{\Delta m}{\mu}RT$, где $p = \omega \cdot p_н$, тогда $p_н(1-\omega)V = \frac{\Delta m}{\mu}RT$, откуда $\Delta m = \frac{pV\mu(1-\omega)}{RT} = 6{,}88$ г.

7.7. Температура комнаты $t_1 = 18°$ С, относительная влажность $\omega = 0{,}5$. В металлический чайник налили холодную воду, какова температура t_2 воды, при которой чайник перестанет запотевать?

Решение:

Давление водяного пара, содержащегося в воздухе, при температуре $t_1 = 18°$ С равно $p_1 = \omega \cdot p_{01}$, где p_{01} — давление насыщенного пара при той же температуре. Сравним давление p_1 с давлением p_{02} насыщенного водяного пара при температуре t_2. Если $p_1 < p_{02}$, пар конденсироваться не будет, т.е. чайник перестает запотевать при $p_1 = p_{02}$. Отсюда $\omega \cdot p_{01} = p_{02}$. Определив по таблице 8 значение p_{01}, вычислим $p_{02} = 1034$ Па, что соответствует температуре $t_2 \approx 7°$ С.

7.8. Найти число n молекул насыщенного водяного пара, содержащихся в единице объема при температуре $t_1 = 30°$ С.

Решение:
При $t = 30°$ С, по таблице 8 находим для данной температуры $p_н = 4229$ Па. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $p_н V = \nu RT$ найдем число молей $\nu = \dfrac{p_н V}{RT}$. Число частиц в объеме V равно $N = \nu N_A = \dfrac{p_н V N_A}{RT}$, а в единице объема $n = \dfrac{N}{V} = \dfrac{p_н N_A}{RT} = 1{,}011 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$.

7.9. Масса $m = 0{,}5$ г водяного пара занимает объем $V_1 = 10$ л при температуре $t = 50°$ С, какова при этом относительная влажность ω? Какая масса Δm пара сконденсируется, если изотермически уменьшить объем от V_1 до $V_2 = V_1/2$?

Решение:
Из таблицы находим давление насыщенного пара при температуре $T = 323$ К, которое равно $p_0 = 12302$ Па. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \dfrac{m}{\mu} RT$ находим давление $p = \dfrac{mRT}{\mu V_1}$. Тогда относительная влажность $\omega = \dfrac{p}{p_0} = \dfrac{mRT}{p_0 \mu V_1}$; $\omega = 0{,}606 \cdot 100\% = 60{,}6\%$. Найдем массу

водяного пара при относительной влажности 100% или $\omega_1 = 1$, тогда давление $p = p_0 = 12302$ Па. Учитывая, что $V_2 = \frac{V_1}{2}$ из уравнения Менделеева — Клапейрона $\frac{p_0 V_1}{2} = \frac{m - \Delta m}{\mu} RT$ находим $m - \Delta m = \frac{p_0 V_1 \mu}{2RT}$. Отсюда масса сконденсированного пара равна $\Delta m = m - \frac{p_0 V_1 \mu}{2RT} = 87{,}5$ мг.

7.10. В камере Вильсона объемом $V = 1$ л заключен воздух, насыщенный водяным паром. Начальная температура камеры $t_1 = 20°$ С. При движении поршня объем камеры увеличился до $V_2 = 1{,}25 V_1$. Расширение считать адиабатическим, причем показатель адиабаты $\chi = \frac{c_p}{c_V} = 1{,}4$. Найти: а) давление водяного пара до расширения; б) массу m_1 водяного пара в камере до расширения; в) плотность ρ_1 водяного пара до расширения; г) температуру t_2 пара после расширения (изменением температуры из-за выделения тепла при конденсации пара пренебречь); д) массу Δm сконденсированного пара; е) плотность ρ_2 водяного пара после конденсации; ж) степень перенасыщения, т.е. отношение плотности водяного пара после расширения (но до конденсации) к плотности водяного пара, насыщающего пространство при температуре, установившейся после конденсации

Решение:

а) До расширения насыщенный водяной пар находится при температуре $t_1 = 20°$ С, следовательно, давление этого пара $p_1 = 2{,}33$ кПа см. таблицу 8. б) Масса водяного пара до расширения $m_1 = \frac{p_1 \mu V_1}{RT_1} = 17{,}2 \cdot 10^{-6}$ кг. в) $\rho_1 = \frac{p_1 \mu}{RT_1} = 17{,}2 \times \times 10^{-3}$ кг/м^3. г) Т.к. процесс считается адиабатическим, то

$T_2 = \frac{T_1}{(V_2 / V_1)^{\gamma-1}} = 268\,\text{К}$. д) При температуре $t_2 = -5^\circ\,\text{С}$ давление насыщенного водяного пара $p_2 = 399\,\text{Па}$. Масса пара в камере, соответствующая этому значению, $m_2 = \frac{p_2 \mu V_2}{RT_2} = 4{,}0 \cdot 10^{-6}$ кг. Следовательно, масса сконденсированного пара $\Delta m = m_1 - m_2 = (17{,}2 - 4{,}0) = 13{,}2 \cdot 10^{-6}$ кг. е) $\rho_2 = \frac{p_2 \mu}{RT_2} = 3{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/м}^3$. ж) Т. к. плотность водяного пара после расширения (но до конденсации) $\rho_3 = \frac{m_1}{V_2} = \frac{17{,}2 \cdot 10^{-6}}{1{,}25 \cdot 10^{-3}}\,\text{кг/м}^3 = 13{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/м}^3$, то степень перенасыщения $s = \frac{\rho_3}{\rho_2} = 4{,}3$.

7.11. Найти удельный объем v воды в жидком и парообразном состояниях при нормальных условиях.

Решение:

По определению, удельный объем жидкости и пара соответственно $v_ж = \frac{V_ж}{m} = \frac{V_{0ж}}{\mu}$ и $v_п = \frac{V_п}{m} = \frac{V_{0п}}{\mu}$. Молярный объем жидкости $V_{0ж} = \mu / \rho$, тогда удельный объем жидкости $v_ж = \frac{V_{0ж}}{\mu} = \frac{1}{\rho} = 10^{-3}\,\text{м}^3/\text{кг}$. Молярный объем пара найдем из соотношения: $V_{0п} = \frac{RT}{p - p_н}$, тогда удельный объем пара $v_п = \frac{RT}{\mu(p - p_н)} = 1{,}25\,\text{м}^3/\text{кг}$.

7.12. Пользуясь первым законом термодинамики и данными таблицы 7 и 8, найти удельную теплоту парообразования r воды при $t = 200°$ С. Для воды критическая температура $T_к = 647$ К, критическое давление $p = 22$ МПа. Проверить правильность полученного результата по данным таблицы 9.

Решение:

Количество теплоты Q при испарении тратится на преодоление сил взаимодействия молекул и на работу расширения. Таким образом, согласно первому закону термодинамики имеем $Q = r_0 = \Delta W + A$ — (1), где r_0 — молярная теплота парообразования, ΔW — изменение молярной внутренней энергии сил взаимодействия при испарении, A — молярная работа, совершаемая против внешнего давления. $A = p_н\left(V_{0п} - V_{0ж}\right)$ — (2), где $p_н$ — давление насыщенного пара, $V_{0ж}$ — молярный объем жидкости, $V_{0п}$ — молярный объем пара. Имеем $V_{0ж} = = \frac{\mu}{\rho} = 18 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль, где μ — молярная масса и ρ — плотность воды. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $V_{0п} = \nu RT / p_н$. При $T = 473$ К имеем (см. таблицу 8) $p_н = 1{,}55$ МПа и $V_{0н} = 2{,}5$ л/моль. Считая, что изменение внутренней энергии взаимодействия молекул при испарении соответствует уравнению Ван-дер-Ваальса (см. задачу 6.18), имеем $\Delta W = \frac{\nu^2 a\left(V_{0п} - V_{0ж}\right)}{V_{0ж}V_{0п}}$ — (3), где $a = 5{,}56 \cdot 10^2$ Па·м^6/моль^2. Поскольку $V_{0ж} << V_{0п}$, то из (1) — (3) получим $r_0 = \frac{a}{V_{0ж}} + p_н V_{0п} = \frac{a\rho}{\mu} + RT = 35$ кДж/моль. Следовательно, удельная теплота парообразования воды $r = \frac{r_0}{\mu} = 1{,}95$ МДж/кг. Из таблицы 9, для температуры $t = 200°$ С значение $r = 1{,}94$ МДж/кг.

7.13. Какая часть теплоты парообразования воды при температуре $t = 100°$ С идет на увеличение внутренней энергии системы?

Решение:

Согласно первому началу термодинамики $r_0 = \Delta W + A$, где $r_0 = r\mu$ — молярная теплота парообразования; ΔW — изменение внутренней энергии; $A = p_н(V_{0п} - V_{0ж})$ — работа, совершаемая против сил внешнего давления. Тогда $\frac{\Delta W}{r_0} = \frac{r_0 - A}{r_0} = \frac{r\mu - p_н(V_{0п} - V_{0ж})}{r\mu}$. Молярные объемы жидкости и пара соответственно равны $V_{0ж} = \frac{\mu}{\rho}$ и $V_{0п} = \frac{RT}{p_н}$, следовательно, $\frac{\Delta W}{r_0} = \frac{r\mu - p_н(RT / p_н - \mu / \rho)}{r\mu}$; $\frac{\Delta W}{r_0} = 1 - \frac{p_н}{r\mu}\left(\frac{RT}{p_н} - \frac{\mu}{\rho}\right)$; $\frac{\Delta W}{r_0} = 0{,}924 \cdot 100\% = 92{,}4\%$.

7.14. Удельная теплота парообразования бензола (C_6H_6) при температуре $t = 77°$ С равна $r = 398$ кДж/кг. Найти изменение внутренней энергии ΔW при испарении массы $\Delta m = 20$ г бензола.

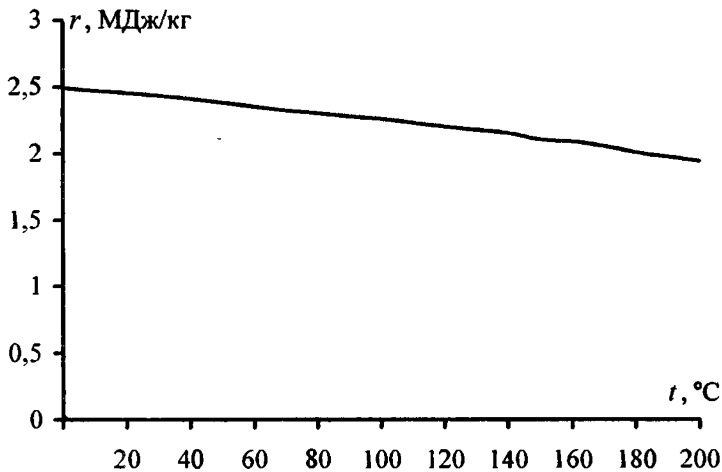
Решение:

Изменение внутренней энергии (см. задачу 7.13) $\Delta W = r_0 - A = \Delta m r - A$. Работа против сил внешнего давления $A = p\Delta V = \frac{\Delta m}{\mu} RT$, где $\mu = 0{,}078$ — молярная масса бензола. Тогда $\Delta W = \Delta m(r - RT / \mu) = 7{,}21$ кДж.

7.15. Пользуясь уравнением Клаузиуса — Клапейрона и данными таблицы 8, найти удельную теплоту парообразования r

воды при температуре $t = 5° С$. Проверить правильность полученного результата по данным таблицы 9.

Решение:



Из уравнения Клаузиуса – Клапейрона $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0}{T(V_{0п} - V_{0ж})}$ – (1). Считая, что насыщенные пары подчиняются уравнению Менделеева — Клапейрона, для $\nu = 1$ моль имеем $V_{0п} = \frac{RT}{p}$. Т. к. (см. таблицу 8) при $t = 5° С$ давление насыщенного пара $p_н = 870$ Па, то $V_{0п} = 2{,}65$ м^3/моль. Кроме того, $V_{0ж} = \frac{\mu}{\rho} \le 18 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль. Таким образом, $V_{0ж} << V_{0п}$, и тогда уравнение (1) можно записать как $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0 p}{RT^2}$ или $\frac{dp}{p} = \frac{r_0}{R}\frac{dT}{T^2}$ — (2). Для небольшого интервала температур $T_2 - T_1$ молярную теплоту испарения r_0 можно считать постоянной, и тогда, интегрируя уравнение

(2), получим $\int\limits_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}=\frac{r_0}{R}\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T^2}$; $\quad ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{r_0}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)$;

$ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{r_0(T_2-T_1)}{RT_1T_2}$ — (3), откуда $r_0=\frac{RT_1T_2\,ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{T_2-T1}$ — (4).

Здесь p_1 и p_2 — давления насыщенного пара при температурах T_1 и T_2. Для величин T_1 и T_2 можно взять значения $t_1=4°\,C$ $t_2=6°\,C$. Тогда $p_1=811$ Па, $p_2=932$ Па (см. таблицу 8) и $\frac{p_2}{p_1}=1{,}15$. Подставляя в (4) числовые данные, получим $r_0=45$ кДж/моль. Отсюда удельная теплота парообразования $r=\frac{r_0}{\mu}=2{,}49$ МДж/кг. Построив по данным таблицы 9 график $r=f(t)$, найдем, что при $t=5°\,C$ имеем $r=2{,}48$ МДж/кг.

7.16. Давления насыщенного ртутного пара при температурах $t_1=100°\,C$ и $t_2=120°\,C$ равны $p_1=37{,}3$ Па и $p_2=101{,}3$ Па. Найти среднее значение удельной теплоты парообразования r ртути в указанном интервале температур.

Решение:

Из уравнения Клаузиуса — Клапейрона $\frac{dp}{dt}=\frac{r_0}{T(V_{0п}-V_{0ж})}$, где молярные объемы пара и жидкости соответственно равны $V_{0п}=\frac{RT}{p_н}$ и $V_{0ж}=\frac{\mu}{\rho}$, имеем $\frac{dp}{pt}=\frac{r_0p}{RT^2}$ или $\frac{dp}{p}=\frac{r_0}{R}\frac{dT}{T^2}$. Проинтегрировав полученное уравнение, получим $ln\frac{p_2}{p_1}=\frac{r_0(T_2-T_1)}{RT_1T_2}$ или $r_0=\frac{RT_1T_2\,ln(p_2/p_1)}{T_2-T_1}$. Тогда $r=\frac{r_0}{\mu}=\frac{RT_1T_2\,ln(p_2/p_1)}{\mu(T_2-T_1)}$; $r=0{,}304\cdot10^6$ Дж/кг.

7.17. Температура кипения бензола (C_6H_6) при давлении $p=0{,}1$ МПа равна $t_к=80{,}2°$ С. Найти давление $p_{н}$ насыщенного пара бензола при температуре $t=75{,}6°$ С. Среднее значение удельной теплоты парообразования бензола в данном интервале температур принять равным $r=0{,}4$ МДж/кг.

Решение:

Среднее значение удельной теплоты парообразования (см. задачу 7.16) $r=\frac{RT_1T_2\,ln(p_2/p_1)}{\mu(T_2-T_1)}$. В нашем случае $p_2=p$ и $p_1=p_н$, тогда $ln\frac{p}{p_н}=\frac{r\mu(T_2-T_1)}{RT_1T_2}$. Возьмем от обоих частей данного уравнения экспоненту $\frac{p}{p_н}=exp\left(\frac{r\mu(T_2-T_1)}{RT_1T_2}\right)$, откуда $p_н=\frac{p}{exp(r\mu(T_2-T_1)/(RT_1T_2))}\approx87\cdot10^3$ Па.

7.18. Давления насыщенного пара этилового спирта (C_2H_5OH) при температурах $t_1=40°$ С и $t_2=60°$ С равны $p_1=17{,}7$ кПа и $p_2=67{,}9$ кПа. Найти изменение энтропии ΔS при испарении массы $\Delta m=1$ г этилового спирта, находящегося при температуре $t=50°$ С.

Решение:

Из уравнения Клаузиуса – Клапейрона $\frac{dp}{dT}=\frac{r_0}{T(V_{0п}-V_{0ж})}$ – (1), считая, что насыщенные пары подчиняются уравнению

Менделеева — Клапейрона, имеем для одного моля $V_{0п} = \frac{RT}{p}$. Кроме того, $V_{0ж} << V_{0п}$. Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом: $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0 p}{RT^2}$ или $\frac{dp}{p} = \frac{r_0}{R}\frac{dT}{T^2}$ — (2). Интегрируя уравнение (2), получим $ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{r_0(T_2 - T_1)}{RT_1T_2}$ — (3), откуда $r_0 = \frac{RT_1T_2\, ln(p_2 / p_1)}{T_2 - T_1}$ — (4). Изменение энтропии $\Delta S = \frac{\nu r_0}{T}$, где $\nu = \frac{\Delta m}{\mu}$ и с учетом (4) $\Delta S = \frac{RT_1T_2\, ln(p_2 / p_1)\Delta m}{(T_2 - T_1)\mu T} = 2{,}92$ Дж/К.

7.19. Изменение энтропии при испарении количества $\Delta\nu = 1$ моль некоторой жидкости, находящейся при температуре $t_1 = 50°$ С, равно $\Delta S = 133$ Дж/К. Давление насыщенного пара при температуре $t_1 = 50°$ С равно $p_1 = 12{,}33$ кПа. На сколько меняется давление насыщенного пара жидкости при изменении температуры от $t_1 = 50°$ С до $t_1 = 51°$ С?

Решение:

Изменение энтропии (см. задачу 7.18) равно $\Delta S = \frac{RT_1T_2\, ln(p_2 / p_1)\Delta m}{(T_2 - T_1)\mu T_1}$. Преобразуя это выражение, получим: $\Delta S = \frac{RT_1T_2\, ln(p_2 / p_1)\Delta\nu}{(T_2 - T_1)T_1}$; $\Delta S = \frac{RT_2\, ln(p_2 / p_1)\Delta\nu}{T_2 - T_1}$, откуда $ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2\Delta\nu}$. Возьмем от обеих частей экспоненту и найдем отношение $\frac{p_2}{p_1} = exp\left(\frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2\Delta\nu}\right)$, откуда $p_2 = p_1 \exp\left(\frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2 \Delta \nu}\right)$. Тогда изменение давления насыщенного пара $\Delta p = p_2 - p_1 = p_1\left(\exp\left(\frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2 \Delta \nu}\right) - 1\right)$;

$$\Delta p = 12{,}33 \cdot 10^3\left(\exp\left(\frac{(324 - 323) \cdot 133}{8{,}31 \cdot 324 \cdot 1}\right) - 1\right) = 624 \text{ Па}.$$

7.20. До какого предельного давления p можно откачать сосуд при помощи ртутно-диффузионного насоса, работающего без ртутной ловушки, если температура водяной рубашки насоса $t = 15°$ C? Давление насыщенного ртутного пара при температуре $t_0 = 0°$ C равно $p_0 = 0{,}021$ Па, среднее значение удельной теплоты парообразования ртути в данном интервале температур принять равным $r = 10{,}08$ МДж/кг.

Решение:
До давления $p = 93$ мПа, т. е. до давления насыщенного ртутного пара при $t = 15°$ C.

7.21. При температуре $t_0 = 0°$ C плотность ртути $\rho_0 = 13{,}6 \times 10^3$ кг/м^3. Найти ее плотность ρ при температуре $t = 300°$ C. Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}85 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$.

Решение:
Имеем $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$ и $\rho = \frac{m}{V}$, где $V = V_0(1 + \beta t)$. Тогда $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t} = 12{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

7.22. При температуре $t_1 = 100°$ C плотность ртути $\rho_1 = 13{,}4 \times 10^3$ кг/м^3. При какой температуре t_2 плотность ртути

$\rho_2 = 13{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3? Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$.

Решение:

Относительное изменение объема при нагревании $\frac{\Delta V}{V} = \beta(t_1 - t_2)$. По определению, плотность $\rho = \frac{M}{V}$, тогда $\rho_1 = \frac{m}{V}$ — (1), а $\rho_2 = \frac{m}{V - \Delta V}$ — (2). Разделим (2) на (1) $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V}{V - \Delta V} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{1 - \beta(t_1 - t_2)}$, откуда $\beta(t_1 - t_2) = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}$. Тогда изменение температуры $t_1 - t_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 \beta}$ и, окончательно, $t_2 = t_1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 \beta} = 227{,}2°$ С.

7.23. Найти плотность ρ морской воды на глубине $h = 5$ км, если плотность ее на поверхности $\rho_0 = 1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3. Сжимаемость воды $k = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$. Указание: при вычислении гидростатического давления морской воды ее плотность приближенно полагать равной плотности воды на поверхности.

Решение:

Относительное изменение объема при сжатии $\frac{\Delta V}{V_0} = -k\Delta p$, где k [Па$^{-1}$] — сжимаемость, величина, показывающая, на какую часть уменьшился объем жидкости при увеличении давления на 1 Па. Изменение давления Δp равно давлению водяного столба высотой h, которое по закону Паскаля $\Delta p = \rho_0 g h$, т.к. по условию плотность приблизительно равна плотности на поверхности. Плотность у поверхности воды $\rho_0=\frac{m}{V_0}$, а на глубине $h-\rho=\frac{m}{V_0+\Delta V}$, тогда отношение плотностей $\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{V_0+\Delta V}{V_0}=1+\frac{\Delta V}{V_0}=1-k\rho_0 gh$. Отсюда плотность морской воды на глубине h равна $\rho=\frac{\rho_0}{1-k\rho_0 gh}=1{,}055$ кг/м^3.

7.24. При нормальных условиях сжимаемость бензола $k=9\cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, коэффициент объемного расширения $\beta=1{,}24\times$ $\times 10^{-3}$ К$^{-1}$. На сколько необходимо увеличить внешнее давление, чтобы при нагревании на $\Delta t=1$ К объем бензола не изменился?

Решение:

Относительное изменение объема жидкости при нагревании и сжатии соответственно $\frac{\Delta V}{V}\beta\Delta T$ и $\frac{\Delta V}{V}=k\Delta p$. По условию объем бензола не меняется, поэтому $\beta\Delta T=k\Delta p$, откуда $\Delta p=\frac{\beta\Delta T}{k}=1{,}38\cdot 10^6$ Па.

7.25. Коэффициент объемного расширения ртути $\beta=1{,}82\times$ $\times 10^{-4}$ К$^{-1}$. Чтобы при нагревании ртути на $\Delta t=1$ К ее объем не изменился, необходимо увеличить внешнее давление на $\Delta p=4{,}7$ МПа. Найти сжимаемость k ртути.

Решение:

Чтобы объем не изменился (см. задачу 7.24), необходимо, чтобы $\beta\Delta T=k\Delta p$. Отсюда сжимаемость ртути $k=\frac{\beta\Delta T}{\Delta p}=$ $=3{,}87\cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$.

7.26. Найти разность уровней Δh ртути в двух одинаковых сообщающихся стеклянных трубках, если левое колено поддерживается при температуре $t_0 = 0°\,C$, а правое нагрето до температуры $t = 100°\,C$. Высота левого колена $h_0 = 90$ см. Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}$. Расширением стекла пренебречь.

Решение:

Относительное изменение объема жидкости при нагревании $\dfrac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta T$. Т. к. площадь поперечного сечения трубок одинакова и равна S, то объем в холодном колене $V_0 = Sh_0$, а в подогретом колене $V_0 + \Delta V = S(h_0 + \Delta h)$, тогда $\dfrac{V_0 + \Delta V}{V_0} = 1 + \dfrac{\Delta V}{V_0} = 1 + \beta\Delta T = \dfrac{h_0 + \Delta h}{h_0}$. Отсюда разность уровней $\Delta h = h_0(1 + \beta\Delta T) - h_0 = h_0 \beta \Delta T = 16{,}4$ см.

7.27. Ртуть налита в стеклянный сосуд высотой $L = 10$ см. При температуре $t = 20°\,C$ уровень ртути на $h = 1$ мм ниже верхнего края сосуда. На сколько можно нагреть ртуть, чтобы она не вылилась из сосуда? Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}$. Расширением стекла пренебречь.

Решение:

Начальный объем ртути $V_0 = S(L - h)$, где S — площадь поперечного сечения сосуда, а ее конечный объем $V_0 + \Delta V = SL$. Тогда $\dfrac{V_0 + \Delta V}{V_0} = 1 + \beta\Delta T = \dfrac{L}{L - h}$, откуда после преобразования получаем $\Delta T = \dfrac{h}{(L - h)\beta} = 55{,}5\,K$.

7.28. Стеклянный сосуд, наполненный до краев ртутью, при температуре $t = 0°\,C$ имеет массу $M = 1$ кг. Масса пустого сосуда $M_0 = 0{,}1$ кг. Найти массу m ртути, которая может поместиться в сосуде при температуре $t = 100°$ С. Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$. Расширением стекла пренебречь.

Решение:

Масса ртути, находящаяся в сосуде при температуре t_0, равна $m_0 = M - M_0$, тогда плотность ртути при данной температуре $\rho = \frac{m}{V}$. Отношение плотностей (см. задачу 7.22) $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{m}{m_0}$, тогда $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{1 - \beta(t - t_0)}$, откуда $m_0 = m(1 - \beta(t - t_0)) = (M - M_0)(1 - \beta(t - t_0)) = 884$ г.

7.29. Решить предыдущую задачу, если коэффициент объемного расширения стекла $\beta' = 3 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Решение:

При нагревании объем сосуда стал $V = V_0(1 + \beta' t)$, соответственно плотность ртути $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1 + \beta' t)}$ — (1). С другой стороны, $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t} = \frac{m_0}{V_0(1 + \beta t)}$ — (2). Приравнивая уравнения (1) и (2), получим $m = \frac{m_0(1 + \beta' t)}{1 + \beta t} = 887$ г.

7.30. Стеклянный сосуд наполнен до краев жидким маслом при температуре $t_0 = 0°$ С. При нагревании сосуда с маслом до температуры $t = 100°$ С вытекло 6% налитого масла. Найти коэффициент объемного расширения масла, если коэффициент объемного расширения стекла $\beta = 3 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Решение:

При нагревании объем сосуда увеличился и стал равным $V_1 = V_0(1+\beta t)$, и объем масла также увеличился и стал равным $V_2 = V_0(1+\beta' t)$. Количество масла, которое вытекло, $\Delta V = V_2 - V_1 = V_0[(1+\beta' t)-(1+\beta t)] = V_0 t(\beta' - \beta)$. По условию $\frac{\Delta V}{V_0} = 0{,}06$, тогда $(\beta' - \beta)t = 0{,}06$, откуда $\beta' = \frac{0{,}06}{t} + \beta = 6{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$.

7.31. Какую относительную ошибку мы допустим при нахождении коэффициента объемного расширения масла в условиях предыдущей задачи, если пренебрежем расширением стекла?

Решение:

Коэффициент объемного расширения масла с учетом расширения стекла (см. задачу 7.30) $\beta' = 6{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$. Если не учитывать расширения стекла, то количество масла, которое вытекло, $\Delta V = V_2 - V_0 = V_0[(1+\beta_0 t)-1] = V_0\beta_0 t$, где β_0 – коэффициент объемного расширения масла без учета расширения стекла. Тогда $\Delta V / V = \beta_0 t = 0{,}06$, тогда $\beta_0 = \frac{0{,}06}{t} = 6 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$. Отсюда относительная ошибка $x = \frac{\beta' - \beta_0}{\beta} = 0{,}05 \cdot 100\% = 5\%$.

7.32. Температура помещения $t = 37°$ С, атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа. Какое давление p покажет ртутный барометр, находящийся в этом помещении? Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$. Расширеием стекла пренебречь.

Решение:

Т. к. температура в помещении постоянна, то по закону Бойля — Мариотта $pV_0 = p_0V$, где $V = V_0(1+\beta t)$ — фактический объем ртути в барометре. Тогда $pV_0 = p_0V_0 \times \times (1+\beta t)$, откуда $p = p_0(1+\beta t) = 102$ кПа.

7.33. Какую силу F нужно приложить к горизонтальному алюминиевому кольцу высотой $h = 10$ мм, внутренним диаметром $d_1 = 50$ мм и внешним диаметром $d_2 = 52$ мм, чтобы оторвать его от поверхности воды? Какую часть найденной силы составляет сила поверхностного натяжения?

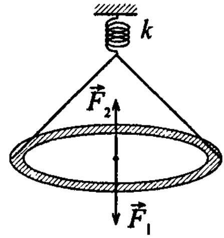
Решение:

Будем считать, что кольцо касается воды только своей нижней поверхностью, не погружаясь. Сила, необходимая для отрыва кольца от поверхности воды $F = F_1 + F_2$, где F_1 — сила тяжести, F_2 — сила поверхностного натяжения. $F_1 = \rho h \frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right) g = 40$ мН. При отрыве кольца водяная пленка разрывается по внутренней — d_2 и внешней — d_1 сторонам кольца. $F_2 = \pi\alpha(d_1 + d_2) = 23{,}5$ мН. Отсюда $F = 63{,}5$ мН и $\frac{F_2}{F} = 37\%$.

7.34. Кольцо внутренним диаметром $d_1 = 25$ мм и внешним диаметром $d_2 = 26$ мм подвешено на пружине и соприкасается с поверхностью жидкости. Жесткость пружины $k = 9{,}8 \cdot 10^{-1}$ Н/м. При опускании поверхности жидкости кольцо оторвалось от нее при растяжении пружины на $\Delta l = 5{,}3$ мм. Найти поверхностное натяжение α жидкости.

Решение:

Сила поверхностного натяжения $\vec{F}_1$ жидкости уравновешивается силой упругости пружины $\vec{F}_2$. Чтобы система находилась в равновесии, необходимо чтобы $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ или $F_1 = F_2$. По закону Гука $F_2 = k\Delta l$. При отрыве кольца поверхностная пленка разрывается по внешней и внутренней поверхности кольца. Поэтому сила поверхностного натяжения будет складываться из двух $F_1 = F_{11} + F_{12}$, где $F_{11} = \alpha L_1$ и $F_2 = \alpha L_2$. Т.к. $L_1 = \pi d_1$ и $L_2 = \pi d_2$, то $F_1 = \pi\alpha(d_1 + d_2)$; $k\Delta l = \pi\alpha(d_1 + d_2)$, отсюда

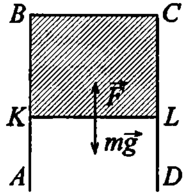


$$\alpha = \frac{k\Delta l}{\pi(d_1 + d_2)} = 0{,}032 \text{ Н/м}.$$

7.35. Рамка $ABCD$ с подвижной медной перекладиной KL затянута мыльной пленкой. Каков должен быть диаметр d перекладины KL, чтобы она находилась в равновесии? Найти длину l перекладины, если известно, что при перемещении перекладины на $\Delta h = 1$ см совершается изотермическая работа $A = 45$ мкДж. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}045$ Н/м.

Решение:

Сила тяжести уравновешивается силой поверхностного натяжения. Чтобы перекладина находилась в равновесии, необходимо, чтобы $m\vec{g} + \vec{F} = 0$ или $F = mg$. Т.к. $m = \rho V$ и $V = \dfrac{\pi d^2}{4} l$, то $F = \dfrac{\pi d^2 l \rho g}{4}$. С другой стороны, $F = 2\alpha l$ (т. к. у пленки две стороны). Отсюда $2\alpha l = \dfrac{\pi d^2 l \rho g}{4}$; $d^2 = \dfrac{8 l\alpha}{\pi l \rho g} = \dfrac{8\alpha}{\pi \rho g}$;



$d=\sqrt{\dfrac{8\alpha}{\pi\rho g}}=1.2$ мм. Работа по перемещению перекладины $A=2\alpha S$ (т.к. у пленки две стороны). Т.к. $S=l\Delta h$, то $A=2\alpha l\Delta h$; $l=\dfrac{A}{2\alpha\Delta h}=5$ см.

7.36. Спирт по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d=2$ мм. Капли отрываются через время $\Delta\tau=1$ с одна после другой. Через какое время τ вытечет масса $m=10$ г спирта? Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

Решение:
Чтобы капля оторвалась от поверхности, необходимо разорвать поверхностную пенку длиной $l=2\pi r$, где r — радиус шейки капли, силой тяжести $P=2\pi r\alpha=\pi d\alpha$. В массе спирта содержится N капель, причем $N=\dfrac{mg}{P}=\dfrac{mg}{\pi d\alpha}=780$ капель. Т.к. по условию капли отрываются с промежутком в $\Delta\tau=1$ с, значит, общее время $\tau=N\Delta\tau=780$ с=13мин.

7.37. Вода по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d=3$ мм. При остывании воды от $t_1=100°$ С до $t_2=20°$ С масса каждой капли изменилась на $\Delta m=13{,}5$ мг. Зная поверхностное натяжение α_2 воды при $t_2=20°$ С, найти поверхностное натяжение α_1 воды при $t_1=100°$ С. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

Решение:
Сила тяжести, действующая на каплю, в момент ее отрыва должна разорвать поверхностную пленку по длине $l=2\pi r=\pi d$, т.к. по условию диаметр шейки капли равен внутреннему диаметру трубки. Тогда начальная сила

тяжести $p_0 = \pi d\alpha_2$. При остывании капли сила тяжести изменится на $\Delta p = \Delta mg$ и станет равной $p = p_0 - p = = \pi d\alpha_2 - \Delta mg$. С другой стороны, $p = \pi d\alpha_1$, тогда $\pi d\alpha_1 = \pi d\alpha_1 - \Delta mg$, откуда $\alpha_1 = \dfrac{\pi d\alpha_2 - \Delta mg}{\pi d} = 0{,}059$ Н/м.

7.38. При плавлении нижнего конца вертикально подвешенной свинцовой проволоки диаметром $d = 1$ мм образовалось $N = 20$ капель свинца. На сколько укоротилась проволока? Поверхностное натяжение жидкого свинца $\alpha = 0{,}47$ Н/м. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным диаметру проволоки.

Решение:

Капля отрывается от проволоки, когда сила тяжести равна силе поверхностного натяжения, т. е. $mg = F$. Масса капли $m = \rho V_K$. Сила поверхностного натяжения $F = \alpha l$, где $l = \pi d$, откуда $F = \pi\alpha d$. Отсюда объем капли $V_K = \dfrac{\pi\alpha d}{\rho}$.

Полный объем расплавленного свинца $V = NV_K = \dfrac{\pi N\alpha d}{\rho}$. С другой стороны, $V = \dfrac{\pi d^2}{4}\Delta l$. Тогда $\dfrac{\pi d^2}{4}\Delta l = \dfrac{\pi N\alpha d}{\rho}$, отсюда $\Delta l = \dfrac{4N\alpha}{\rho g d} = 34$ см.

7.39. Вода по каплям вытекает из вертикальной трубки внутренним радиусом $r = 1$ мм. Найти радиус R капли в момент отрыва. Каплю считать сферической. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

Решение:

Сила тяжести, необходимая для отрыва капли (см. задачу 7.37) $p = 2\pi r\alpha$. С другой стороны, сила тяжести $p = mg$, где $m = \rho V$ — масса оторвавшейся капли. Т.к. по условию капля сферическая, то $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, тогда $2\pi r\alpha = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$, откуда $R^3 = \frac{3r\alpha}{2\rho g}$ или $R = \sqrt[3]{\frac{3r\alpha}{2\rho g}} = 2{,}2$ мм.

7.40. На сколько нагреется капля ртути, полученная от слияния двух капель радиусом $r = 1$ мм каждая?

Решение:

При слиянии двух капель ртути выделяется энергия $\Delta W = \alpha \Delta S$, где изменение площади поверхности $\Delta S = 4\pi r^2 \cdot 2 - 4\pi R^2$. Радиус большой капли R найдем, приравняв объем большой капли сумме объемов слившихся капель, т.е. $2 \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$, откуда $R = r\sqrt[3]{2}$. Тогда $\Delta S = 4\pi r^2 \left(2 - \sqrt[3]{4}\right)$ и $\Delta W = \alpha \cdot 4\pi r^2 \left(2 - \sqrt[3]{4}\right)$ — (1). За счет выделенной энергии произойдет нагревание ртутной капли, тогда $\Delta W = cn\Delta T = c\rho \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta T = c\rho \frac{8}{3}\pi r^3 \Delta T$ — (2). Приравнивая (1) и (2), найдем $\Delta T = \frac{3\alpha\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)}{c\rho 2r} = 1{,}65 \cdot 10^{-4}$ К.

7.41. Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы разделить сферическую каплю ртути радиусом $R = 3$ мм на две одинаковые капли?

Решение:

Т. к. капля разрывается на две одинаковые, то площадь ΔS, по которой произойдет разрыв, будет равна площади круга, проходящего через центр капли, т. е. $\Delta S = \pi R^2$. Тогда работа против сил поверхностного натяжения $A = \alpha \Delta S = \alpha \pi R^2 = 14{,}7$ мкДж.

7.42. Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы увеличить вдвое объем мыльного пузыря радиусом $r = 1$ см? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}043$ Н/м.

Решение:

Т. к. по условию $V_2 = 2V_1$, где $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$ и $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$ — объемы пузыря до и после совершения работы, то $r_2^3 = 2r_1^3$ или $r_2 = \sqrt[3]{2}r_1$. Изменение площади поверхности пузыря до и после совершения работы — $\Delta S = S_2 - S_1 = 4\pi\left[r_2^2 - r_1^2\right] = 4\pi r_1^2\left[\sqrt[3]{4} - 1\right]$. Т. к. у оболочки пузыря две поверхности, наружная и внутренняя, то совершенная работа $A = 2\alpha\Delta S = 8\pi r_1^2\alpha\left[\sqrt[3]{4} - 1\right] = 63{,}4$ мкДж.

7.43. Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь диаметром $d = 4$ см? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}043$ Н/м.

Решение:

Площадь поверхности мыльного пузыря $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$, тогда совершенная работа против сил поверхностного натяжения (см. задачу 7.42) $A = 2\alpha S = 2\pi d^2\alpha = 432$ мкДж.

7.44. Найти давление p воздуха в воздушном пузырьке диаметром $d = 0{,}01$ мм, находящемся на глубине $h = 20$ см под поверхностью воды. Атмосферное давление $p_0 = 101{,}7$ кПа.

Решение:

Давления воздуха в пузырьке $p = p_0 + p_1 + p_2$, где p_0 — атмосферное давление, $p_1 = \rho gh$ — гидростатическое давление воды, $p_2 = \frac{4\alpha}{d}$ — добавочное давление, вызванное кривизной поверхности. Таким образом, $p = p_0 + \rho g h + \frac{4\alpha}{d} = 132{,}9$ кПа.

7.45. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на $\Delta p = 133{,}3$ Па больше атмосферного. Найти диаметр d пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}043$ Н/м.

Решение:

Добавочное давление внутри мыльного пузыря, вызванное кривизной его поверхности, $\Delta p = 2\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Т. к. пузырь сферический, то радиусы кривизны взаимно перпендикулярных поверхностей $R_1 = R_2 = \frac{d}{2}$, тогда $\Delta p = \frac{8\alpha}{d}$, откуда $d = \frac{8\alpha}{\Delta p} = 2{,}58$ мм.

7.46. На какой глубине h под водой находится пузырек воздуха, если известно, что плотность воздуха в нем $\rho = 2$ кг/м^3? Диаметр пузырька $d = 15$ мкм, температура $t = 20°$ C, атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа.

Решение:

Давление воздуха в пузырьке сложится из атмосферного давления p_0, гидростатического давления воды $p_1 = \rho_1 g h$ и добавочного давления $\Delta p = \frac{4\alpha}{d}$, вызванного кривизной поверхности, т.е. $p = p_0 + \rho_1 g h + \frac{4\alpha}{d}$. Из закона Бойля—Мариотта $p_0 V = p V_0$ следует, что $\frac{p_0}{p} = \frac{V_0}{V} = \frac{\rho_0}{\rho}$, тогда

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0+\rho_1 gh+4\alpha/d}$$, откуда $p_0+\rho_1 gh+\frac{4\alpha}{d}=\frac{p_0\rho}{\rho_0}$ или

$\rho_1 gh=\frac{p_0\rho}{\rho_0}-\frac{4\alpha}{d}-p_0$. Окончательно, глубина погружения:

$$h=\frac{p_0\rho d-4\alpha\rho_0-p_0\rho_0 d}{\rho_0+\rho_1 gd};\ h=\frac{p_0 d(\rho-\rho_0)-4\alpha\rho_0}{\rho_0+\rho_1 gd};\ h=4{,}72\ \text{м}.$$

7.47. Во сколько раз плотность воздуха в пузырьке, находящемся на глубине $h=5$ м под водой, больше плотности воздуха при атмосферном давлении $p_0=101{,}3$ кПа? Раднус пузырька $r=0{,}5$ мкм.

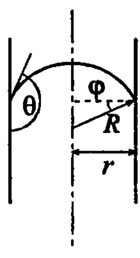
Решение:

Отношение плотностей воздуха в пузырьке и на поверхности (см. задачу 7.46) $\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{p_0}{p_0+\rho_1 gh+2\alpha/r}=4{,}4$.

7.48. В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр, внутренней диаметр которого $d=3$ мм. Разность уровней в сосуде и в капилляре $\Delta h=3{,}7$ мм. Найти радиус R кривизны мениска в капилляре.

Решение:

Из рисунка видно, что $r=R\cos\varphi=R\cos\times$ $\times(180°-\theta)=-R\cos\theta$, где θ — краевой угол. Добавочное давление, вызванное кривизной мениска, $\Delta p=-\frac{2\alpha\cos\theta}{r}$. Т.к. для ртути $\cos\theta<0$, то $\Delta p>0$, следовательно, уровень ртути в капилляре будет ниже, чем в сосуде.



Разность уровней $\Delta h=-\frac{4\alpha\cos\theta}{\rho gd}$, отсюда

$-\cos\theta = \dfrac{\Delta h \rho g d}{4\alpha} = 0{,}74$. Следовательно, радиус кривизны мениска ртути $R = -\dfrac{r}{\cos\theta} = 2$ мм.

7.49. В сосуд с водой опущен открытый капилляр, внутренний диаметр которого $d = 1$ мм. Разность уровней в сосуде и в капилляре $\Delta h = 2{,}8$ см. Найти радиус кривизны R мениска в капилляре. Какова была бы разность уровней Δh в сосуде и в капилляре, если бы смачивание было полным?

Решение:

Высота поднятия жидкости в трубке $\Delta h = \dfrac{2\alpha\cos\theta}{r\rho g}$ — (1).

Радиус кривизны мениска $R = r\cos\varphi = r\cos(180^o - \theta) = |-r\cos\theta|$ — (2). Из (1) $\cos\theta = \dfrac{\Delta h r \rho g}{2\alpha}$, и т. к. $r = \dfrac{d}{2}$, то окончательно $R = \dfrac{d^2 \Delta h \rho g}{8\alpha} = 0{,}46$ мм. Если бы смачивание было полным, то $\theta = 0°$ и $\cos\theta = 1$, тогда из (1) $\Delta h = \dfrac{4\alpha}{d\rho g} = 2{,}98$ мм.

7.50. На какую высоту h поднимается бензол в капилляре, внутренний диаметр которого $d = 1$ мм? Смачивание считать полным.

Решение:

Т.к. смачивание полное, то высота поднятия бензола в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \dfrac{4\alpha}{d\rho g} = 13{,}86$ мм.

7.51. Каким должен быть внутренний диаметр d капилляра, чтобы при полном смачивании вода в нем поднималась на

$\Delta h = 2$ см? Задачу решить, когда капилляр находится: а) на Земле, б) на Луне.

Решение:

При полном смачивании высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $\Delta h = \dfrac{4\alpha}{d\rho g}$, откуда $d = \dfrac{4\alpha}{\rho g \Delta h}$.

а) На Земле $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$, тогда $d = 1{,}48$ мм. б) На Луне $g = 1{,}65\ \text{м/с}^2$, тогда $d = 8{,}83$ мм.

7.52. Найти разность уровней Δh ртути в двух сообщающихся капиллярах, внутренние диаметры которых равны $d_1 = 1$ мм и $d_2 = 2$ мм. Несмачивание считать полным.

Решение:

Высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \dfrac{2\alpha\cos\theta}{r\rho g}$. Поскольку $r = \dfrac{d}{2}$, то $h = \dfrac{4\alpha\cos\theta}{\rho g d}$. При полном несмачивании $\theta = 180°$ и $\cos\theta = -1$, тогда высота поднятия жидкости в первом и втором капилляре соответственно равна $h_1 = -\dfrac{4\alpha}{\rho g d_1}$ и $h_2 = -\dfrac{4\alpha}{\rho g d_2}$. Тогда разность уравней $\Delta h = h_2 - h_1 = -\dfrac{4\alpha}{\rho g d_2} - \left(-\dfrac{4\alpha}{\rho g d_1}\right) = \dfrac{4\alpha}{\rho g}\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right) =$

$$= \frac{4\alpha(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2} = 7{,}5\ \text{мм}.$$

7.53. Каким должен быть наибольший диаметр d пор в фитиле керосинки, чтобы керосин поднимался от дна керосинки до горелки (высота $h = 10$ см)? Считать поры цилиндрическими трубками и смачивание полным.

Решение:

Т. к. по условию поры цилиндрические и смачивание полное, то наибольший диаметр капилляра (см. задачу 7.51) $d = \dfrac{4\alpha}{\rho g h} = 0{,}15$ мм.

7.54. Капилляр внутренним радиусом $r = 2$ мм опущен в жидкость. Найти поверхностное натяжение α жидкости, если известно, что в капилляр поднялась масса жидкости $m = 0{,}09$ г.

Решение:

При полном смачивании высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \dfrac{2\alpha}{\rho g r}$ — (1). Масса поднятой жидкости $m = \rho V$, где $V = Sh$ и $S = 2\pi r^2$, т. к. у пленки две стороны, тогда $m = 2\rho\pi r^2 h$, отсюда $h = \dfrac{m}{2\rho\pi r^2}$ — (2). Т. к. в формулах (1) и (2) левые части равны, то можно приравнять и правые части, тогда $\dfrac{2\alpha}{\rho g r} = \dfrac{m}{2\rho\pi r^2}$ или $\dfrac{2\alpha}{g} = \dfrac{m}{2\pi r}$, отсюда окончательно $\alpha = \dfrac{gm}{4\pi r} = 0{,}07$ Н/м.

7.55. В сосуд с водой опущен капилляр, внутренний радиус которого $r = 0{,}16$ мм. Каким должно быть давление p воздуха над жидкостью в капилляре, чтобы уровень воды в капилляре и в сосуде был одинаков? Атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа. Смачивание считать полным.

Решение:

При полном смачивании высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \dfrac{2\alpha}{\rho g r}$. Чтобы уровень воды в сосуде и капилляре был одинаковым, необходимо, чтобы давление было равно $p = p_0 + \rho gh = p_0 + \rho g \frac{2\alpha}{\rho gr} = p_0 + \frac{2\alpha}{r} = 102{,}2$ кПа.

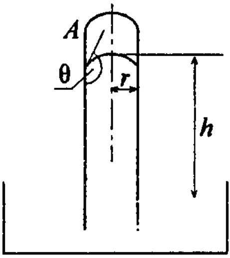
7.56. Капиллярная трубка опущена вертикально в сосуд с водой. Верхний конец трубки запаян. Для того чтобы уровень воды в трубке и в широком сосуде был одинаков, трубку пришлось погрузить в воду на 15% ее длины. Найти внутренней радиус r трубки. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа. Смачивание считать полным.

Решение:

По закону Бойля — Мариотта $p_0 V_0 = pV$, где p_0 и p — давления воздуха в капилляре до и после погружения его в воду, V_0 и V — объемы воздуха в капилляре до и после погружения. $p = p_0 + \frac{2\alpha}{r}$, $V_0 = Sh_0$, где S — площадь сечения капилляра и h_0 — его длина, $V = Sh$, где h — длина непогруженной части капилляра. С учетом этого $p_0 h_0 = \left(p_0 + \frac{2\alpha}{r}\right)h$, откуда $r = \frac{2\alpha h}{p_0(h_0 - h)}$ — (1). По условию $\frac{(h_0 - h)}{h_0} = 0{,}015$, или $\frac{h}{(h_0 - h)} = 65{,}7$. Подставляя числовые данные в (1), получим $r = 0{,}1$ мм.

7.57. Барометрическая трубка A, заполненная ртутью, имеет внутренний диаметр d, равный: а) 5мм; б) 1,5см. Можно ли определить атмосферное давление непосредственно по высоте ртутного столба? Найти высоту ртутного столба в каждом из этих случаев. Атмосферное давление $p_0 = 758$ мм рт. ст. Несмачивание считать полным.

Решение:



Высота поднятия жидкости в капилляре $h = \dfrac{2\alpha \cos\theta}{\rho g r}$, где θ — краевой угол, α — поверхностное натяжение. При полном несмачивании $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$, тогда $h = \left| -\dfrac{2\alpha}{\rho g r} \right| = \dfrac{4\alpha}{\rho g d}$ — (1) — высота, создающая дополнительное давление за счет кривизны поверхности мениска. а) Если $d = 5$ мм, то из (1) найдем $h = 3$ мм, тогда $p = p_0 - h = 755$ мм рт. ст. б) Если $d = 1{,}5$ см, то $h = 1$ мм, тогда $p = p_0 - h = 757$ мм рт. ст. Таким образом, если трубка узкая, то атмосферное давление не может быть непосредственно определено по высоте ртутного столба h, т. к. к давлению столба прибавляется еще давление выпуклого мениска в трубке.

7.58. Внутренний диаметр барометрической трубки $d = 0{,}75$ см. Какую поправку надо ввести, измеряя атмосферное давление по высоте ртутного столба? Несмачивание считать полным.

Решение:

Поправка к атмосферному давлению при полном несмачивании (см. задачу 7.57) $h = \dfrac{4\alpha}{\rho g d} = 2$ мм.

7.59. Какую относительную ошибку мы допускаем, вычисляя атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа по высоте ртутного столба, если внутренний диаметр барометрической трубки d равен: а) 5мм; б) 10мм? Несмачивание считать полным.

Решение:

Из закона Паскаля $p_0 = \rho g h_0$. Тогда высота ртутного столба $h_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 760$ мм. рт. ст. Поправка к атмосферному давлению при полном несмачивании (см. задачу 7.57) $h = \frac{4\alpha}{\rho g d}$. Тогда относительная ошибка $x = \frac{h}{h_0} = \frac{4\alpha}{\rho g d} \frac{\rho g}{p_0} = \frac{4\alpha}{d p_0}$. а) Если $d_1 = 5$ мм, то $x_1 = 0{,}39\%$. б) Если $d = 10$ мм, то $x_2 = 0{,}19\%$.

7.60. На поверхность воды положили жирную (полностью несмачиваемую водой) стальную иголку. Каков наибольший диаметр d иголки, при котором она еще может держаться на воде?

Решение:

Для того чтобы иголка не тонула, необходимо, чтобы давление, оказываемое иголкой на площадь ее опоры, было не больше давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублении под иголкой. Давление иголки на воду $p_1 = \frac{mg}{ld} = \frac{\rho V g}{ld} = \frac{\rho \pi d g}{4}$, где l — длина иголки и V — ее объем. Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, определяется формулой Лапласа $p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. В нашем случае поверхность жидкости цилиндрическая, т.е. $R_1 = \infty$ и $R_2 = r$ — раднус иголки. Тогда $p_2 = \frac{\alpha}{r} = \frac{2\alpha}{d}$. Т. к. необходимо, чтобы $p_1 \le p_2$, то $\frac{\rho \pi d g}{4} \le \frac{2\alpha}{d}$, откуда $d \le \sqrt{\frac{8\alpha}{\rho \pi g}} = 1{,}6$ мм.

7.61. Будет ли плавать на поверхности воды жирная (полностью несмачиваемая водой) платиновая проволока диаметром $d = 1$ мм?

Решение:

Чтобы проволока могла держаться на воде, необходимо, чтобы давление, оказываемое проволокой на площадь ее опоры, не превышало давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублении под проволокой и направленного вверх (силой Архимеда пренебрегаем). Давление проволоки на воду $p_1 = \frac{mg}{ld} = \frac{\rho V g}{ld} = \frac{\rho \pi d g}{4}$, где l — длина проволоки и V — ее объем. Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, определяется формулой Лапласа $p_2 = \frac{\alpha}{r} = \frac{2\alpha}{d}$. Т. к. необходимо, чтобы $p_1 \le p_2$, то $\frac{\rho \pi d g}{4} \le \frac{2\alpha}{d}$, откуда $d_{max} = \sqrt{\frac{8\alpha}{\rho \pi g}}$. Для платины $\rho = 21{,}4 \times$ $\times 10^3$ кг/м^3, для воды $\alpha = 0{,}073$ Н/м, тогда $\alpha_{max} = 0{,}09$ мм, а по условию $d = 1$ мм, значит, проволока плавать не будет.

7.62. В дне сосуда с ртутью имеется отверстие. Каким может быть наибольший диаметр d отверстия, чтобы ртуть из сосуда не выливалась при высоте столба ртути $h = 3$ см?

Решение:

Чтобы ртуть не выливалась из сосуда, давление ртутного столба высотой h должно быть равно добавочному давлению, вызванному кривизной поверхности жидкости, т.е. $p = \Delta p$. По закону Паскаля $p = \rho g h$, а по формуле Лапласа $\Delta p = \frac{4\alpha}{d}$, тогда $\rho g h = \frac{4\alpha}{\rho g h}$, откуда $d_{max} = \frac{4\alpha}{\rho g h} =$ $= 0{,}5$ мм.

7.63. В дне стеклянного сосуда площадью $S = 30\ \text{см}^2$ имеется круглое отверстие диаметром $d = 0{,}5$ мм. В сосуд налита ртуть. Какая масса ртути останется в сосуде?

Решение:

Давление ртути на дно сосуда $p = \frac{mg}{S}$. Добавочное давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, $\Delta p = \frac{4\alpha}{d}$. Чтобы ртуть осталась в сосуде, необходимо, чтобы $p = \Delta p$ или $\frac{mg}{S} = \frac{4\alpha}{d}$, тогда $m = \frac{4\alpha S}{gd} = 1{,}22$ кг.

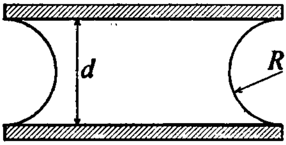
7.64. Водомерка бегает по поверхности воды. Найти массу водомерки, если известно, что под каждой из шести лапок насекомого образуется ямка, равная полусфере радиусом $r = 0{,}1$ мм.

Решение:

Для того чтобы водомерка держалась на воде, необходимо, чтобы давление, оказываемое ею на площадь опоры, не превышало давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублениях под ее лапками. Давление одной лапки на воду $p_1 = \frac{mg}{6 \cdot 2\pi r^2}$. Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, $p_2 = \frac{\alpha}{r}$ (см. задачу 7.60). Приравнивая p_1 и p_2, получим $\frac{\alpha}{r} = \frac{mg}{12\pi r^2}$, отсюда $m = \frac{12\pi r\alpha}{g}$; $m = 28$ мг.

7.65. Какую силу F надо приложить, чтобы оторвать друг от друга (без сдвига) две смоченные фотопластинки размером $S = 9 \times 12\ \text{см}^2$? Толщина водяной прослойки между пластинками $d = 0{,}05$ мм. Смачивание считать полным.

Решение:



Поверхность жидкости между пластинками имеет радиус кривизны $R = \frac{d}{2}$ (Рис.). Тогда добавочное отрицательное давление под цилиндрической вогнутой поверхностью $p = \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{d}$. Величина p — избыток внешнего давления, действующего на площадь пластинок S. Следовательно, сила, которую надо приложить, чтобы оторвать пластинки друг от друга, $F = pS = \frac{2\alpha}{d}S = 31{,}5$ Н.

7.66. Между двумя вертикальными плоскопараллельными стеклянными пластинками, находящимися на расстоянии $d = 0{,}25$ мм друг от друга, налита жидкость. Найти плотность ρ жидкости, если известно, что высота поднятия жидкости между пластинками $h = 3{,}1$ см. Поверхностное натяжение жидкости $\alpha = 0{,}03$ Н/м. Смачивание считать полным.

Решение:

Поверхность смачивающей жидкости между пластинками имеет цилиндрическую форму с радиусом кривизны $R = \frac{d}{2}$. Тогда добавочное отрицательное давление под цилиндрической вогнутой поверхностью $p = \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{d}$. С другой стороны, по закону Паскаля $p = \rho g h$. Тогда $\frac{2\alpha}{d} = \rho g h$, отсюда $\rho = \frac{2\alpha}{dgh} = 0{,}79 \cdot 10^3$ кг/м^3.

7.67. Между двумя горизонтальными плоскопараллельными стеклянными пластинками помещена масса $m = 5$ г ртути. Когда на верхнюю пластинку положили груз массой $M = 5$ кг, расстояние между пластинками стало равным $d = 0{,}087$ мм. Пренебрегая массой пластинки по сравнению с массой груза, найти поверхностное натяжение α ртути. Несмачивание считать полным.

Решение:

Поверхность ртути между пластинками имеет цилиндрическую форму и радиус кривизны $R = \frac{d}{2}$. Силу добавочного отрицательного давления можно определить по формуле $F = \frac{2\alpha}{d}S$ из задачи 7.65, но в данном случае поверхность будет выпуклая, т. к. имеет место полное несмачивание. Груз давит на ртуть с силой $P = Mg$ — (2). Поскольку силы уравновешены, то $\vec{F} + \vec{P} = 0$ или $F = P$. Подставляя (1) и (2), получим $\frac{2\alpha}{d}S = Mg$ — (3). Масса ртути $m = \rho V = \rho S d$, откуда $S = \frac{m}{\rho d}$. Подставим это выражение в (3): $\frac{2\alpha m}{d^2 \rho} = Mg$, откуда $\alpha = \frac{Mg\rho d^2}{2m}$; $\alpha = 0{,}5$ Н/м.

7.68. В открытом капилляре, внутренний диаметр которого $d = 1$ мм, находится капля воды. При вертикальном положении капилляра капля образует столбик высотой h, равной: а) 2см, б) 4см, в) 2,98см. Найти радиусы кривизны R_1 и R_2 верхнего и нижнего менисков в каждом из этих случаев. Смачивание считать полным.

Решение:

Верхний мениск будет вогнут, давление p_1, вызванное кривизной этого мениска, направлено вверх и равно

$p_1 = \frac{2\alpha}{R_1}$, где R_1 — радиус кривизны верхнего мениска.

При полном смачивании $p_1 = \frac{2\alpha}{r}$, где r — радиус капилляра. Гидростатическое давление столба жидкости p_2 направлено вниз; $p_2 = \rho g h$. Если $p_1 > p_2$, то результирующее давление, направленное вверх, заставляет нижний мениск быть вогнутым. При этом давление p_3, вызванное кривизной нижнего мениска, направлено вниз и равно $p_3 = \frac{2\alpha}{R_2}$, где R_2 — радиус кривизны нижнего мениска. В равновесии $p_1 = p_2 + p_3$. Если $p_1 < p_2$, то результирующее давление направлено вниз и нижний мениск будет выпуклым. При этом давление $p_3 = \frac{2\alpha}{R_2}$ будет направлено уже вверх. В этом случае $p_1 + p_3 = p_2$. Если $p_1 = p_2$, то нижний мениск будет плоским и $p_3 = 0$. Подставив числовые данные, получим: а) $R_1 = 0{,}5$ мм, $R_2 = -1{,}52$ мм; б) $R_1 = 0{,}5$ мм, $R_2 = 1{,}46$ мм; в) $R_1 = 0{,}5$ мм, $R_2 = \infty$.

7.69. Горизонтальный капилляр, внутренний диаметр которого $d = 2$ мм, наполнен водой так, что в нем образовался столбик длиной $h = 10$ см. Какая масса m воды вытечет из капилляра, если его поставить вертикально? Смачивание считать полным. Указание: учесть, что предельная длина столбика воды, оставшейся в капилляре, должна соответствовать радиусу кривизны нижнего мениска, равному радиусу капилляра.

Решение:

При вертикальном положении капилляра верхний мениск вогнут и давление, вызванное кривизной этого мениска, всегда направлено вверх и равно $p_1 = \frac{2\alpha}{r} = \frac{4\alpha}{d}$, где d — диаметр капилляра. Гидростатическое давление столба жидкости всегда направлено вниз и равно $p_2 = \rho g h$. Предельная длина столбика воды, оставшейся в капилляре, должна соответствовать раднусу кривизны нижнего мениска, равному радиусу капилляра, поэтому $p_1 < p_2$, результирующее давление будет направлено вниз и нижний мениск будет выпуклым. При этом давление $p_3 = \frac{4\alpha}{d}$ будет направлено уже вверх и $p_1 + p_3 = p_2$ или $\frac{8\alpha}{d} = \rho g h_1$, откуда $h_1 = \frac{8\alpha}{\rho g d}$ — высота столбика жидкости, оставшейся в капилляре $m_1 = \rho S h_1$, а ее первоначальная масса $m_2 = \rho S h_0$, тогда масса жидкости, которая выльется $m = m_0 - m_1 = \rho S(h_0 - h_1)$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения капилляра, поэтому окончательно $m = \frac{\rho \pi d^2}{4}\left(h_0 - \frac{8\alpha}{\rho g d}\right) = 0{,}22$ г.

7.70. В открытом вертикальном капилляре, внутренний радиус которого $r = 0{,}6$ мм, находится столбик спирта. Нижний мениск этого столбика нависает на нижний конец капилляра. Найти высоту h столбика спирта, при которой радиус кривизны R нижнего мениска равен: а) $3r$; б) $2r$; в) r. Смачивание считать полным.

Решение:

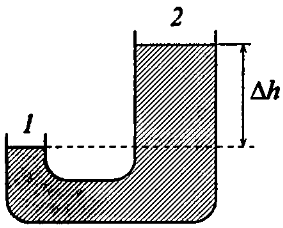
По условию, нижний мениск выпуклый, тогда результирующее давление направлено вниз, следовательно (см.

задачу 7.69), $p_1 + p_3 = p_2$, где $p_1 = \frac{2\alpha}{r}$, $p_2 = \rho g h$ и $p_3 = \frac{2\alpha}{R}$. Тогда $\frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha}{R} = \rho g h$, откуда $h = \frac{2\alpha(R+r)}{\rho g r R}$.

а) Если $R = 3r$, то $h = \frac{8\alpha}{3\rho g r} = 11{,}5$ мм. б) Если $R = 2r$, то $h = \frac{3\alpha}{\rho g r} = 12{,}9$ мм. в) Если $R = r$, то $h = \frac{4\alpha}{\rho g r} = 17{,}2$ мм.

7.71. Трубка, изображенная на рисунке, открыта с обоих концов и наполнена керосином. Внутренние радиусы трубок 1 и 2 равны $r_1 = 0{,}5$ мм и $r_2 = 0{,}9$ мм. При какой разности уровней Δh мениск на конце трубки 1 будет: а) вогнутым с радиусом кривизны $R = r_1$; б) плоским; в) выпуклым с радиусом кривизны $R = r_2$; г) выпуклым с радиусом кривизны $R = r_1$? Смачивание считать полным.

Решение:



Высота поднятия жидкости в капилляре $h = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g r}$. Тогда для каждой трубки $h_1 = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g R}$ и $h_2 = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g r_2}$. Т. к. по условию смачивание полное, то во второй трубке всегда $\theta = 0$, отсюда $\cos\theta = 1$. Тогда перепад высот в трубках $\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{2\alpha}{\rho g}\left(\frac{\cos\theta}{R} - \frac{1}{r_2}\right)$. а) Мениск на конце трубки 1 будет вогнутым, с $R = r_1$, если $\theta = 0$, отсюда $\cos\theta = 1$ —

полное смачивание $\Delta h=\frac{2\alpha}{\rho g}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=6{,}8$ мм. б) Мениск на конце трубки 1 будет плоским, если $\theta=\frac{\pi}{2}$, отсюда $\cos\theta=0$; $\Delta h=\frac{2\alpha}{\rho g r_2}=8{,}5$ мм. в) Мениск на конце трубки 1 будет выпуклым, с $R=r_2$, если $\theta=\pi$, отсюда $\cos\theta=-1$ $\Delta h=\frac{2\alpha}{\rho g}\frac{2}{r_2}=17$ мм. г) Мениск на конце трубки 1 будет выпуклым, с $R=r_1$, если $\theta=\pi$, отсюда $\cos\theta=-1$ — полное несмачивание $\Delta h=\frac{2\alpha}{\rho g}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=23{,}8$ мм.

7.72. В широкий сосуд с водой опущен капилляр так, что верхний его конец находится выше уровня воды в сосуде на $h=2$ см. Внутренний радиус капилляра $r=0{,}5$ мм. Найти радиус кривизны R мениска в капилляре. Смачивание считать полным.

Решение:

Если бы капилляр был достаточно длинным, то вода поднялась бы в нем на высоту $h'=\frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g r}=2{,}98$ см. Но высота капилляра над водой $h<h'$. К мениску приложены давление $p_0=\frac{2\alpha}{R}$, вызванное кривизной мениска и направленное вверх, и гидростатическое давление $p=\rho g h$. Для любой высоты h будем иметь $\rho g h=\frac{2\alpha}{R}$, откуда $R=\frac{2\alpha}{\rho g h}=0{,}75$ мм.

7.73. Ареометр плавает в воде, полностью смачивающей его стенки. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра $d = 9$ мм. На сколько изменится глубина погружения ареометра, если на поверхность воды налить несколько капель спирта?

Решение:

На плавающий ареометр действуют сила Архимеда $\vec{F}_A$, направленная вверх, сила тяжести $\vec{P}$, направленная вниз, сила поверхностного натяжения $\vec{F}$, направленная вниз, т. к. смачивание является полным. Условие равновесия имеет вид: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_A = 0$ или в скалярном виде $P + F = F_A$. Имеем $P = mg$; $F = 2\pi r\alpha = \pi d\alpha$; $F_A = \rho g \times$ $\times (V + Sh)$, где V — объем ареометра (без трубки), S — площадь поперечного сечения трубки ареометра, h — длина трубки. Тогда для воды $mg + \pi d\alpha_1 = \rho g(V + Sh_1)$; для спирта $mg + \pi d\alpha_2 = \rho g(V + Sh_2)$ (считаем, что плотность воды не изменилась). Решая совместно эти два уравнения, найдем $\Delta h = \dfrac{4(\alpha_1 - \alpha_2)}{\rho g d} = 2{,}4$ мм.

7.74. Ареометр плавает в жидкости, полностью смачивающей его стенки. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра $d = 9$ мм. Плотность жидкости $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, поверхностное натяжение жидкости $\alpha = 0{,}03$ Н/м. На сколько изменится глубина погружения ареометра, если вследствие замасливания ареометр стал полностью несмачиваемым этой жидкостью?

Решение:

На ареометр, плавающий в жидкости, действуют: сила тяжести P, направленная вниз, сила поверхностного натяжения $F = \pi d\alpha$, направленная при полном смачивании вниз, а при полном несмачивании вверх и сила Архимеда $F_A = \rho g(V + Sh)$, направленная вверх, где V — объем цилиндрической части ареометра, S — площадь поперечного сечения трубки ареометра и h — длина цилиндрической трубки, находящейся в жидкости. Условие равновесия при полном смачивании $P + F = F_{A1}$, а при полном несмачивании $P = F + F_{A2}$, следовательно, $F_{A1} - F = F + F_{A2}$ или $\rho gV + \rho gSh_1 - \pi d\alpha = \pi d\alpha + \rho gV + + \rho gSh_2$. Отсюда $\rho gS(h_1 - h_2) = \rho gS\Delta h = 2\pi d\alpha$ и, окончательно, $\Delta h = \dfrac{2\pi d\alpha}{\rho gS} = \dfrac{2\pi d\alpha}{\rho g\dfrac{\pi d^2}{4}} = \dfrac{8\alpha}{\rho gd} = 3{,}4$ мм.

7.75. При растворении массы $m = 10$ г сахара $(C_{12}H_{22}O_{11})$ в объеме $V = 0{,}5$ л воды осмотическое давление раствора $p = 152$ кПа. При какой температуре T находится раствор? Диссоциация молекул сахара отсутствует.

Решение:

Осмотическое давление раствора связано с термодинамической температурой формулой Вант-Гоффа $p = CRT$. Молярная концентрация раствора $C = \dfrac{m}{\mu V}$, где $\mu = 0{,}342$ кг/моль, тогда $p = \dfrac{mRT}{\mu V}$, откуда $T = \dfrac{\mu Vp}{mR}$. Подставляя в полученное выражение числовые данные, получим: $T = \dfrac{0{,}342 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 152 \cdot 10^3}{10^{-2} \cdot 8{,}31} = 313$ К.

7.76. Осмотическое давление раствора, находящегося при температуре $t = 87°$ С, $p = 165$ кПа. Какое число N молекул воды приходится на одну молекулу растворенного вещества в этом растворе? Диссоциация молекул вещества отсутствует.

Решение:

Осмотическое давление (см. задачу 7.75) $p = CRT$. Т. к. по условию диссоциация молекул в растворе отсутствует, то молярная концентрация $C = \frac{N_1}{N_A}$, тогда $p = \frac{N_1 RT}{N_A} = N_1 kT$, откуда $N_1 = \frac{\nu N_A}{V}$, где $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V}{\mu}$, тогда $N_2 = \frac{\rho N_A}{\mu}$.

Следовательно, $N = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\rho N_A}{\mu}\frac{kT}{p} = \frac{\rho RT}{\mu p} = 1007$ молекул.

7.77. Масса $m = 2$ г поваренной соли растворена в объеме $V = 0{,}5$ л воды. Степень диссоциации молекул поваренной соли $\alpha = 0{,}75$. Найти осмотическое давление p раствора при температуре $t = 17°$ С.

Решение:

Если масса всей растворенной в воде поваренной соли равна m, а степень диссоциации α, то масса диссоциированной соли равна αm, а масса недиссоциированной — $(1-\alpha)m$. Тогда молярная концентрация раствора $C = \frac{((1-\alpha)m)/\mu + \alpha m/(2\mu_1) + \alpha m/(2\mu_2)}{V}$;

$C = \frac{m(2\mu_1\mu_2(1-\alpha) + \alpha\mu^2)}{2\mu\mu_1\mu_2 V} = 124{,}5$ моль/м^3. Следовательно, осмотическое давление $p = CRT = 300$ кПа.

7.78. Степень диссоциации молекул поваренной соли при растворении ее в воде $\alpha = 0{,}4$. При этом осмотическое давление раствора, находящегося при температуре $t = 27°$ C, $p = 118{,}6$ кПа. Какая масса m поваренной соли растворена в объеме $V = 1$ л воды?

Решение:

Молярная концентрация частично диссоциированного раствора поваренной соли (см. задачу 7.78) $C = \frac{m\left(2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2\right)}{2\mu\mu_1\mu_2 V}$. С другой стороны, из формулы Вант-Гоффа $C = \frac{P}{RT}$, тогда $\frac{P}{RT} = \frac{m\left(2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2\right)}{2\mu\mu_1\mu_2 V}$, откуда $m = \frac{2\mu\mu_1\mu_2 Vp}{RT\left(2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2\right)} = 1{,}93$ г.

7.79. Масса $m = 2{,}5$ г поваренной соли растворена в объеме $V = 1$ л воды. Температура раствора $t = 18°$ C. Осмотическое давление раствора $p = 160$ кПа. Какова степень диссоциации молекул поваренной соли в этом случае? Сколько частиц растворенного вещества находится в единице объема раствора?

Решение:

Масса растворенной в воде частично диссоциированной соли (см. задачу 7.78) равна: $m = \frac{2\mu\mu_1\mu_2 Vp}{RT\left(2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2\right)}$, откуда получим $2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2 = \frac{2\mu\mu_1\mu_2 Vp}{mRT}$ или $\alpha\mu^2 - 2\alpha\mu_1\mu_2 = \frac{2\mu_1\mu_2(\mu Vp - mRT)}{mRT}$. Из последнего выражения, после преобразований, найдем степень диссоциации $\alpha = \frac{2\mu_1\mu_2(\mu Vp - mRT)}{mRT\left(\mu^2 - 2\mu_1\mu_2\right)} = 0{,}52$. Число частиц в единице объема (см. задачу 7.76) $n = \frac{p}{kT} = 3{,}98\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

7.80. Масса $m = 40$ г сахара $(C_{12}H_{22}O_{11})$ растворена в объеме $V = 0{,}5$ л воды. Температура раствора $t = 50°$ С. Найти давление p насыщенного водяного пара над раствором.

Решение:

Давление насыщенного пара над раствором меньше, чем над чистым растворителем (водой). При достаточно малой концентрации раствора относительное уменьшение давления насыщенного пара над раствором определяется законом Рауля $\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{\nu'}{\nu + \nu'}$, где p_0 — давление насыщенного пара над чистым растворителем, p — давление насыщенного пара над раствором, ν — количество жидкости. Отсюда $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu + \nu'}\right)$. По таблице 8 находим для $t = 50°$ С давление насыщенного водяного пара $p_0 = 12302$ Па. Количество сахара $\nu' = \frac{m}{\mu}$, где $\mu = 0{,}342$ кг/моль, количество воды $\nu = \frac{\rho V}{\mu_1}$, где $\mu = 0{,}018$ кг/моль. Тогда $p = p_0\left(1 - \frac{m\mu_1}{\rho V\mu + m\mu_1}\right) = 12{,}3$ кПа.

7.81. Давление насыщенного пара над раствором при температуре $t = 30°$ С равно $p_1 = 4{,}2$ кПа. Найти давление p_2 насыщенного водяного пара над этим раствором при температуре $t_2 = 60°$ С.

Решение:

Давление насыщенного пара над раствором (см. задачу 7.80) $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu + \nu'}\right)$. Т. к. количество растворенного вещества ν' и растворителя ν не зависит от температуры, то $\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_0(t_1)}{p_0(t_2)}$, тогда $p_2 = \frac{p_1 p_0(t_2)}{p_0(t_1)}$. По таблице 8 находим $p_0(t_1) = 4229$ Па, $p_0(t_2) = 19817$ Па, тогда $p = 19{,}68$ кПа.

7.82. Давление p насыщенного пара над раствором в 1,02 раза меньше давления p_0 насыщенного пара чистой воды. Какое число N молекул воды приходится на одну молекулу растворенного вещества?

Решение:

Давление насыщенного пара над раствором (см. задачу 7.80) $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu - \nu'}\right)$, отсюда $\frac{p_0}{p} = \frac{\nu - \nu'}{\nu - 2\nu'} = \frac{\nu/\nu' - 1}{\nu/\nu' - 2}$ — (1). Число молекул растворенного вещества и растворителя (см. задачу 7.76) соответственно равно $N = \frac{\nu N_A}{V}$ и $N' = \frac{\nu' N_A}{V}$, тогда $\frac{N}{N'} = \frac{\nu}{\nu'}$ — (2). Из (1) имеем $p_0\left(\frac{\nu}{\nu'} - 2\right) = p\left(\frac{\nu}{\nu'} - 1\right)$ или $\frac{\nu}{\nu'}(p_0 - p) = 2p_0 - p$, откуда $\frac{\nu}{\nu'} = \frac{2p_0 - p}{p_0 - p} = \frac{2p_0/p - 1}{p_0/p - 1}$ или с учетом (2) $\frac{N}{N'} = \frac{2p_0/p - 1}{p_0/p - 1}$.

Отсюда окончательно $N = \frac{N'(2p_0/p - 1)}{p_0/p - 1} = 52$ молекулы.

7.83. Масса $m = 100$ г нелетучего вещества растворена в объеме $V = 1$ л воды. Температура раствора $t = 90°$ С. Давление насыщениого пара над раствором $p = 68{,}8$ кПа. Найти молярную массу μ растворенного вещества.

Решение:

Закон Рауля можно применить для определения молярной массы вещества. Действительно, закон Рауля можно записать так: $\frac{p_0}{p_0 - p} = \frac{\nu}{\nu'} + 1$, или $\frac{p_0}{p_0 - p} - 1 = \frac{p}{p_0 - p} = \frac{\nu}{\nu'}$ — (1).

Замечая, что $\nu = \frac{m}{\mu}$ и $\nu' = \frac{m'}{\mu'}$, нетрудно из (1) получить $\mu' = \mu \frac{m'}{m} \frac{p}{p_0 - p}$ — (2), где m — масса растворителя, μ — молярная масса растворителя и μ' — молярная масса растворенного вещества. Подставляя числовые данные, получим $\mu' = 0{,}092$ кг/моль.

7.84. Нелетучее вещество с молярной массой $\mu = 0{,}060$ кг/моль растворено в воде. Температура раствора $t = 80°$ С. Давление насыщенного пара над раствором $p = 47{,}1$ кПа. Найти осмотическое давление p_{oc} раствора.

Решение:

Осмотическое давление (см. задачу 7.75) $p_{oc} = \frac{mRT}{\mu V}$. Давление насыщенного пара над раствором (см. задачу 7.80) $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu + \nu'}\right)$, отсюда $\nu' = \frac{(p_0 - p)\nu}{p}$. Число молей воды $\nu = \frac{m}{\mu_1} = \frac{\rho V}{\mu_1}$, тогда $\nu' = \frac{(p_0 - p)\rho V}{p\mu_1}$. С другой стороны, $\nu' = \dfrac{m}{\mu}$, тогда $m = \nu'\mu = \dfrac{(p_0 - p)\rho V\mu}{p\mu_1}$. Для $t = 80°$ С давление насыщенного пара над чистой водой $p_0 = 47215$ Па, следовательно, осмотическое давление $p_{ос} = \dfrac{RT}{\mu V}\dfrac{(p_0 - p)\rho V\mu}{p\mu_1} = \dfrac{(p_0 - p)\rho RT}{p\mu_1}$;

$$p_{ос} = \frac{(47215 - 47100)\cdot 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 353}{47{,}1 \cdot 10^3 \cdot 0{,}018} = 398\ кПа^*.$$

---

* Ответ в данной задаче не совпадает с ответом первоисточника: $p_{ос} = 925$ кПа.

§ 8. Твердые тела

При решении задач этого раздела используются данные таблиц 11, 12, 13 из приложения, кроме того, следует учесть указание к § 5.

8.1. Изменение энтропии при плавлении количества $\nu = 1$ кмоль льда $\Delta S = 22{,}2$ кДж/К. На сколько изменится температура плавления льда при увеличении внешнего давления на $\Delta p = 100$ кПа?

Решение:
Согласно уравнению Клаузиуса — Клапейрона изменение температуры $\Delta T = \dfrac{\Delta p T(V_ж - V_т)}{q_0}$ — (1). Изменение энтропии $\Delta S = \dfrac{m\lambda_0}{T} = \dfrac{\nu q_0}{T}$ — (2), где λ_0 — удельная теплота плавления, q_0 — молярная теплота плавления, m — масса. Из (2) $\dfrac{T}{q_0} = \dfrac{\nu}{\Delta S}$, подставляя это выражение в (1), получим $\Delta T = \Delta p(V_ж - V_т)\dfrac{\nu}{\Delta S} = 0{,}009$ К.

8.2. При давлении $p_1 = 100$ кПа температура плавления олова $t_1 = 231{,}9°$ С, а при давлении $p_2 = 10$ МПа она равна $t_2 = 232{,}2°$ С. Плотность жидкого олова $\rho = 7{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найти изменение энтропии ΔS при плавлении количества $\nu = 1$ кмоль олова.

Решение:
Из уравнения Клаузиуса — Клапейрона находим изменение температуры $\Delta T = \dfrac{\Delta p T(V_ж - V_т)}{q_0}$ — (1). С другой сто-

роны, изменение энтропии $\Delta S = \frac{m\lambda_0}{T} = \frac{\nu q_0}{T}$ — (2), где λ_0 — удельная теплота плавления, q_0 — молярная теплота плавления. Из уравнений (1) и (2) имеем $\Delta S = \frac{\Delta p(V_ж - V_т)\nu}{\Delta T} = \frac{(p_2 - p_1)(V_ж - V_т)\nu}{T_2 - T_1}$. Поскольку молярные объемы твердого и жидкого олова соответственно равны $V_т = \frac{\mu}{\rho_т}$ и $V_ж = \frac{\mu}{\rho_ж}$, то, окончательно, получим $\Delta S = \frac{(p_2 - p_1)(\rho_т - \rho_ж)\mu\nu}{(T_2 - T_1)\rho_т\rho_ж} = 15{,}5$ кДж/К.

8.3. Температура плавления железа изменяется на $\Delta T = 0{,}012$ К при изменении давления на $\Delta p = 98$ кПа. На сколько меняется при плавлении объем количества $\nu = 1$ кмоль железа?

Решение:

Из уравнения Клаузиуса — Клапейрона находим изменение температуры плавления $\Delta T = \frac{\Delta p T(V_ж - V_т)}{q_0}$, отсюда $\Delta V_м = V_ж - V_т = \frac{q_0 \Delta T}{T\Delta p}$ — изменение молярного объема, тогда $\Delta V = \nu\Delta V_м = \frac{q_0 \nu \Delta T}{T\Delta p}$. Т. к. удельная и молярная теплота плавления связаны между собой как $q_0 = \mu\lambda_0$, тогда, окончательно, $\Delta V = \frac{\mu\lambda_0\nu\Delta T}{T\Delta p} = 1{,}03$ л.

8.4. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти удельную теплоемкость c: а) меди; б) железа; в) алюминия.

Решение:

При очень низких температурах для твердых тел имеет место закон Дюлонга и Пти, согласно которому молярная теплоемкость всех химически простых твердых тел равна приблизительно $3R = 25$ Дж/(моль·К). С другой стороны, удельная и молярная теплоемкости связаны соотношением $c = \mu c$, тогда $3R = \mu c$, откуда $c = 3R/\mu$. а) Молярная масса меди $\mu = 63{,}55 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, отсюда $c = 393$ Дж/(моль·К). б) Молярная масса железа $\mu = 55{,}84 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тогда $c = 448$ Дж/(моль·К). в) Молярная масса алюминия $\mu = 26{,}98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тогда $c = 927$ Дж/(моль·К).

8.5. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти, из какого материала сделан металлический шарик массой $m = 0{,}025$ кг, если известно, что для его нагревания от $t_1 = 10°$ С до $t_2 = 30°$ С потребовалось затратить количество теплоты $Q = 117$ Дж.

Решение:

Затраченное количество теплоты можно найти по формуле $Q = mc(T_2 - T_1)$. Согласно закоиу Дюлонга и Пти молярная теплоемкость $C \approx 3R$. Молярная и удельная теплоемкости связаны соотношением $C = \mu c$, откуда $c = \frac{C}{\mu} = \frac{3R}{\mu}$. Тогда $Q = m\frac{3R}{\mu}(T_2 - T_1)$, откуда $\mu = \frac{3mR(T_2 - T_1)}{Q}$. Подставив числовые данные, найдем $\mu = 0{,}107$ кг/моль, следовательно, шарик сделан из серебра.

8.6. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти, во сколько раз удельная теплоемкость алюминия больше удельной теплоемкости платины.

Решение:

Удельная теплоемкость всех химически простых твердых тел (см. задачу 8.4) $c=\frac{3R}{\mu}$, тогда $\frac{c_1}{c_2}=\frac{\mu_2}{\mu_1}=7{,}23$.

8.7. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v=400$ м/с, ударяется о стенку и входит в нее. Считая, что 10% кинетической энергии пули идет на ее нагреваиие, найти, на сколько градусов нагрелась пуля. Удельную теплоемкость свинца найти по закону Дюлонга и Пти.

Решение:

Кинетическая энергия пули $W_к=\frac{mv^2}{2}$. Количество тепла, полученное пулей, $Q=cm\Delta T$. Удельная теплоемкость всех химически простых твердых тел (см. задачу 8.4) $c=\frac{3R}{\mu}$, тогда $Q=\frac{3Rm\Delta T}{\mu}$. Согласно закону сохранения энергии $Q=\eta W_к$, тогда $\frac{3Rm\Delta T}{\mu}=\frac{\eta mv^2}{2}$, откуда изменение температуры $\Delta T=\frac{\eta\mu v^2}{6R}=66$ К.

8.8. Пластинки из меди (толщиной $d_1=9$ мм) и железа (толщииой $d_2=3$ мм) сложены вместе. Виешняя поверхность медной пластинки поддерживается при температуре $t_1=50°$ С, внешняя поверхность железной — при температуре $t_2=0°$ С. Найти температуру t поверхности их соприкосновения. Площадь пластинок велика по сравнению с толщиной.

Решение:

Количество теплоты, прошедшее через сложенные вместе медную и железную пластинки, определяется формулой $Q = \lambda_1 \frac{t_1 - t}{d_1} S_\tau = \lambda_2 \frac{t - t_2}{d_2} S_\tau$, откуда температура поверхности соприкосновения $t = \frac{\lambda_1 t_1 d_2 + \lambda_2 t_2 d_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} = 34{,}5°\ C$.

8.9. Наружная поверхность стены имеет температуру $t_1 = -20°\ C$, внутренняя — температуру $t_2 = 20°\ C$. Толщина стены $d = 40$ см. Найти теплопроводность λ материала стены, если через единицу ее поверхности за время $\tau = 1$ ч проходит количество теплоты $Q = 460{,}5$ кДж/м^2.

Решение:

Количество теплоты Q, переносимое вследствие теплопроводности за время $\Delta\tau$, определяется формулой $Q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} = \Delta S \Delta\tau$, где $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ — градиент температуры в направлении, перпендикулярном площадке ΔS, λ — теплопроводность. В нашем случае $\Delta T = T_2 - T_1$, $\Delta x = d$, $\Delta S = 1$ м^2 и $\Delta\tau = \tau$, тогда $Q = \frac{(T_2 - T_1)\lambda\tau}{d}$. Отсюда теплопроводность $\lambda = \frac{Qd}{(T_2 - T_1)\tau} = 1{,}28$ Вт/(м·К).

8.10. Какое количество теплоты Q теряет за время $\tau = 1$ мин комната с площадью пола $S = 20$ м^2 и высотой $h = 3$ м через четыре кирпичные стены? Температура в комнате $t_1 = 15°\ C$, температура наружного воздуха $t_2 = -20°\ C$. Теплопроводность кирпича $\lambda = 0{,}84$ Вт/(м·К). Толщина стен $d = 50$ см. Потерями тепла через пол и потолок пренебречь.

Решение:

В первом приближении комнату можно считать квадратной, тогда площадь боковых стен $\Delta S = 4ah$, где $a = \sqrt{S}$, следовательно, $\Delta S = 4\sqrt{S}h$. Количество тепла, потерянное комнатой за время τ (см. задачу 8.9), равно

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)\lambda \Delta S \tau}{d} = \frac{4(T_1 - T_2)\lambda \sqrt{S} h \tau}{d} = 190 \text{ кДж.}$$

8.11. Один конец железного стержня поддерживается при температуре $t_1 = 100°$ С, другой упирается в лед. Длина стержня $l = 14$ см, площадь поперечного сечения $S = 2\text{ см}^2$. Найти количество теплоты Q_τ, протекающее в единицу времени вдоль стержня. Какая масса m льда растает за время $\tau = 40$ мин? Потерями тепла через стенки пренебречь.

Решение:

Количество теплоты, протекающее в единицу времени вдоль стержня, $Q_\tau = \dfrac{Q}{\Delta\tau} = \dfrac{(T_1 - T_0)\lambda S}{l} = 8{,}38$ Дж/с. Т. к. по условию потерями тепла через стенки можно пренебречь, то по закону сохранения энергии $Q_\tau \tau = qm$, откуда

$$m = \frac{Q_\tau \tau}{q} = 60 \text{ г.}$$

8.12. Площадь поперечного сечения медного стержня $S = 10\text{ см}^2$, длина стержня $l = 50$ см. Разность температур на концах стержня $\Delta T = 15$ К. Какое количество теплоты Q_τ проходит в единицу времени через стержень? Потерями тепла пренебречь.

Решение:

Количество тепла, проходящее за единицу времени через стержень (см. задачу 8.11), $Q_\tau = \dfrac{\Delta T \lambda S}{l} = 11{,}7$ Дж/с.

8.13. На плите стоит алюминиевая кастрюля диаметром $D = 15$ см, наполненная водой. Вода кипит, и при этом за время $\tau = 1$ мин образуется масса $m = 300$ г водяного пара. Найти температуру t внешней поверхности дна кастрюли, если толщина его $d = 2$ мм. Потерями тепла пренебречь.

Решение:

Количество тепла, которое поучает кастрюля за время τ, $Q = \frac{(T - T_к)\lambda S\tau}{d}$. Т. к. по условию потерями тепла можно пренебречь, то $Q = rm$, тогда по закону сохранения энергии $\frac{(t - t_к)\lambda S\tau}{d} = rm$. Отсюда, с учетом того, что площадь дна кастрюли $S = \frac{\pi D^2}{4}$, температура внешней поверхности дна кастрюли $t = \frac{4drm}{\lambda\pi D^2\tau} + t_к = 106°$ С.

8.14. Металлический цилиндрический сосуд радиусом $R = 9$ см наполнен льдом при температуре $t_1 = 0°$ С. Сосуд теплоизолирован слоем пробки толщиной $d = 1$ см. Через какое время τ весь лед, находящийся в сосуде, растает, если температура наружного воздуха $t_2 = 25°$ С? Считать, что обмен тепла происходит только через боковую поверхность сосуда средним радиусом $R_0 = 9{,}5$ см.

Решение:

Объем сосуда $V = \pi R^2 h$, где h — высота сосуда, тогда масса льда в сосуде $m = \rho V = \rho\pi R^2 h$. Количество тепла, необходимое для расплавления всего льда в сосуде $Q = qm = q\rho\pi R^2 h$. Т. к. по условию теплообмен идет только через боковую поверхность, то ее площадь $\Delta S = 2\pi R_0 h$, тогда количество тепла, проходящее через боковую поверхность за время τ: $Q=\frac{(t_2-t_1)\lambda 2\pi R_0 h\tau}{d}$. По закону сохранения энергии $q\rho R^2=\frac{2(t_2-t_1)\lambda R_0\tau}{d}$, откуда $\tau=\frac{q\rho R^2 d}{2(t_2-t_1)\lambda R_0}=28{,}6$ часов.

8.15. Какую силу F надо приложить к концам стального стержня с площадью поперечного сечения $S=10\text{ см}^2$, чтобы не дать ему расшириться при нагревании от $t_0=0°$ С до $t=30°$ С?

Решение:

Чтобы стержень не удлинялся при нагревании, его нужно сжимать с силой $F=\frac{\Delta lES}{l_0}$ — (1), где E — модуль Юнга, $\Delta l=l-l_0=l_0 at$ — (2) — изменение длины стержня при нагревании. Подставляя (2) в (1), найдем $F=ESat=71$ кН.

8.16. К стальной проволоке радиусом $r=1$ мм подвешен груз. Под действием этого груза проволока получила такое же удлинение, как при нагревании на $\Delta t=20°$ С. Найти массу m груза.

Решение:

При повышении температуры длина твердых тел возрастает, в первом приближении, линейно с температурой: $l=l_0(1+at)$, где l и l_0 — длина стержня соответственно при температуре t и t_0. Тогда относительное удлинение $\frac{l-l_0}{l}=\frac{\Delta l}{l}=a\Delta t$, откуда $\Delta l=la\Delta t$ — (1), где a — температурный коэффициент линейного расширения. С другой стороны, по закону Гука $\frac{\Delta l}{l}=\frac{p}{E}=\frac{mg}{SE}$, где $S=\pi R^2$ — площадь поверхностного сечения проволоки, E — модуль Юнга, тогда $\Delta l = \frac{lmg}{\pi R^2 E}$ — (2). Приравнивая левые части уравнений (1) и (2), получим $a\Delta t = \frac{mg}{\pi r^2 E}$, откуда масса стержня $m = \frac{\pi r^2 E a \Delta t}{g} = 15$ кг.

8.17. Медная проволока натянута горячей при температуре $t_1 = 150° C$ между двумя прочными неподвижными стенками. При какой температуре t_2, остывая, разорвется проволока? Считать, что закон Гука справедлив вплоть до разрыва проволоки.

Решение:

Длина проволоки при температуре t_1 и t_2 соответственно равна $l_1 = l_0(1 + at_1)$ и $l_2 = l_0(1 + at_2)$. При остывании проволока укоротится на $\Delta l = l_1 - l_2 = l_0 a(t_1 - t_2)$ — (1), где a — температурный коэффициент линейного расширения. Проволока разорвется, если $\frac{\Delta l}{l_0} \geq \frac{p_{max}}{E}$ — (2), где E — модуль Юнга, p_{max} — предел прочности меди. В предельном случае из (1) и (2) имеем $a(t_1 - t_2) = \frac{p_{max}}{E}$, откуда $t_2 = t_1 - \frac{p_{max}}{aE} = 20° C$.

8.18. При нагревании некоторого металла от $t_0 = 0° C$ до $t = 500° C$ его плотность уменьшается в 1,027 раза. Найти для этого металла коэффициент линейного расширения a, считая его постоянным в данном интервале температур.

Решение:

Плотность металла при температуре t равна $\rho = m/V$, тогда его плотность при температуре t_0 равна $\rho_0 = m/V_0$. Относительное изменение объема металла при нагревании

$$\frac{\Delta V}{V_0}=\frac{V-V_0}{V_0}=\frac{\frac{m}{\rho}-\frac{m}{\rho_0}}{\frac{m}{\rho_0}}=\frac{\rho_0-\rho}{\rho},\text{ или }\frac{\Delta V}{V_0}=\frac{\rho_0}{\rho}-1\text{ — (1).}$$

С другой стороны, $\frac{\Delta V}{V_0}=b\Delta T$, где b — температурный коэффициент объемного расширения. Т. к. металл изотропный, то температурный коэффициент линейного расширения $a=\frac{b}{3}$, тогда $\frac{\Delta V}{V_0}=3a(t-t_0)$ — (2). Приравнивая в выражениях (1) и (2) правые части, имеем $\frac{\rho_0}{\rho}-1=3a(t-t_0)$, откуда температурный коэффициент линейного расширения $a=\frac{\rho_0/\rho-1}{3(t-t_0)}=1{,}8\cdot10^{-5}\text{ К}^{-1}$.

8.19. Какую длину l_0 должны иметь при температуре $t_0=0°$ С стальной и медный стержни, чтобы при любой температуре стальной стержень был длиннее медного на $\Delta l=5$ см?

Решение:
Для любой температуры длина стального стержня равна $l_1=l_{01}(1+a_1t)=l_{01}+l_{01}a_1t$ — (1), медного стержня — $l_2=l_{02}(1+a_2t)=l_{02}+l_{02}a_2t$ — (2). По условию $l_1-l_2=\Delta l$, $l_{01}-l_{02}=\Delta l$ — (3). Решая совместно (1) — (3), получим $a_1l_{01}=a_2l_{02}$ — (4). Из уравнений (3) и (4) найдем длины обоих стержней при $t_0=0°$ С: $l_{02}=\frac{\Delta la_1}{a_2-a_1}=11$ см, $l_{01}=l_{02}+\Delta l=16$ см.

8.20. На нагревание медной болванки массой $m=1$ кг, находящейся при температуре $t_0=0°$ С, затрачено количество теплоты $Q = 138{,}2$ кДж. Во сколько раз при этом увеличился ее объем? Удельную теплоемкость меди найти по закону Дюлонга и Пти.

Решение:

Относительное изменение объема металла при нагревании от температуры t_0 до температуры t (см. задачу 8.18) $\frac{\Delta V}{V_0} = 3a(t - t_0)$, откуда $\frac{V}{V_0} = 3a(t - t_0) + 1$ — (1). Количество тепла, израсходованное на нагревание болванки $Q = cm(t - t_0)$, где c — удельная теплоемкость меди, которая по закону Дюлонга и Пти равна $c = \frac{3R}{\mu}$, где μ — молярная масса меди. Тогда $Q = \frac{3Rm}{\mu}(t - t_0)$, откуда разность температур $t - t_0 = \frac{Q\mu}{3Rm}$. После подстановки последнего выражения в уравнение (1) окончательно имеем $\frac{V}{V_0} = \frac{aQ\mu}{Rm} + 1 = 1{,}02$.

8.21. При растяжении медной проволоки, поперечное сечение которой $S = 1{,}5\ \text{мм}^2$, начало остаточной деформации наблюдалось при нагрузке $F = 44{,}1$ Н. Каков предел упругости p материала проволоки?

Решение:

Пределом упругости называется минимальное давление, при котором тело, после снятия нагрузки, уже не способно вернуться из деформированного состояния в первоначальное. По определению давления найдем $p_н = \frac{F}{S} = 29{,}4$ МПа.

8.22. Каким должен быть предельный диаметр d стального троса, чтобы он выдержал нагрузку $F = 9{,}8$ кН?

Решение:

Чтобы трос выдержал данную нагрузку, необходимо выполнение условия: $\frac{F}{S} \le P_{max}$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения троса, $p_{max} = 785\,\text{МПа}$ — предел прочности стали. В предельном случае $\frac{4F}{\pi d^2} = P_{max}$, откуда $d^2 = \frac{4F}{\pi p_{max}}$ или $d = \sqrt{\frac{F}{\pi p_{max}}} = 4\,\text{мм}$.

8.23. Найти длину l медной проволоки, которая, будучи подвешена вертикально, начинает рваться под действием собственной силы тяжести.

Решение:

Чтобы проволока начала рваться, необходимо выполнение условия: $\frac{mg}{S} \ge p_{max}$, где $m = \rho V = \rho Sl$ — масса проволоки, $p_{max} = 245\,\text{МПа}$ — предел прочности меди. В предельном случае $\rho gl = p_{max}$, откуда $l = \frac{p_{max}}{\rho g} = 2{,}9\,\text{км}$.

8.24. Решить предыдущую задачу для свинцовой проволоки.

Решение:

Чтобы проволока начала рваться, необходимо выполнение условия: $\frac{mg}{S} \ge p_{max}$, где $m = \rho V = \rho Sl$ — масса проволоки, $p_{max} = 20\,\text{МПа}$ — предел прочности свинца. В предельном случае $\rho gl = p_{max}$, откуда $l = \frac{p_{max}}{\rho g} = 180\,\text{м}$.

8.25. Для измерения глубины моря с парохода спустили гирю на стальном тросе. Какую наибольшую глубину l можно измерить таким способом? Плотность морской воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3. Массой гири по сравнению с массой троса пренебречь.

Решение.

На трос действует сила тяжести, направленная вниз, и сила Архимеда, направленная вверх, поэтому (см. задачу 8.22) $\frac{mg - F_A}{S} \le p_{max}$. Масса троса $m = \rho_ж V = \rho_ж lS$, а сила Архимеда равна весу воды, вытесненной тросом, т.е. $F_A = \rho_т gV = \rho_т glS$. Тогда в предельном случае имеем $(\rho_ж - \rho_т)gl = p_{max}$, откуда $l = \frac{p_{max}}{(\rho_ж - \rho_т)g} = 11{,}9$ км.

8.26. С крыши дома свешивается стальная проволока длиной $l = 40$ м и диаметром $d = 2$ мм. Какую нагрузку F может выдержать эта проволока? На сколько удлинится эта проволока, если на ней повиснет человек массой $m = 70$ кг? Будет ли наблюдаться остаточная деформация, когда человек отпустит проволоку? Предел упругости стали $p = 294$ МПа.

Решение:

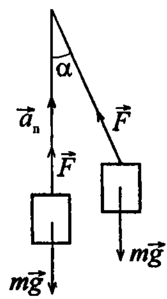
Чтобы проволока выдержала нагрузку, т.е. не разорвалась, необходимо выполнение условия: $\frac{m_0 g + F}{S} \le p_{max}$, где $m_0 = \rho V = \rho lS$ — масса проволоки, $p_{max} = 785$ МПа — предел прочности стали. Площадь поперечного сечения проволоки $S = \frac{\pi d^2}{4}$, тогда в предельном случае имеем $\frac{\rho l \pi d^2 g + 4F}{\pi d^2} = p_{max}$, откуда максимальная нагрузка, которую выдерживает проволока: $F = \frac{(p_{max} - \rho lg)\pi d^2}{4} = 2{,}45$ кН.

Если на проволоке повиснет человек, то по закону Гука

$\frac{\Delta l}{l}=\frac{p}{E}$, где $E=216$ ГПа — модуль Юнга стали, $p=\frac{(m_0+m)g}{S}=\frac{(\rho l\pi d+4m)g}{\pi d^2}=221$ МПа — суммарное давление человека и собственного веса проволоки. Тогда удлинение проволоки $\Delta l=\frac{pl}{E}=4$ см. Поскольку $p<p_н$, где $p_н=294$ МПа — предел прочности стали, то остаточная деформация наблюдаться не будет.

8.27. К стальной проволоке радиусом $r=1$ мм подвешен груз массой $m=100$ кг. На какой наибольший угол α можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении этим грузом положения равновесия?

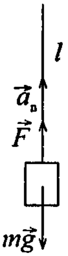
Решение:



На проволоку действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}$. По второму закону Ньютона в момент прохождения положения равновесия $F-mg=ma_n$, где a_n — нормальное ускорение. В стартовом положении, при отклонении на угол α, нормальное ускорение $a_n=0$, тогда $F\cos\alpha-mg=0$, откуда $F=\frac{mg}{\cos\alpha}$. Проволока разорвется, если $\frac{F}{S}\ge p_{max}$, где $S=\pi r^2$ — площадь поперечного сечения проволоки, p_{max} — предел прочности стали. Следовательно, в предельном случае имеем $\frac{mg}{\pi r^2\cos\alpha}=p_{max}$, откуда $\cos\alpha=\frac{mg}{\pi r^2 p_{max}}$, следовательно, наибольший угол $\alpha=\arccos\left(\frac{mg}{\pi r^2 p_{max}}\right)=75{,}5°$.

8.28. К железной проволоке длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 1$ мм привязана гиря массой $m = 1$ кг. С какой частотой n можно равномерно вращать в вертикальной плоскости такую проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась?

Решение:



Проволока будет максимально удлиняться в крайнем нижнем положении, т.е. сила тяжести в любой точке всегда направлена вертикально вниз. Следовательно, для крайнего нижнего положения по второму закону Ньютона имеем $F - mg = ma_n$ — (1), где $a_n = \frac{v^2}{l}$ — нормальное ускорение. Линейная скорость вращения гири $v = \frac{2\pi l}{T} = 2l\pi n$, где T и n соответственно период и частота вращения гири, тогда нормальное ускорение $a_n = 4l\pi^2 n^2$ — (2). Из уравнений (1) и (2) сила упругости проволоки $F = m\left(g + 4l\pi^2 n^2\right)$. Чтобы проволока не разорвалась, необходимо, чтобы $\frac{F}{S} \le p_{max}$, или, в предельном случае, $\frac{4m\left(g + 4\pi^2 n^2 l\right)}{\pi d^2} = p_{max}$, откуда частота вращения гири $n = \sqrt{\frac{p_{max}\pi d^2 - 4mg}{16\pi^2 lm}} = 3{,}4$ Гц.

8.29. Однородный медный стержень длиной $l = 1$ м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. При какой частоте вращения стержень разорвется?

Решение:

На стержень действует центробежная сила $F = \int_0^l r\omega^2 dm$, где ω — угловая скорость вращения, r — расстояние от элемента массы dm, до оси вращения. Для однородного стержня $dm = \rho S dr$, где ρ — плотность материала стержня и S — его сечение. Тогда $F = \omega^2 \rho S \int_0^l r dr$ или, после интегрирования, $F = \frac{\rho S \omega^2 l^2}{2}$. Поскольку $\omega = 2\pi n$, то предельная частота вращения $n = \frac{1}{\pi l}\sqrt{\frac{F}{2\rho S}} = 38$ об/с.

8.30. Однородный стержень равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Стержень разрывается, когда скорость конца стержня достигает $v = 380$ м/с. Найти предел прочности p материала стержня. Плотность материала стержня $\rho = 7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:

Центробежная сила, действующая на стержень, в данном случае $F = \int_0^{\frac{l}{2}} r\omega^2 dm$, где ω — угловая скорость вращения, r — расстояние от элемента массы dm до оси вращения. Для однородного стержня $dm = \rho S dr$, где ρ — плотность материала стержня и S — его сечение. Произведя интегрирование, получим $F = \frac{\rho S \omega^2 l^2}{8}$. Угловая и линейная скорости вращения связаны соотношением $v = \omega \frac{l}{2}$, тогда $F = \frac{\rho S v^2}{2}$. Стержень разорвется, если $\frac{F}{S} \geq p_{max}$, тогда предел прочности материала стержня $p_{max} = \frac{\rho v^2}{2} = 570$ МПа.

8.31. К стальной проволоке длиной $l = 1$ м и радиусом $r = 1$ мм подвесили груз массой $m = 100$ кг. Найти работу A растяжения проволоки.

Решение:

Согласно закону Гука относительное удлинение $\frac{\Delta l}{l} = \alpha p_н = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$, откуда $F = \frac{SE}{l}\Delta l$ — (1). Для сил упругости имеем $F = k\Delta l$. Тогда коэффициент упругости $k = \frac{SE}{l}$. Отсюда работа $A = k\frac{(\Delta l)^2}{2} = \frac{SE(\Delta l)^2}{2l}$ — (2). Поскольку растягивающая сила $F = mg$, то из (1) $\Delta l = \frac{mgl}{SE}$, где $S = \pi r^2$. Тогда из (2) $A = \frac{m^2 g^2 l}{2\pi r^2 E}$. Подставляя числовые данные, получим $A = 0{,}706$ Дж.

8.32. Из резинового шнура длиной $l = 42$ см и радиусом $r = 3$ мм сделана рогатка. Мальчик, стреляя из рогатки, растянул резиновый шнур на $\Delta l = 20$ см. Найти модуль Юнга для этой резины, если известно, что камень массой $m = 0{,}02$ кг, пущенный из рогатки, полетел со скоростью $v = 20$ м/с. Изменением сечения шнура при растяжении пренебречь.

Решение:

По закону сохранения энергии потенциальная энергия упругого взаимодействия переходит в кинетическую энергию камня, т.е. $W_п = W_к$. Потенциальная энергия упругого взаимодействия $W_п = \frac{\beta(\Delta l)^2}{2}$, а кинетическая энергия камня $W_к = \frac{mv^2}{2}$, тогда $\frac{\beta(\Delta l)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$. Отсюда коэффициент жесткости резины $\beta = \frac{mv^2}{(\Delta l)^2}$, тогда по закону

Гука сила упругости резины $F = \beta\Delta l = \frac{mv^2}{\Delta l}$. Предел упругости $p_н = \frac{F}{S} = \frac{mv^2}{\pi r^2 \Delta l}$ — (1). С другой стороны, из закона Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p_н}{E}$, предел упругости резины $p_н = \frac{E\Delta l}{l}$ — (2). Приравняем правые части уравнений (1) и (2), тогда $\frac{mv^2}{\pi r^2 \Delta l} = \frac{E\Delta l}{l}$, откуда модуль Юнга резины равен $E = \frac{mv^2 l}{\pi r^2 (\Delta l)^2} = 2{,}97$ МПа.

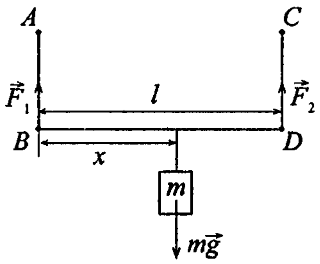
8.33. Имеется резиновый шланг длиной $l = 50$ см и внутренним диаметром $d_1 = 1$ см. Шланг натянули так, что его длина стала на $\Delta l = 10$ см больше. Найти внутренний диаметр d_2 натянутого шланга, если коэффициент Пуассона для резины $\sigma = 0{,}5$.

Решение:

При растяжении внутренний диаметр шланга уменьшится на $\Delta d = \beta d_1 \frac{F}{S}$. Согласно закону Гука $\frac{\Delta l}{l} = \alpha p_н = \alpha \frac{F}{S}$, откуда $\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{\alpha l}$. Тогда $\Delta d = \beta d_1 \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma d_1 \Delta l}{l}$. Поскольку $d_2 = d_1 - \Delta d$, следовательно, $d_2 = d_1 \left(1 - \frac{\sigma \Delta l}{l}\right) = 9 \cdot 10^{-3}$ м.

8.34. На рис. AB — железная проволока, CD — медная проволока такой же длины и с таким же поперечным сечением, BD — стержень длиной $l = 80$ см. На стержень подвесили груз массой $m = 2$ кг. На каком расстоянии x от точки B надо его подвесить, чтобы стержень остался горизонтальным?

Решение:



Чтобы стержень остался горизонтальным, необходимо, чтобы моменты сил упругости F_1 и F_2 относительно точки подвеса груза были равны по величине, т.е. $F_1x = F_2(l - x)$ — (1). Из закона Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p_н}{E}$. При равных длинах и деформациях железной и медной проволоки имеем $\frac{p_{н1}}{E_1} = \frac{p_{\cdot 2}}{E_2}$, где E_1 и E_2 — модули Юнга соответственно железа и меди. Т. к. площади поперечных сечений железной и медной проволоки равны, то $\frac{p_{\cdot 1}}{p_{\cdot 2}} = \frac{F_1}{F_2}$ или $\frac{F_1}{E_1} = \frac{F_2}{E_2}$ — (1). Из уравнений (1) и (2) имеем $\frac{l - x}{x} = \frac{E_1}{E_2}$, откуда расстояние

$$x = \frac{E_2 l}{E_1 + E_2} = 0{,}3\ \text{м}.$$

8.35. Найти момент пары сил M, необходимый для закручивания проволоки длиной $l = 10$ см и радиусом $r = 0{,}1$ мм на угол $\varphi = 10'$. Модуль сдвига материала проволоки $N = 4{,}9 \cdot 10^{10}$ Па.

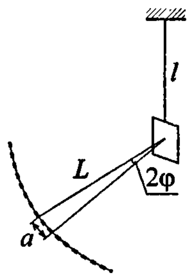
Решение:

Для закручивания проволоки на некоторый угол φ необходимо приложить момент пары сил, называемый закручивающим моментом $M = \frac{\pi N r^4}{2l}\varphi$, где l — длина проволоки, r — радиус ее сечения, φ — угол поворота, измеряемый в радианах. Для перевода угла φ в радианную меру решим две пропорции: если $\begin{cases} 1^o - 60', \\ x^o - 10', \end{cases}$ то $x = 0{,}167°$; если $\begin{cases} 180° - \pi \\ 0{,}167° - x \end{cases}$ (в радианах), то $x = 0{,}003$ рад. Произведя вычисления, получим $M = 2{,}26 \cdot 10^{-7}$ Н·м.

8.36. Зеркальце гальванометра подвешено на проволоке длиной $l = 10$ см и диаметром $d = 0{,}01$ мм. Найти закручивающий момент M, соответствующий отклонению зайчика на величину $a = 1$ мм по шкале, удаленной на расстояние $L = 1$ м от зеркальца. Модуль сдвига материала проволоки $N = 4 \cdot 10^{10}$ Па.

Решение:

Имеем $M = \dfrac{\pi N d^4}{2l \cdot 16}\varphi$. При повороте зеркальца гальванометра на угол φ отраженный луч повернется на угол 2φ, при этом $tg 2\varphi = \dfrac{a}{L}$. Поскольку угол φ мал, то $tg\varphi \approx \varphi$, следовательно, $\varphi = \dfrac{a}{2L}$.



Тогда $M = \dfrac{\pi N d^4 a}{64 \cdot lL} = 1{,}96 \cdot 10^{-13}$ Н·м.

8.37. Найти потенциальную энергию W проволоки длиной $l = 5$ см и диаметром $d = 0{,}04$ мм, закрученной на угол $\varphi = 10'$. Модуль сдвига материала проволоки $N = 5{,}9 \cdot 10^{10}$ Па.

Решение:

При повороте проволоки на угол $d\varphi$ совершается работа $dA = Md\varphi$, где M — закручивающий момент. За счет этой работы закрученная проволока приобретает потенциальную энергию W. Поскольку закручивающий момент $M=\dfrac{\pi N r^4 \varphi}{2l}$, то $W=A=\dfrac{\pi N r^4}{2l}\int\limits_0^{\varphi}\varphi d\varphi=\dfrac{\pi N r^4 \varphi^2}{4l}$. Подставляя числовые данные, получим $W=1{,}25\cdot 10^{-12}$ Дж.

8.38. При протекании электрического тока через обмотку гальванометра на его рамку с укрепленным на ней зеркальцем действует закручивающий момент $M=2\cdot 10^{-13}$ Н·м. Рамка при этом поворачивается на малый угол φ. На это закручивание идет работа $A=8{,}7\cdot 10^{-16}$ Дж. На какое расстояние a переместится зайчик от зеркальца по шкале, удаленной на расстояние $L=1$ м от гальванометра?

Решение:
При повороте рамки на угол $d\varphi$ совершается работа пары сил $2dA=Md\varphi$, где M — закручивающий момент. Тогда полная работа $2A=\int\limits_0^{\varphi}Md\varphi=M\varphi$, откуда $\varphi=\dfrac{2A}{M}$ — (1). Перемещение зайчика по шкале равно длине дуги окружности раднусом $R=l$, соответствующей углу φ, тогда $a=L\cdot tg2\varphi\approx L\cdot 2\varphi$, т. к. по условию угол φ — малый. Тогда, с учетом (1), $a=\dfrac{4LA}{M}=17{,}4$ мм.

8.39. Найти коэффициент Пуассона σ, при котором объем проволоки при растяжении не меняется.

Решение:
Первоначальный объем проволоки $V_1=Sl=\pi r^2 l$. После растяжения ее объем стал $V_2=\pi(r-\Delta r)^2(l+\Delta l)$. Поскольку

объем при растяжении не изменился, то $\pi r^2 l = \pi(r-\Delta r)^2(l+\Delta l)$; $\pi r^2 l = \pi(r^2 - 2r\Delta r + \Delta r^2)(l+\Delta l)$. Величиной Δr^2 можно пренебречь, тогда, раскрывая скобки, получим $r^2 l = r^2 l - 2r\Delta r l + r^2\Delta l - 2r\Delta r\Delta l$. Отсюда, пренебрегая величиной $2r\Delta r\Delta l$, получим $\frac{\Delta r l}{r\Delta l} = \frac{1}{2}$. Коэффициент Пуассона $\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta r l}{r\Delta l}$, следовательно, $\sigma = 0{,}5$.

8.40. Найти относительное изменение плотности цилиндрического медного стержня при сжатии его давлением $p_н = 9{,}8\cdot 10^7$ Па. Коэффициент Пуассона для меди $\sigma = 0{,}34$.

Решение:

Плотность несжатого стержня $\rho_1 = \frac{m}{V_1}$, где первоначальный обьем $V_1 = Sl = \pi r^2 l$. Плотность сжатого стержня $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$, где $V_2 = \pi(r+\Delta r)^2(l-\Delta l)$. Тогда изменение плотности $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$; $\Delta\rho = m\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{m\Delta V}{V_2 V_1}$. Т. к. изменение объема очень мало, то можно принять приближенно $V_2 V_1 = V_1^2$. Тогда $\Delta\rho = \frac{m\Delta V}{V_1^2}$ и $\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{\Delta V}{V_1}$. Изменение объема равно $\Delta V = \pi r^2 l - \pi(r+\Delta r)^2(l-\Delta l)$. Преобразуя данное выражение, получим $\Delta V = \pi r^2 l - {}$ $- \pi\left[(r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2)(l-\Delta l)\right]$. Величиной Δr^2 можно пренебречь, ввиду ее малости, тогда $\Delta V = \pi r^2 l - \pi \times$

$\times\left(r^2 l + 2r\Delta r l - r^2\Delta l - 2r\Delta r\Delta l\right)$; $\Delta V = \pi r^2 l - \pi r^2 l \times$ $\times\left(1 + \dfrac{2\Delta r}{r} - \dfrac{\Delta l}{l} - \dfrac{2\Delta r\Delta l}{rl}\right)$. Величина $\dfrac{2\Delta r\Delta l}{rl}$ очень мала, ею также можно пренебречь, тогда $\Delta V = \pi r^2 l\left(\dfrac{\Delta l}{l} - \dfrac{2\Delta r}{r}\right)$; $\Delta V = \pi r^2 l\dfrac{\Delta l}{l}\left(1 - \dfrac{2\Delta r l}{r\Delta l}\right)$. Поскольку $\pi r^2 l = V_1$, а $\dfrac{\Delta r l}{r\Delta l} = \sigma$, то последнюю формулу можно записать так: $\Delta V = V_1\dfrac{\Delta l}{l}(1 - 2\sigma)$. Отсюда отношение $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1} = \dfrac{\Delta l}{l}(1 - 2\sigma)$. По закону Гука $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{p}{E}$, где E — модуль Юнга, для меди $E = 118$ ГПа. Тогда $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{p}{E}(1 - 2\sigma)$. Подставляя числовые данные, получим $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = 0{,}027\,\%$.

8.41. Железная проволока длиной $l = 5$ м висит вертикально. На сколько изменится объем проволоки, если к ней привязать гирю массой $m = 10$ кг? Коэффициент Пуассона для железа $\sigma = 0{,}3$.

Решение:

Первоначальный объем проволоки $V_1 = Sl = \pi r^2 l$. После того как к ней привязали гирю, проволока вытянулась и ее объем стал $V_2 = \pi(r - \Delta r)^2(l + \Delta l)$. Изменение объема $\Delta V = \pi(r - \Delta r)^2(l + \Delta l) - \pi r^2 l$. Преобразуя данное выражение, получим $\Delta V = \pi\left[\left(r^2 - 2r\Delta r + \Delta r^2\right)(l + \Delta l)\right] - \pi r^2 l$. Величиной Δr^2 можно пренебречь, ввиду ее малости, тогда $\Delta V = \pi\left(r^2 l - 2r\Delta r l + r^2\Delta l + 2r\Delta r\Delta l\right) - \pi r^2 l$;

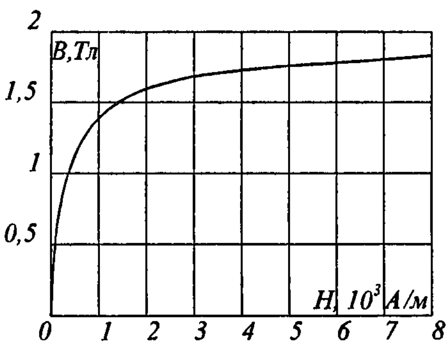
$\Delta V = \pi r^2 l\left(1 - \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta r \Delta l}{rl}\right) - \pi r^2 l$. Величина $\frac{2\Delta r \Delta l}{rl}$ очень мала, ею также можно пренебречь, следовательно, $\Delta V = \pi r^2 l\left(\frac{\Delta l}{l} - \frac{2\Delta r}{r}\right)$ или $\Delta V = \pi r l \frac{\Delta l}{l}\left(1 - \frac{2\Delta r l}{r \Delta l}\right)$. Поскольку $\pi r^2 l = V_1$, а $\frac{\Delta r l}{r \Delta l} = \sigma$, то последнюю формулу можно записать так: $\Delta V = V_1 \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\sigma)$. По закону Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{P_\text{н}}{E}$, где E — модуль Юнга, для железа $E = 196$ ГПа. Нормальное напряжение равно $P_\text{н} = \frac{F}{S}$, где растягивающая сила $F = mg$. Тогда $\Delta V = Sl\frac{mg}{SE}(1 - 2\sigma) = \frac{lmg}{E}(1 - 2\sigma)$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta V = 1\,\text{мм}^3$.

Приложение

1. Множители для образования десятичных кратных и дольных единиц

Наименование	Множитель	Русское обозначение	Международное обозначение
экса	10^{18}	Э	E
гета	10^{15}	П	P
тера	10^{12}	Т	T
гига	10^{9}	Г	G
мега	10^{6}	М	M
кило	10^{3}	к	k
гекто	10^{2}	г	h
дека	10	да	da
деци	10^{-1}	д	d
санти	10^{-2}	с	c
милли	10^{-3}	м	m
микро	10^{-6}	мк	μ
нано	10^{-9}	н	n
пико	10^{-12}	п	p
фемто	10^{-15}	ф	f
атто	10^{-18}	а	a

2. График зависимости индукции B от напряженности H магнитного поля для некоторого сорта железа



3. Фундаментальные физические константы

Абсолютный 0 температуры	$t = -273,15°C$
Атомная единица массы	1а.е.м. = $1,6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Гравитационная постоянная	$G = 6,672 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²
Заряд α-частицы	$q = 2e = 3,204 \cdot 10^{-19}$ Кл
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12}$м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Магнитный момент протона	$\mu_p = 1,4106171 \cdot 10^{-26}$ Дж/Тл
Магнитный момент электрона	$\mu_e = 9,28483 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Масса α-частицы	$m_\alpha = 6,644 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя электрона	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31}$ кг
Молярная газовая постоянная	$R = 8,31441$ Дж/(моль·К)
Молярный объем идеальн. газа при норм. усл.	$V_0 = 22,41383 \cdot 10^{-3}$ м³/моль
Норм. ускорение св. Падения	$g = 9,81$ м/с²
Нормальные условия:	
атмосферное давление	$p_o = 101325$ Н/м²
температура	$T = 273$ К
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹
Постоянная Больцмана	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Вина	$b = 2,90 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$Вт/(м²·К⁴)
Постоянная Фарадея	$F = 96,48456 \cdot 10^{3}$ Кл/моль
Скорость света в вакууме	$c = 2,99792458 \cdot 10^{8}$ м/с
Универсальная газовая пост.	$R = 8,314$ Дж/(К·моль)
Элементарный заряд	$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл

4. Некоторые данные о планетах солнечной системы

	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Среднее расстояние от Солнца, млн. км	57,91	108,21	149,59	227,94	778,3	1429,3	2875,03	4504,4	5900
Период обращения вокруг Солнца, земной год	0,24	0,62	1	1,88	11,86	29,46	84,02	164,8	249,7
Экваториальный диаметр, км	4840	12400	12742	6780	139760	115100	51000	50000	—
Объем по отношению к объему Земли	0,055	0,92	1	0,15	1345	767	73,5	59,5	—
Масса по отношению к массе Земли	0,054	0,81	1	0,107	318,4	95,2	14,58	17,26	—
Ускорение свободного падения по отношению к ускорению на поверхности Земли(g=9,80665 м/с^2)	0,38	0,85	1	0,38	2,64	1,17	0,92	1,14	—

5. Астрономические постоянные

Радиус Земли	$6{,}378164 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность Земли	$5{,}518 \cdot 10^3$ кг/м^3
Масса Земли	$5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}9599 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}737 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3{,}844 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние до Солнца	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин
Средняя плотность Солнца	$1{,}41 \cdot 10^3$ кг/м^3

6. Диаметры атомов и молекул, *нм*

Гелий	0,20	Кислород	0,30
Водород	0,23	Азот	0,30

7. Критические значения $T_к$ и $p_к$

Вещество	$T_к$, К	$p_к$, МПа	Вещество	$T_к$, К	$p_к$, МПа
Водяной пар	647	22,0	Азот	126	3,4
Углекислый газ	304	7,38	Водород	33	1,3
Кислород	154	5,07	Гелий	5,2	0,23
Аргон	151	4,87			

8. Давление водяного пара, насыщающего пространство при разных температурах

t, °C	$p_н$, Па	t, °C	$p_н$, Па	t, °C	$p_н$, Па
–5	400	8	1070	40	7335
0	609	9	1145	50	12302
1	656	10	1225	60	19807
2	704	12	1396	70	31122
3	757	14	1596	80	47215
4	811	16	1809	90	69958
5	870	20	2328	100	101080
6	932	25	3165	150	486240
7	1025	30	4229	200	1549890

9. Удельная теплота парообразования воды при разных температурах

t, °C	R, 10^5 Дж/кг	t, °C	r, 10^5 Дж/кг
0	25,0	180	20,1
10	24,7	200	19,4
20	24,5	220	18,6
30	24,0	250	17,0
50	23,8	300	14,0
70	23,2	350	8,92
90	22,8	370	4,40
100	22,6	374	1,1
120	22,0	374,15	0

10. Свойства некоторых жидкостей (при 20°C)

Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Поверхностное натяжение, Н/м
Бензол	0,88	1720	0,03
Вода	1,00	4190	0,073
Глицерин	1,20	2430	0,064
Кастор. масло	0,90	1800	0,035
Керосин	0,80	2140	0,03
Ртуть	13,60	138	0,5
Спирт	0,79	2510	0,02

11. Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3	Температура плавления, °C	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температурный коэффициент линейного расширения, 10^{-5} К$^{-1}$
Алюминий	2,6	659	896	322	2,3
Железо	7,9	1530	500	272	1,2
Латунь	8,4	900	386	—	1,9
Лед	0,9	0	2100	335	—
Медь	8,6	1100	395	176	1,6
Олово	7,2	232	230	58,6	2,7
Платина	21,4	1770	117	113	0,89
Пробка	0,2	—	2050	—	—
Свинец	11,3	327	126	22,6	2,9
Серебро	10,5	960	234	88	1,9
Сталь	7,7	1300	460	—	1,06
Цинк	7,0	420	391	117	2,9

12. Свойства упругости некоторых твердых тел

Вещество	Предел прочности, МПа	Модуль Юнга, ГПа
Алюминий	110	69
Железо	294	196
Медь	245	118
Свинец	20	15,7
Серебро	290	74
Сталь	785	216

13. Теплопроводность некоторых твердых тел, Вт/(м·К)

Алюминий	210	Песок сухой	0,325
Войлок	0,046	Пробка	0,050
Железо	58,7	Серебро	460
Кварц плавлен.	1,37	Эбонит	0,174
Медь	390		

14. Диэлектрическая проницаемость диэлектриков

Воск	7,8	Парафин	2	Эбонит	2,6
Вода	81	Слюда	6	Парафинир. бумага	2
Керосин	2	Стекло	6		
Масло	5	Фарфор	6		

15. Удельное сопротивление проводников (при 0°С), мкОм·м

Алюминий	0,025	Нихром	1,00
Графит	0,039	Ртуть	0,94
Железо	0,087	Свинец	0,22
Медь	0,017	Сталь	0,10

16. Подвижности ионов в электролитах, 10^{-8} м^2/(В·с)

NO_3^-	6,4	Cl^-	6,8
H^+	32,6	Ag^+	5,6
K^+	6,7		

17. Работа выхода электронов из металла, эВ

W	4,5	Ag	4,74
W+Cs	1,6	Li	2,4
W+Th	2,63	Na	2,3
Pt+Cs	1,40	K	2,0
Pt	5,3	Cs	1,9

18. Показатели преломления

Алмаз	2,42	Сероуглерод	1,63
Вода	1,33	Скипидар	1,48
Лед	1,31	Стекло	1,5 — 1,9

19. Длина волны, определяющая границу *K*-серии рентгеновских лучей для различных материалов антикатода, *нм*

Вольфрам	17,8	Платина	15,8
Золото	15,3	Серебро	48,4
Медь	138		

20. Спектральные линии ртутной дуги, *нм*

253,7	404,7	546,1	612,8
365,0	435,8	577,0	690,8
365,5	523,5	579,1	708,2

21. Массы некоторых изотопов, *а.е.м.*

Изотоп	Масса	Изотоп	Масса	Изотоп	Масса
${}^{1}_{1}H$	1,00783	${}^{9}_{4}Be$	9,01218	${}^{30}_{14}Si$	29,97377
${}^{2}_{1}H$	2,01410	${}^{10}_{5}Be$	10,01294	${}^{40}_{20}Ca$	39,96257
${}^{3}_{2}He$	3,01605	${}^{12}_{6}C$	12,0	${}^{56}_{27}Co$	55,93984
${}^{4}_{2}He$	3,01603	${}^{13}_{7}N$	13,00574	${}^{63}_{29}Cu$	62,92960
${}^{6}_{3}Li$	4,00260	${}^{17}_{7}N$	14,00307	${}^{112}_{48}Cd$	111,90276
${}^{7}_{3}Li$	6,01512	${}^{23}_{12}Mg$	16,99913	${}^{200}_{80}Hg$	199,96832
${}^{7}_{3}Li$	7,01600	${}^{23}_{12}Mg$	22,99413	${}^{235}_{92}U$	235,04393
${}^{7}_{4}Be$	7,01693	${}^{24}_{12}Mg$	23,98504	${}^{238}_{92}U$	238,05353
${}^{8}_{4}Be$	8,00531	${}^{27}_{13}Al$	26,98154		

22. Периоды полураспада некоторых радиоактивных элементов

${}^{45}_{20}Ca$	164 сут	${}^{226}_{88}Ra$	1590 лет
${}^{90}_{38}Sr$	28 лет	${}^{235}_{92}U$	$7{,}1 \cdot 10^{8}$ лет
${}^{210}_{84}Po$	138 сут	${}^{238}_{92}U$	$4{,}5 \cdot 10^{9}$ лет
${}^{222}_{86}Rn$	3,82 сут		

Периодическая система

Период	Ряд	Группы I	II	III	IV	V
1	1	H 1 1.0079 Водород				
2	2	Li 3 6.941 Литий	Be 4 9.01218 Бериллий	B 5 10.81 Бор	C 6 12.011 Углерод	N 7 14.0067 Азот
3	3	Na 11 22.98977 Натрий	Mg 12 24.305 Магний	Al 13 26.98154 Алюминий	Si 14 28.086 Кремний	P 15 30.97376 Фосфор
4	4	K 19 39.098 Калий	Ca 20 40.08 Кальций	21 Sc 44.9559 Скандий	22 Ti 47.90 Титан	23 V 50.942 Ванадий
	5	29 Cu 63.546 Медь	Zn 30 65.37 Цинк	Ga 31 69.72 Галлий	Ge 32 72.59 Германий	As 33 74.92 Мышьяк
5	6	Rb 37 85.47 Рубидий	Sr 38 87.62 Стронций	39 Y 88.905 Иттрий	40 Zr 91.22 Цирконий	41 Nb 92.906 Ниобий
	7	47 Ag 107.868 Серебро	48 Cd 112.40 Кадмий	In 49 114.82 Индий	Sn 50 118.69 Олово	Sb 51 121.75 Сурьма
6	8	Cs 55 132.905 Цезий	Ba 56 137.34 Барий	57* La 138.91 Лантан	72 Hf 178.49 Гафний	73 Ta 180.95 Тантал
	9	79 Au 196.967 Золото	80 Hg 200.59 Ртуть	Tl 81 204.37 Таллий	Pb 82 207.19 Свинец	Bi 83 208.98 Висмут
7	10	Fr 87 (223) Франций	Ra 88 (226) Радий	89** Ac (227) Актиний	Ku 104 (260) Курчатовий	

* Лантаноиды

58 Ce 140.12 Церий	59 Pr 140.91 Празеодим	60 Nd 144.24 Неодим	61 Pm (145) Прометий	62 Sm 150.35 Самарий	63 Eu 151.96 Европий	64 Gd 157.25 Гадолиний

** Актиноиды

90 Th 232.038 Торий	91 Pa (231) Протактиний	92 U 238.03 Уран	93 Np (237) Нептуний	94 Pu (242) Плутоний	95 Am (243) Америций	96 Cm (247) Кюрий

элементов Д. И. Менделеева

элементов

VI	VII		VIII		0
					He 2 4.00260 Гелий
O 8 15.9994 Кислород	F 9 18.99840 Фтор				Ne 10 20.179 Неон
S 16 32.06 Сера	Cl 17 35.453 Хлор				Ar 18 39.948 Аргон
24 Cr 51.996 Хром	25 Mn 54.938 Марганец	26 Fe 55.847 Железо	27 Co 58.933 Кобальт	28 Ni 58.71 Никель	
Se 34 78.96 Селен	Br 35 79.90 Бром				Kr 36 83.80 Криптон
42 Mo 95.94 Молибден	43 Tc (99) Технеций	44 Ru 101.07 Рутений	45 Rh 102.905 Родий	46 Pd 106.4 Палладий	
Te 52 127.60 Теллур	I 53 126.904 Йод				Xe 54 131.30 Ксенон
74 W 183.85 Вольфрам	75 Re 186.2 Рений	76 Os 190.2 Осмий	77 Ir 192.2 Иридий	78 Pt 195.09 Платина	
Po 84 (210) Полоний	At 85 (210) Астат				Rn 86 (222) Радон

65 Tb 158.92 Тербий	66 Dy 162.50 Диспрозий	67 Ho 164.93 Гольмий	68 Er 167.26 Эрбий	69 Tu 168.93 Тулий	70 Yb 173.04 Иттербий	71 Lu 174.97 Лютеций

97 Bk (247) Берклий	98 Cf (249) Калифорний	99 Es (254) Эйнштейний	100 Fm (253) Фермий	101 Md (256) Менделевий	102 (No) (256) (Нобелий)	103 Lr (257) Лоуренсий

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Готовимся к экзаменам

ВСЕ РЕШЕНИЯ
К «СБОРНИКУ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ» В.С. ВОЛЬКЕНШТЕЙН

в двух книгах

Книга 1

Редактор *Г.С. Николаева*
Компьютерная верстка и графика *И.А. Изергин*
Технический редактор *Н.Г. Новак*
Корректор *И.И. Попова*

**Подписано в печать 05.03.99. Формат $84\times108^{1}/_{32}$.
Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 22,68.
Печать высокая. Бумага типографская № 2.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 3268.**

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК-00-93, том 2; 953000 — книги, брошюры

Гигиенический сертификат
№ 77.ЦС.01.952.П.01659.Т.98. от 01.09.98 г.

«Олимп»
Изд. лиц. ЛР № 070190 от 25.10.96
123007, Москва, а/я 92

ООО "Фирма «Издательство АСТ»".
ЛР № 066236 от 22.12.98.
366720, РФ, РИ, г. Назрань, ул. Московская, 13 а.

Наши электронные адреса:
WWW.AST.RU
E-mail: AST@POSTMAN.RU

**Отпечатано с готовых диапозитивов
на Книжной фабрике № 1 Госкомпечати России.
144003, г. Электросталь Московской обл., ул. Тевосяна, 25.**