КРАТКИЙ КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА 1

КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Ось и отрезки оси

1. Рассмотрим произвольную прямую. Она имеет два взаимно противоположных направления. Изберем по своему желанию одно из них и назовем его положительным (а противоположное иаправление — отрицательным).

Прямую, на которой «назначено» положительное направление, мы будем называть *осью*. На чертежах положительное направление оси указывается стрелкой (см., например, рис. 1, где изображена ось a).

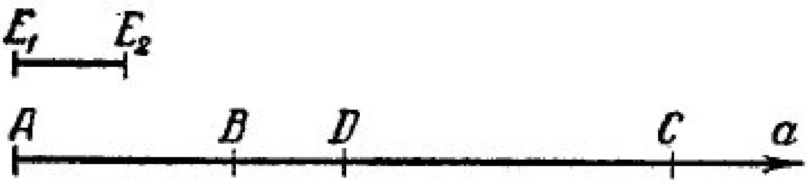

Рис. 1.

2. Пусть дана какая-нибудь ось и, кроме того, указан *масштабный отрезок*, т. е. линейная единица, с помощью которой любой отрезок может быть измерен и тем самым для любого отрезка может быть определена его длина.

Возьмем на данной оси две произвольные точки и пометим их буквами A, B. *Отрезок, ограниченный точками A, B, называется направленным, если сказано, какая из этих точек считается началом отрезка, какая концом. Направлением отрезка считается направление от начала к концу.*

В дальнейшем тексте направленный отрезок обозначается двумя буквами с чертой над ними, именно теми же буквами, какими помечены ограничивающие его точки; при этом буква, которой помечено начало, ставится на первом месте. Таким образом, $\overline{AB}$ обозначает направленный отрезок, ограниченный точками A, B, началом которого является точка A; $\overline{BA}$ обозначает направленный отрезок, ограниченный точками A, B, началом которого является точка B.

В дальнейшем, рассматривая направленные отрезки оси, мы часто будем называть их просто отрезками, опуская слово «направленный».

Условимся называть величиной отрезка $\overline{AB}$ *некоторой оси число, равное его длине, взятой со знаком плюс, если направление этого отрезка совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус, если оно совпадает с отрицательным направлением оси.* Величину отрезка $\overline{AB}$ мы будем обозначать символом AB (без черты). Мы не исключаем случая, когда точки A и B совпадают; тогда отрезок $\overline{AB}$ называется *нулевым,* так как величина его AB равна нулю. Направление нулевого отрезка неопределенно и, таким образом, называть такой отрезок направленным можно лишь условно.

Величина отрезка, в отличие от его длины, есть число *относительное*; очевидно, длина отрезка есть модуль его величины*), поэтому, в согласии с принятым в алгебре способом обозначать модуль числа, для обозначения длины отрезка $\overline{AB}$ мы будем употреблять символ $|AB|$. Ясно, что $|AB|$ и $|BA|$ обозначают одно и то же число. Напротив, сами величины AB и BA отличаются знаком, так что

$$AB = -BA.$$

На рис. 1 изображены ось a и на ней точки A, B, C, D; E_1E_2 — масштабный отрезок. Точки A, B, C, D предполагаются расположенными так, что расстояние между A и B равно двум, между C и D — трем. Направление от A к B совпадает с положительным направлением оси, направление от C к D противоположно положительному направлению оси. В данном случае мы имеем, следовательно,

$$AB = 2, \quad CD = -3,$$

или

$$BA = -2, \quad DC = 3.$$

---

*) Слово «модуль» означает то же, что и «абсолютная величина».

Кроме того, можно написать

$$|AB|=2, \quad |CD|=3.$$

3. *При любом расположении точек A, B, C на оси величины отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ связаны соотношением*

$$AB+BC=AC; \tag{1}$$

это соотношение мы будем называть *основным тождеством.*

Докажем основное тождество. Предположим сначала, что отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, будучи ненулевыми, имеют одинаковые направления (рис. 2, верх); тогда отрезок $\overline{AC}$ имеет длину, равную сумме длин отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и направлен одинаково с ними. В этом случае все три числа AB, BC и AC имеют одинаковые знаки и число AC равно сумме чисел AB, BC, т. е. тождество (1) справедливо.

Предположим теперь, что отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, будучи ненулевыми, имеют разные направления (рис. 2, низ). Тогда отрезок $\overline{AC}$ имеет длину, равную разности длин отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и направлен так же, как более длинный из них. В этом

Рис. 2.

случае числа AB и BC имеют разные знаки, а число AC имеет модуль, равный разности модулей чисел AB, BC, и знак, совпадающий со знаком того из этих чисел, модуль которого больше. Следовательно, по правилу сложения относительных чисел и при таком расположении точек число AC равно сумме чисел AB, BC, т. е. тождество (1) справедливо.

Предположим, наконец, что какой-нибудь из отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ — нулевой. Если $\overline{AB}$ — нулевой отрезок, то точка B совпадает с точкой A, следовательно,

$$AB+BC=AA+AC=0+AC=AC.$$

Если $\overline{BC}$ — нулевой отрезок, то точка B совпадает с точкой C, следовательно,

$$AB+BC=AC+CC=AC+0=AC.$$

Итак, тождество (1) действительно справедливо при всех расположениях точек A, B, C.

Замечание. Если бы в соотношении (1) символы AB, BC и AC считались просто длинами соответствующих отрезков (без учета знаков!), то оно было бы верно только тогда, когда точка B лежит между точками A и C. Универсальность соотношения (1) имеет своим источником именно то обстоятельство, что AB, BC и AC в нем понимаются как величины отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$, т. е. как длины их, взятые с надлежащими знаками*).

§ 2. Координаты на прямой. Числовая ось

4. Мы укажем здесь способ, с помощью которого положение точек на произвольно выбранной прямой можно определять заданием чисел.

Пусть дана произвольная прямая a. Выберем некоторый отрезок в качестве линейной единицы, назначим на прямой a положительное направление (благодаря чему она станет осью) и отметим на этой прямой буквой O какую-нибудь точку.

После этого *условимся называть координатой любой точки M на оси a величину отрезка $\overline{OM}$. Точку O будем называть началом координат; ее собственная координата равна нулю.*

Заданием координаты точки M положение этой точки на данной прямой определяется вполне. Именно, модуль координаты, т. е. OM, есть расстояние точки M от (заранее фиксированной) точки O, а знак координаты, т. е. знак числа OM, устанавливает, в каком направлении от точки O расположена точка M; если координата положительна, то точка M расположена в положительном направлении от точки O, если отрицательна,— то в отрицательном, если же координата равна нулю, то точка M совпадает с точкой O (все это непо-

*) Если отрезки не лежат на какой-либо оси, а рассматриваются как произвольные отрезки на плоскости, то нет оснований условно приписывать их длинам тот или иной знак. В таких случаях длины отрезков можно обозначать как в элементарной геометрии, без символа модуля, что мы и будем часто делать в дальнейшем (см., например, n° 40, где длина отрезка обозначена через CM вместо $|CM|$).

средственно следует из определения величины отрезка оси; см. n° 2).

Представим себе, что прямая a расположена перед нами горизонтально и положительно направлена в правую сторону. Тогда расположение точек прямой a, в зависимости от знака их координат, может быть описано следующим образом; точки, имеющие положительные координаты, лежат справа от начала координат O, а точки, имеющие отрицательные координаты, — слева от начала координат O.

Координату произвольной точки обычно обозначают буквой x. В тех случаях, когда рассматривается несколько точек, их часто обозначают одной буквой с разными номерами, например, $M_1, M_2, \ldots, M_n$; координаты этих точек тогда также обозначают одной буквой с соответствующими номерами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Желая кратко указать, что данная точка имеет данную координату, записывают эту координату в круглых скобках рядом с обозначением самой точки, например: $M_1(x_1)$, $M_2(x_2), \ldots, M_n(x_n)$.

5. Здесь мы докажем две простые, но важные теоремы. Они относятся к оси, на которой введена координатная система.

Теорема 1. *Каковы бы ни были две точки оси $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, всегда имеет место равенство*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \tag{1}$$

Доказательство. Вследствие основного тождества (n° 3)

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

откуда

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

Но $OM_2 = x_2$, $OM_1 = x_1$, следовательно,

$$M_1M_2 = x_2 - x_1,$$

что и требовалось доказать.

Сущность этой теоремы можно высказать такими словами: *чтобы получить величину отрезка оси, нужно от координаты его конца отнять координату начала*. (См. рис. 3 и 4; в случае рис. 4 необходимо учесть, что координата x_1 отрицательна.)

Теорема 2. *Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — любые две точки оси и d — расстояние между ними, то*

$$d = |x_2 - x_1|. \qquad (2)$$

Доказательство. Согласно предыдущей теореме

$$M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

но расстояние между точками M_1, M_2 есть модуль величины отрезка $\overline{M_1M_2}$, следовательно,

$$d = |x_2 - x_1|.$$

Теорема доказана.

Замечание. Так как числа $x_2 - x_1$ и $x_1 - x_2$ имеют общий модуль, то с равным правом можно писать $d = |x_2 - x_1|$ и $d = |x_1 - x_2|$.

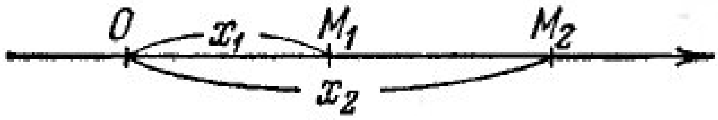

Рис. 3.

Приняв это во внимание, мы можем выразить смысл доказанной теоремы так: *чтобы вычислить расстояние между двумя точками оси, нужно от координаты одной из них отнять координату другой и взять модуль полученной разности.*

Рис. 4.

Пример 1. Даны точки $A(5)$, $B(-1)$, $C(-8)$, $D(2)$; найти величины отрезков $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DB}$.

Решение. На основании теоремы 1 имеем:

$$AB = -1 - 5 = -6,$$
$$CD = 2 - (-8) = 10,$$
$$DB = -1 - 2 = -3.$$

Пример 2. Найти расстояние между точками $P(3)$ и $Q(-2)$.

Решение. На основании теоремы 2

$$d = |-2 - 3| = |-5| = 5.$$

6. Если на какой-нибудь оси введена координатная система, то каждая точка этой оси имеет одну вполне определенную координату. Обратно, какое бы мы ни взяли (вещественное) число x, на оси найдется одна вполне определенная точка M с данной координатой x.

Условимся говорить, что точка M *изображает* число x. Ось, на которой введены координаты по способу, описанному в п° 4, так что ее точки изображают все вещественные числа, называется *числовой осью*. На рис. 5 изображены числовая ось и несколько целых чисел.

Условившись изображать числа в виде точек числовой оси, мы тем самым делаем геометрически наглядным наше

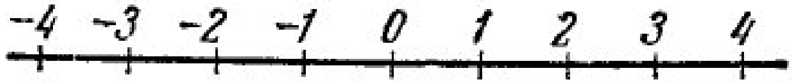

Рис. 5.

представление о всех числах в их совокупности. Вместе с тем мы получаем возможность формулировать в геометрических терминах арифметические соотношения. Например, все решения неравенств $3 < x < 5$ можно наглядно представить себе в виде точек числовой оси, расположенных между двумя ее точками, из которых одна изображает число 3 (т. е. имеет координату, равную 3), другая — число 5 (т. е. имеет координату, равную 5). Это обстоятельство можно коротко выразить так: неравенства $3 < x < 5$ определяют интервал (числовой оси), ограниченный точками 3 и 5.

Выражение арифметических соотношений геометрическими терминами оказалось весьма удобным и постоянно употребляется во всех разделах математики.

§ 3. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости. Понятие о декартовых косоугольных координатах

7. Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек плоскости заданием чисел, то говорят, что на плоскости введена *система координат*. Мы рассмотрим сейчас простейшую и наиболее употребительную систему координат, которая называется д е к а р т о в о й п р я м о у г о л ь н о й.

Декартова прямоугольная система координат определяется заданием линейной единицы для измерения длин и двух взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-нибудь порядке (т. е. указано, какая из них считается первой, а какая — второй). Точка пересечения осей называется *началом координат*, а сами оси — *координатными осями*, причем первую из них называют также *осью абсцисс*, а вторую — *осью ординат*.

Обозначим начало координат буквой O, ось абсцисс — буквами Ox и ось ординат — буквами Oy. На чертежах буквы x, y ставятся около соответственных осей в положительном направлении от точки O в том месте, где изображения осей обрываются; таким образом, само расположение букв O и x на чертеже указывает, куда направлена ось абсцисс, а расположение букв O и y — куда направлена ось ординат. Тем самым отпадает надобность указывать положительные направления осей стрелками, поэтому в дальнейшем на наших чертежах стрелки на координатных осях не ставятся.

Пусть M — произвольная точка плоскости. Спроектируем точку M на координатные оси, т. е. проведем через M перпендикуляры к прямым Ox и Oy; основания этих перпендикуляров обозначим соответственно M_x и M_y (рис. 6).

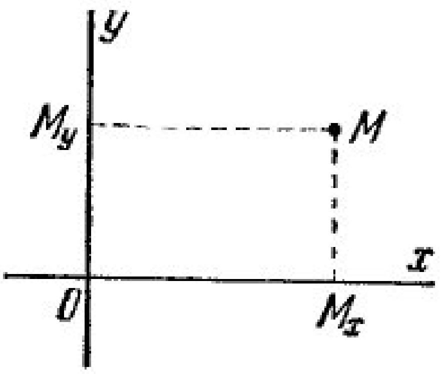

Рис. 6.

Координатами точки M в заданной системе называются числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \tag{1}$$

где OM_x означает величину отрезка $\overline{OM_x}$ оси абсцисс, OM_y — величину отрезка $\overline{OM_y}$ оси ординат. Число x называется первой координатой или абсциссой точки M, число y называется второй координатой или ординатой точки M. Желая кратко указать, что точка M имеет абсциссу x и ординату y, пользуются записью: $M(x;\ y)$. Если нам придется рассматривать несколько точек, то мы часто будем обозначать их одной буквой с разными номерами, например, M_1, M_2, ..., M_n; тогда координаты этих точек мы будем помечать соответствующими номерами и записывать рассматриваемые точки так: $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, ..., $M_n(x_n;\ y_n)$.

8. Если задана система декартовых прямоугольных координат, то каждая точка плоскости в этой системе имеет одну вполне определенную пару координат x, y. Обратно, каковы бы ни были два (вещественных) числа x, y, на плоскости найдется одна вполне определенная точка, абсцисса которой в данной системе есть x, а ордината есть y. Чтобы построить точку по ее координатам x, y, нужно на оси абсцисс отложить от начала координат отрезок $\overline{OM_x}$, величина которого равна x, а на оси ординат — отрезок $\overline{OM_y}$, величина которого равна y (направления, в которых следует откладывать эти отрезки, определяются знаками чисел x, y); после этого, проводя через M_x прямую, параллельную оси Oy, и через M_y — прямую, параллельную оси Ox, мы найдем искомую точку M как точку пересечения проведенных прямых.

9. В n° 4 мы объяснили, как вводится система координат на прямой. Введем теперь на каждой из координатных осей Ox и Oy систему координат, сохранив данную нам линейную единицу и данные направления осей Ox и Oy, а в качестве начала координат на каждой оси выбрав точку O.

Рассмотрим произвольную точку M и ее проекцию M_x на ось Ox.

Точка M_x имеет на оси Ox координату, равную величине отрезка $\overline{OM_x}$; эта же величина названа нами (в n° 7) абсциссой точки M. Отсюда можно заключить: *абсцисса точки M равна координате точки M_x на оси Ox.* Аналогично: *ордината точки M равна координате точки M_y на оси Oy.* Эти предложения при всей их очевидности являются для нас весьма важными. Именно, они дают право при рассмотрении точек на плоскости применять теоремы 1 и 2 (n° 5), выражающие известные свойства координатной системы на прямой.

10. Чтобы удобнее формулировать последующие факты, мы условимся сейчас насчет некоторых терминов.

Ось Oy разделяет всю плоскость на две полуплоскости; ту из них, которая расположена в положительном направлении оси Ox, мы назовем *правой*, другую — *левой*.

Точно так же ось Ox разделяет плоскость на две полуплоскости; ту из них, которая расположена в положительном направлении оси Oy, мы будем называть *верхней*, другую — *нижней* *).

11. Пусть M — произвольная точка правой полуплоскости; тогда отрезок $\overline{OM_x}$ имеет на оси Ox положительное направление, и, следовательно, абсцисса $x = OM_x$ точки M

---

*) Такие названия оправдываются тем, что на чертежах координатные оси обычно располагаются так, чтобы при рассмотрении их ось Ox была видна направленной вправо, а ось Oy — вверх.

положительна. Если же M находится в левой полуплоскости, то отрезок $\overline{OM_x}$ имеет на оси Ox отрицательное направление, и число $x = OM_x$ отрицательно. Наконец, в том случае, когда точка M лежит на оси Oy, ее проекция M_x на ось Ox совпадает с точкой O и $x = OM_x$ есть нуль.

Таким образом, *все точки правой полуплоскости имеют положительные абсциссы* ($x > 0$), *все точки левой полуплоскости имеют отрицательные абсциссы* ($x < 0$); *абсциссы точек, лежащих на оси* Oy, *равны нулю* ($x = 0$).

Аналогично рассуждая, установим, что *все точки верхней полуплоскости имеют положительные ординаты* ($y > 0$), *все точки нижней полуплоскости имеют отрицательные ординаты* ($y < 0$); *ординаты точек, лежащих на оси* Ox, *равны нулю* ($y = 0$).

Заметим, что у начала координат O, как точки пересечения осей, обе координаты равны нулю: $x = 0$, $y = 0$, и этим оно характеризуется (т. е. обе координаты равны нулю только для точки O).

12. Две координатные оси вместе разделяют плоскость на четыре части; их называют *координатными четвертями* и нумеруют по определенному правилу. Именно — первой координатной четвертью называется та, которая лежит одновременно в правой и верхней полуплоскостях, второй — лежащая в левой и в верхней полуплоскостях, третьей — лежащая в левой и в нижней полуплоскостях, наконец, четвертой четвертью называется та, которая лежит в правой и в нижней полуплоскостях. (Нумерация координатных четвертей показана на рис. 7.)

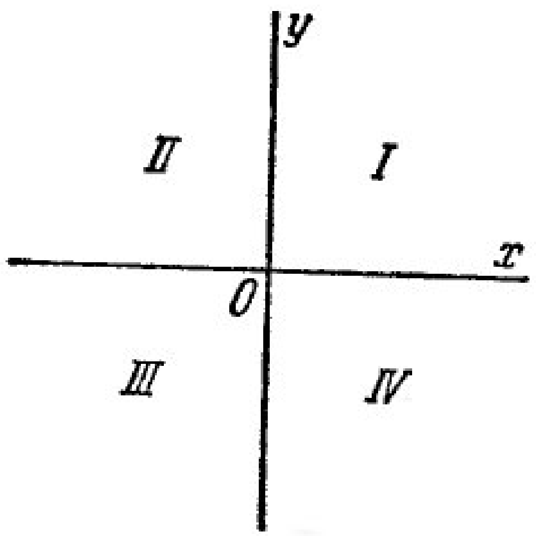

Рис. 7.

Пусть M — некоторая точка с координатами x, y. Из предыдущего следует, что

если $x > 0$, $y > 0$, то M лежит в первой четверти,
если $x < 0$, $y > 0$, то M лежит во второй четверти,
если $x < 0$, $y < 0$, то M лежит в третьей четверти,
если $x > 0$, $y < 0$, то M лежит в четвертой четверти.

Рассмотрение координатных полуплоскостей и четвертей полезно тем, что помогает легко ориентироваться в расположении заданных точек по знакам их координат.

13. Мы познакомились с декартовой прямоугольной системой координат. Эта система наиболее употребительна. Однако в отдельных случаях, при рассмотрении специальных задач, могут оказаться более удобными и другие системы. Расскажем в немногих словах о декартовых координатах с любым углом между осями.

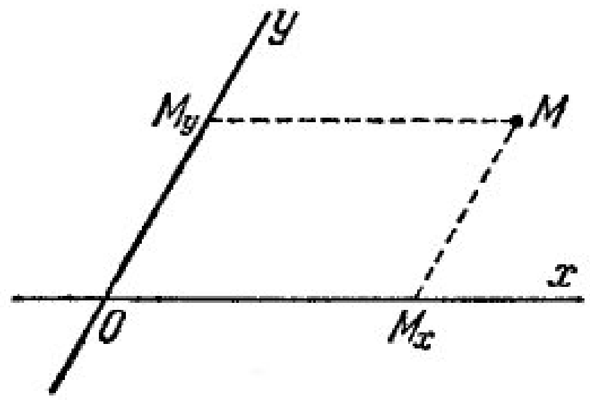

Рис. 8.

Такая система координат определяется заданием масштаба и двух осей Ox, Oy, пересекающихся в точке O под любым углом (кроме 0 и 180°). Пусть M — произвольная точка плоскости. Проведем через M прямые, параллельные осям Ox, Oy, и обозначим точки их пересечения с этими осями соответственно через M_x и M_y (рис. 8).

Координатами точки M в заданной системе называются числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y,$$

где OM_x означает величину отрезка $\overline{OM_x}$ оси Ox, а OM_y — величину отрезка $\overline{OM_y}$ оси Oy.

В том частном случае, когда угол между осями Ox, Oy равен прямому, описанная сейчас система координат оказывается декартовой прямоугольной системой. Если же угол между осями Ox, Oy не прямой, то эта система координат называется декартовой косоугольной. В нашей книге в дальнейшем декартовы косоугольные координаты не употребляются. Поэтому декартовы прямоугольные координаты мы будем часто называть просто декартовыми координатами.

§ 4. Полярные координаты

14. Здесь мы опишем так называемую *полярную систему координат*; она весьма удобна и применяется довольно часто.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из этой точки луча OA, называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин. Кроме того, при задании полярной системы должно быть сказано, какие повороты вокруг точки O считаются положительными. Обычно считают положительными те повороты, которые совершаются «против часовой стрелки».

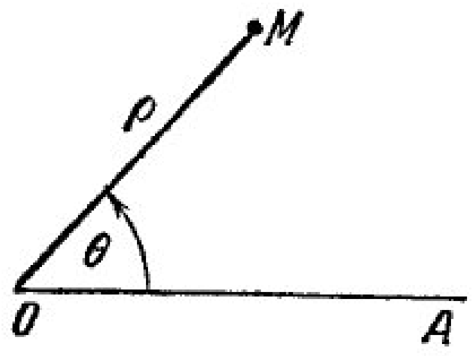

Рис. 9.

Пусть заданы полюс и полярная ось (рис. 9). Рассмотрим произвольную точку M и обозначим через ρ расстояние ее от точки O ($\rho = |OM|$), через θ — угол, на который нужно повернуть луч OA для совмещения его с лучом OM ($\theta = \angle AOM$). Угол θ мы будем понимать так, как это принято в тригонометрии (т. е. с учетом знака и с точностью до слагаемого вида $\pm 2n\pi$).

Полярными координатами точки M (*относительно заданной системы*) *называются числа ρ и θ.* При этом *число ρ называется первой координатой, или полярным радиусом, число θ — второй координатой, или полярным углом* (полярный угол называют также *амплитудой*).

Замечание 1. Среди возможных значений полярного угла точки M выделяют одно определенное, именно то, которое удовлетворяет неравенствам

$$-\pi < \theta \leqslant \pi;$$

его мы будем называть *главным*. Можно сказать, что в качестве главного значения полярного угла берется угол, на который нужно повернуть луч OA до совмещения с лучом OM, но делая при этом поворот не более, чем на 180° в ту или другую сторону. В частном случае, когда луч OM направлен строго противоположно лучу OA, возможными являются два поворота на 180°; тогда выбирается положительный поворот, т. е. в качестве главного значения полярного угла принимается $\theta = \pi$.

Замечание 2. Если точка M совпадает с O, то $\rho = |OM| = 0$. Значит, первая координата полюса равна нулю. Вторая его координата, очевидно, не имеет определенного значения.

15. В некоторых случаях приходится одновременно пользоваться и декартовой и полярной системами. В таких случаях возникает задача: зная полярные координаты некоторой точки, вычислить ее декартовы координаты и, обратно, зная ее декартовы координаты, вычислить полярные. Мы выведем сейчас формулы такого преобразования координат (формулы перехода от полярных координат к декартовым и обратно) в частном случае, когда *полюс полярной системы совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс* (рис. 10). Кроме того, при определении полярного угла будем считать положительными повороты в том направлении, в каком следует вращать положительную полуось Ox, чтобы кратчайшим путем совместить с положительной полуосью Oy.

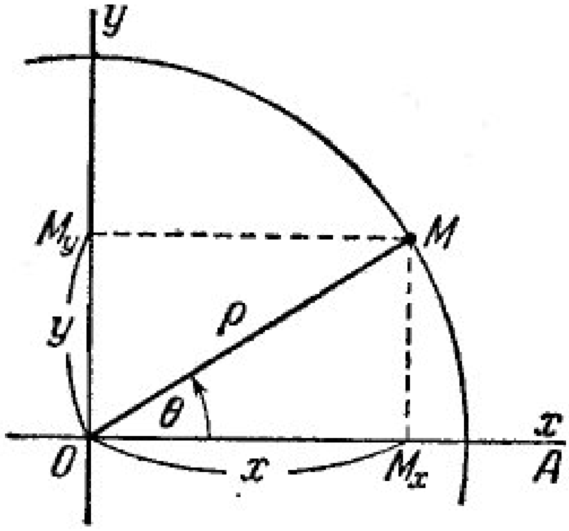

Рис. 10.

Пусть M — произвольная точка плоскости, $(x;\ y)$ — ее декартовы координаты, $(\rho;\ \theta)$ — полярные координаты. Опишем вокруг полюса O окружность радиуса ρ и будем рассматривать ее в качестве тригонометрической окружности, а ось Ox — в качестве начального диаметра. Опустим из точки M перпендикуляры на оси Ox, Oy; обозначим их основания соответственно через M_x, M_y (см. рис. 10). Отрезок $\overline{OM_x}$ является линией косинуса угла θ; следовательно, $OM_x = |OM| \cos\theta$. Отрезок $\overline{OM_y}$ является линией синуса угла θ; следовательно, $OM_y = |OM| \sin\theta$. Но $OM_x = x$, $OM_y = y$, $|OM| = \rho$; таким образом, из предыдущих соотношений имеем:

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta. \tag{1}$$

Это и есть формулы, выражающие декартовы координаты через полярные. Выражения полярных координат через декартовы можно получить из этих же формул или непосредственно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Заметим, однако, что формула $\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$ даже главное значение полярного угла определяет не вполне; именно, нужно еще знать, положительна величина θ или отрицательна.

Пример. Даны декартовы прямоугольные координаты точки: $(-2;\ 2)$; найти ее полярные координаты (считая, что полюс полярной системы совмещен с началом декартовой системы, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс).

Решение. По формулам (2) имеем:

$$\rho=2\sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg}\theta=-1.$$

Согласно второму из этих равенств $\theta=\frac{3}{4}\pi$ или $\theta=-\frac{1}{4}\pi$. Так как данная точка лежит во второй четверти, то из двух указанных значений θ мы должны в качестве главного выбрать первое. Итак, $\rho=2\sqrt{2}$, $\theta=\frac{3}{4}\pi$.

ГЛАВА 2

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 5. Проекция отрезка. Расстояние между двумя точками

16. В дальнейшем при рассмотрении каких бы то ни было вопросов мы будем считать, что задана некоторая система координат. Если мы будем говорить, что даны какие-то точки, то это нужно понимать в том смысле, что известны их координаты. Если в какой-нибудь задаче требуется найти неизвестные точки, то задача будет считаться решенной, когда будут вычислены их координаты.

В этой главе рассматриваются решения ряда простейших задач аналитической геометрии.

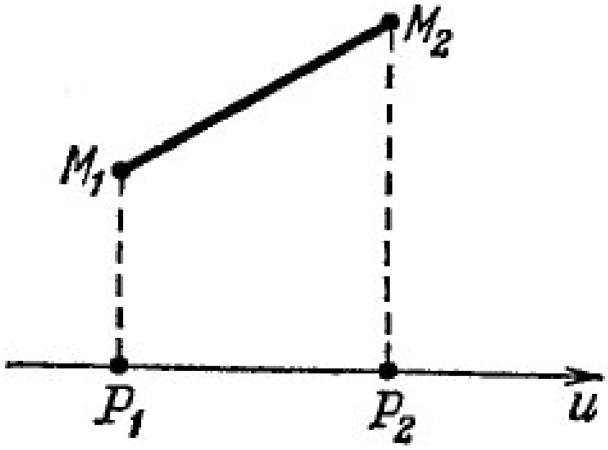

Рис. 11.

17. Пусть дан произвольный отрезок $\overline{M_1M_2}$ и некоторая ось u (рис. 11).

Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры на ось u и обозначим их основания, соответственно, через P_1 и P_2. Рассмотрим отрезок $\overline{P_1P_2}$ оси u, началом и концом которого являются, соответственно, проекция начала данного отрезка $\overline{M_1M_2}$ и проекция его конца. *Величина отрезка $\overline{P_1P_2}$ оси u называется проекцией данного отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось u,* что символически записывается равенством

$$\text{пр}_u\,\overline{M_1M_2} = P_1P_2.$$

Согласно этому определению *проекция отрезка на ось есть число*; оно может быть положительным (рис. 11), отрицательным (рис. 12, *а*) или равным нулю (рис. 12, *б*).

Особенно часто в аналитической геометрии встречается необходимость вычислять проекции отрезка на координатные оси. Условимся обозначать проекцию произвольного отрезка

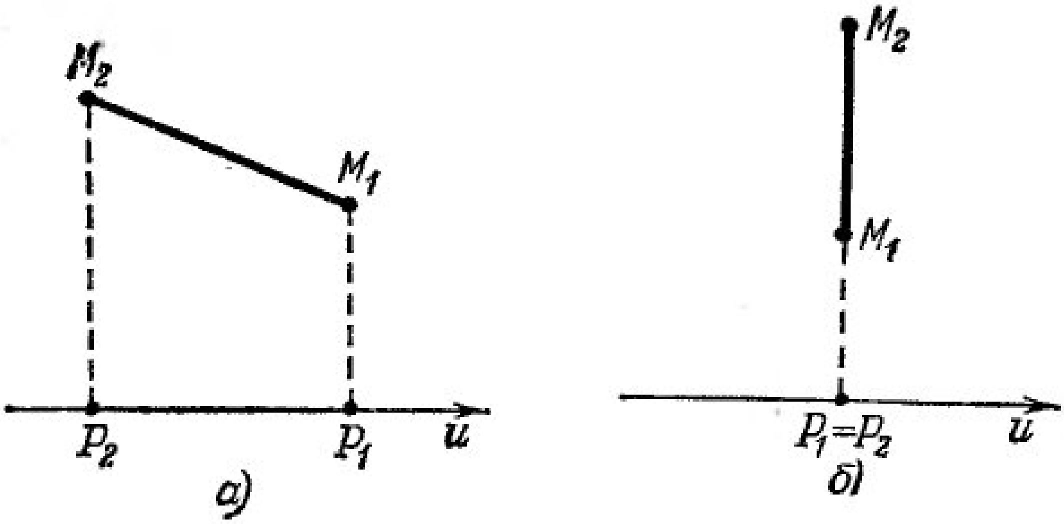

Рис. 12.

на ось Ox большой буквой X, проекцию на ось Oy — большой буквой Y.

Вопрос о вычислении X, Y по данным точкам M_1, M_2 решается следующей теоремой:

Теорема 3. *Каковы бы ни были точки* $M_1(x_1; y_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2)$, *проекции отрезка* $\overline{M_1M_2}$ *на координатные оси выражаются формулами:*

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1. \quad (1)$$

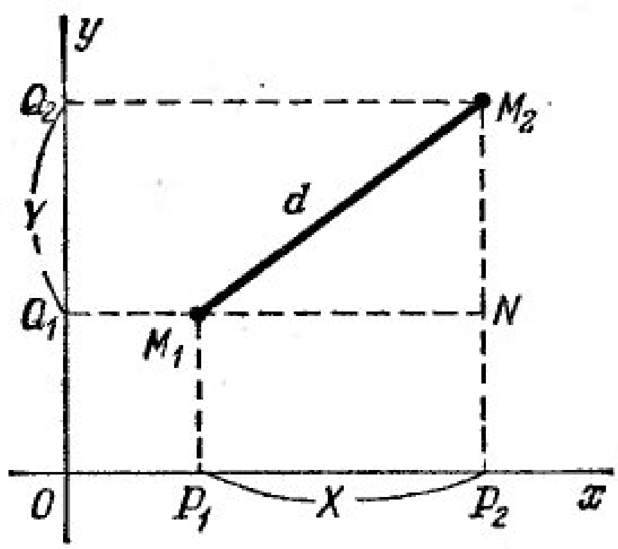

Рис. 13.

Доказательство. Опустим из точек M_1, M_2 перпендикуляры на ось Ox и обозначим их основания через P_1, P_2 (рис. 13). Согласно n° 9, эти точки имеют на оси Ox соответственно координаты x_1, x_2. Отсюда и в силу теоремы 1 n° 5

$$P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

Но $P_1P_2 = X$, следовательно, $X = x_2 - x_1$. Аналогично устанавливается равенство $Y = Q_1Q_2 = y_2 - y_1$. Теорема доказана.

Таким образом, *чтобы получить проекции отрезка на координатные оси, нужно от координат его конца отнять соответствующие координаты начала.*

Предположим, что начало отрезка M_1 совпадает с началом координат O; тогда $x_1=0$, $y_1=0$. Обозначив в этом случае конец отрезка просто буквой M, а координаты точки M буквами x, y, получаем по формулам (1)

$$X=x, \qquad Y=y; \tag{1'}$$

здесь X, Y — проекции отрезка $\overline{OM}$. Отрезок $\overline{OM}$, идущий из начала координат в данную точку M, называется *радиус-вектором этой точки*. Формулы (1′) выражают тот очевидный факт, что *декартовы прямоугольные координаты точки суть проекции ее радиус-вектора на оси координат.*

18. Одной из наиболее часто встречающихся простейших задач аналитической геометрии является задача определения расстояния между двумя данными точками. Для случая, когда точки определены декартовыми прямоугольными координатами, решение этой задачи дается следующей теоремой:

Теорема 4. *Как бы ни были расположены на плоскости точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, расстояние d между ними определяется формулой*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{2}$$

Доказательство. Сохраняя обозначения, которые применялись в предыдущей теореме, пометим, кроме того, буквой N точку пересечения прямых M_1Q_1 и M_2P_2 (рис. 13). Так как треугольник M_1M_2N — прямоугольный, то по теореме Пифагора

$$d=\sqrt{M_1N^2+M_2N^2}.$$

Но, очевидно, длины катетов M_1N и M_2N совпадают с абсолютными величинами проекций X, Y отрезка $\overline{M_1M_2}$ на координатные оси; следовательно:

$$d=\sqrt{X^2+Y^2}.$$

Отсюда и на основании теоремы 3 находим:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

что и требовалось.

Пример. Найти расстояние между точками $M_1(-2;\ 3)$ и $M_2(5;\ 4)$.

Решение. По формуле (2)

$$e=\sqrt{[5-(-2)]^2+(4-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

19. Рассмотрим снова отрезок $\overline{M_1M_2}$. Проведем через его начальную точку M_1 луч u, параллельный оси Ox и направленный с нею в одну и ту же сторону (рис. 14). Обозначим через θ угол, на который следует повернуть луч u, чтобы он направился по отрезку $\overline{M_1M_2}$; этот угол будем понимать, как принято в тригонометрии (т. е. с учетом знака и с точностью до слагаемого вида $\pm 2n\pi$).

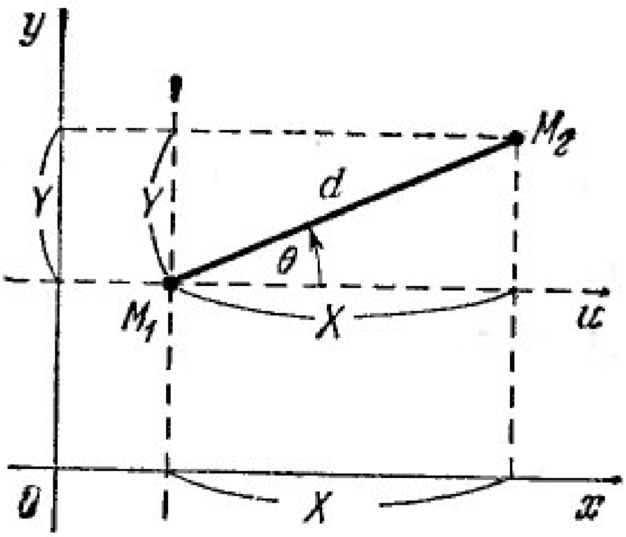

Рис. 14.

Угол θ будем называть *полярным углом отрезка* $\overline{M_1M_2}$ относительно данных координатных осей. Очевидно, θ представляет собой не что иное, как полярный угол точки M_2 в полярной системе координат, полюсом которой служит точка M_1, а полярной осью — луч u; в этой же системе длина d данного отрезка будет играть роль полярного радиуса точки M_2.

Примем теперь точку M_1 в качестве начала новой декартовой системы координат, оси которой направлены так же, как оси первоначально данной декартовой системы (на рис. 14 новые оси показаны пунктиром). Проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на соответственные оси старой и новой системы одинаковы: обозначим их, как и раньше, через X, Y. Числа X, Y являются декартовыми координатами точки M_2 в новой системе. Применяя к ним формулы (1) п° 15, найдем:

$$X=d\cos\theta,\quad Y=d\sin\theta. \tag{3}$$

Формулы (3) *выражают проекции произвольного отрезка на координатные оси через его длину и полярный угол.*

Из этих формул и на основании теоремы 3

$$x_2-x_1=d\cos\theta,\quad y_2-y_1=d\sin\theta, \tag{4}$$

или

$$\cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{d}, \qquad \sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{d}. \tag{5}$$

Формулы (5) *позволяют определить полярный угол отрезка по координатам его конца и начала* (предварительно следует найти d, пользуясь формулой (2)).

Во многих случаях удобной является также формула

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{6}$$

которая очевидным образом выводится из формулы (4).

Пример 1. Найти проекции отрезка на координатные оси, зная его длину $d = 2\sqrt{2}$ и полярный угол $\theta = 135°$.

Решение. По формулам (3) находим:

$$X = 2\sqrt{2}\cos 135° = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2,$$

$$Y = 2\sqrt{2}\sin 135° = 2\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

Пример 2. Найти полярный угол отрезка, направленного из точки $M_1(5;\ \sqrt{3})$ в точку $M_2(6;\ 2\sqrt{3})$.

Решение. По формуле (2)

$$d = \sqrt{(6-5)^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 2.$$

Применяя формулы (5), найдем:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, главное значение $\theta = 60°$.

20. Пусть u — *произвольная* ось, φ — угол наклона отрезка $\overline{M_1M_2}$ к этой оси, именно, угол, на который следует повернуть ось u, чтобы ее направление совпало с направлением отрезка $\overline{M_1M_2}$.

Для вычисления проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось u служит формула

$$\text{пр}_u \overline{M_1M_2} = d\cos\varphi, \tag{7}$$

т. е. *проекция отрезка на любую ось равна его длине, умноженной на косинус угла наклона к этой оси.*

Доказывать формулу (7) нет необходимости, так как по сути дела она не отличается от первой из формул (3) n° 19. Заметим только, что знак угла не влияет на его косинус; поэтому *в формуле* (7) *угол* φ *можно понимать в смысле элементарной геометрии: без учета знака и в границах от* 0 *до* 180°.

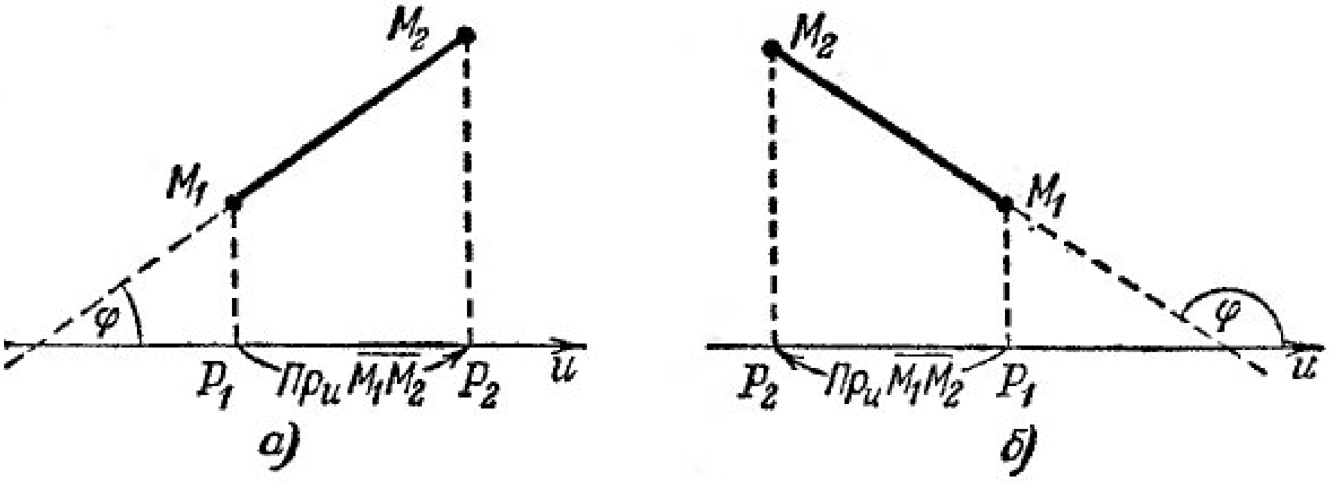

Рис. 15.

Если угол φ острый, то $\cos\varphi$ и проекция отрезка положительны (рис. 15, *а*), если φ — тупой угол, то $\cos\varphi$ и проекция отрезка отрицательны (рис. 15, *б*). Если φ — прямой угол, то проекция равна нулю.

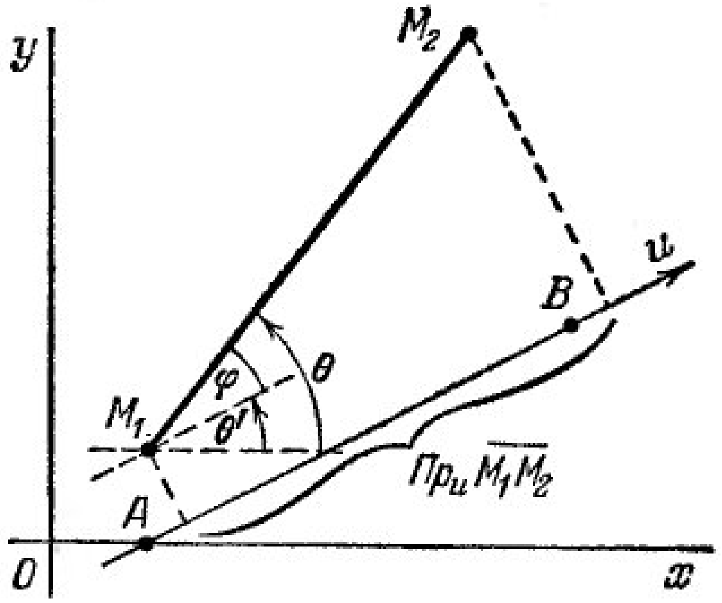

Рис. 16.

Пример. Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2\ (4;\ 6)$. Найти проекцию отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось, проходящую через точки $A\ (1;\ 0)$ и $B\ (5;3)$ и направленную от A к B.

Решение. Обозначим через u данную ось, через φ — угол наклона отрезка $\overline{M_1M_2}$ к оси u, через θ и θ' — полярные углы отрезков $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{AB}$ (см. рис. 16, где все указанные углы построены при точке M_1). Легко видеть, что $\cos\varphi = \cos(\theta - \theta')$. Пусть X, Y — проекции на координатные оси отрезка $\overline{M_1M_2}$, X', Y' — проекции отрезка $\overline{AB}$, d и d' — длины отрезков $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{AB}$. По формуле (7)

$$\text{пр}_u\overline{M_1M_2} = d\cos\varphi = d\cos(\theta - \theta') = d(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta').$$

Отсюда, пользуясь формулами (3) n° 19, получим:

$$\text{пр}_a\overline{M_1M_2}=d\left(\frac{X}{d}\cdot\frac{X'}{d'}+\frac{Y}{d}\cdot\frac{Y'}{d'}\right)=\frac{XX'+YY'}{d'}.$$

Применяя теоремы 3 и 4, найдем:

$$X=3,\quad Y=5,\quad X'=4,\quad Y'=3,\quad d'=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

Следовательно,

$$\text{пр}_a\overline{M_1M_2}=\frac{3\cdot 4+5\cdot 3}{5}=\frac{27}{5}.$$

Задача решена.

§ 6. Вычисление площади треугольника

21. Пусть даны три точки $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$, не лежащие на одной прямой. *Выведем формулу, выражающую площадь S треугольника ABC через координаты его вершин.*

Обозначим через φ угол между отрезками $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, через d и d' — длины этих отрезков. Как известно из элементарной геометрии, площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, следовательно,

$$S=\frac{1}{2}dd'\sin\varphi. \tag{1}$$

Пусть θ — полярный угол отрезка $\overline{AB}$. Если кратчайший поворот отрезка $\overline{AB}$ к отрезку $\overline{AC}$ на угол φ положителен, то, прибавляя к θ угол φ, мы получим полярный угол отрезка $\overline{AC}$; обозначив его через θ', найдем: $\theta'=\theta+\varphi$ (рис. 17, *а*). Если же кратчайший поворот $\overline{AB}$ к $\overline{AC}$ отрицателен, то мы получим полярный угол θ' отрезка $\overline{AC}$, отнимая от θ угол φ; в этом случае $\theta'=\theta-\varphi$ (рис. 17, *б*). Итак, $\varphi=\pm(\theta'-\theta)$; отсюда и из формулы (1)

$$S=\pm\frac{1}{2}dd'\sin(\theta'-\theta)=$$

$$=\pm\frac{1}{2}dd'(\sin\theta'\cos\theta-\cos\theta'\sin\theta). \tag{2}$$

Обозначим проекции отрезка $\overline{AB}$ на координатные оси через X, Y, проекции отрезка $\overline{AC}$ — через X', Y'. По формулам (3) n° 19

$$X = d\cos\theta, \qquad Y = d\sin\theta;$$
$$X' = d'\cos\theta', \quad Y' = d'\sin\theta'.$$

Раскрывая скобки в правой части равенства (2) и пользуясь последними соотношениями, найдем:

$$S = \pm\frac{1}{2}(XY' - X'Y). \tag{3}$$

Согласно теореме 3 n° 17

$$X = x_2 - x_1, \qquad Y = y_2 - y_1;$$
$$X' = x_3 - x_1, \qquad Y' = y_3 - y_1.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3), получим:

$$S = \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \tag{4}$$

Выражение, стоящее здесь в квадратных скобках, представляет собой определитель второго порядка *), поэтому

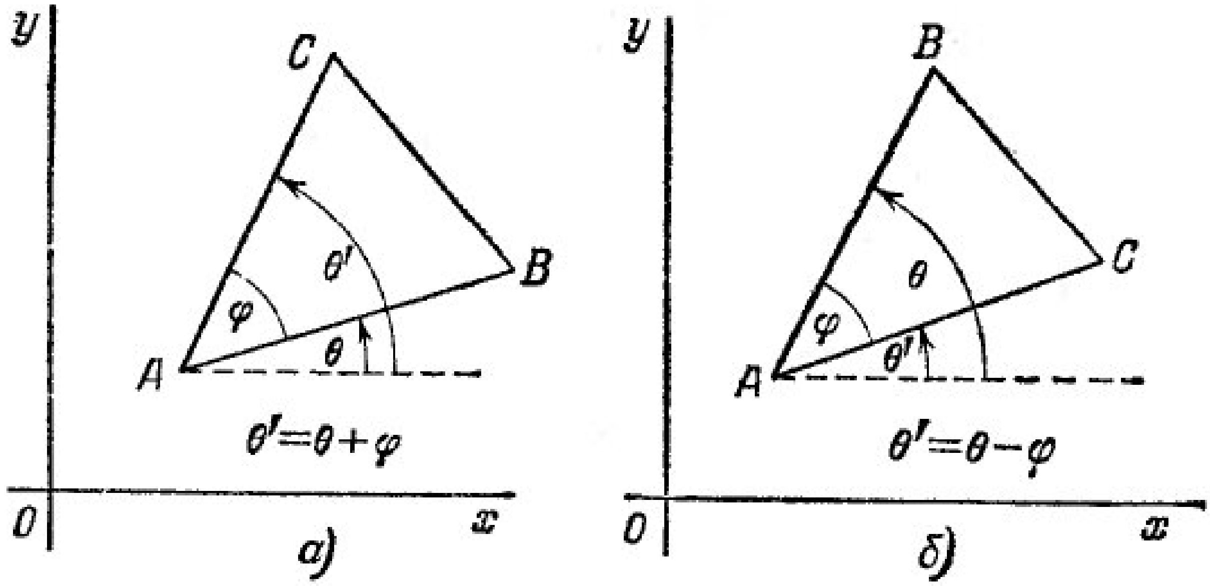

Рис. 17

формулу (4) можно написать также в виде

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Установленный результат мы сформулируем в виде следующей теоремы:

*) Основные сведения об определителях даны в приложении (см. стр. 205).

Теорема 5. *Каковы бы ни были три точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, не лежащие на одной прямой, площадь S треугольника ABC определяется формулой* (5). *Правая часть этой формулы равна $+S$ в том случае, когда кратчайший поворот отрезка AB к отрезку AC положителен, и $-S$ в том случае, когда такой поворот отрицателен.*

Пример. Даны точки $A(1; 1)$, $B(6; 4)$, $C(8; 2)$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. По формуле (5)

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=-8=-S.$$

Следовательно, $S=8$. То, что значение правой части формулы (5) в данном случае отрицательно, означает, что кратчайший поворот отрезка $\overline{AB}$ к отрезку $\overline{AC}$ является отрицательным.

§ 7. Деление отрезка в данном отношении

22. К числу простейших задач аналитической геометрии, имеющих многие применения, относится з а д а ч а о д е л е н и и о т р е з к а в д а н н о м о т н о ш е н и и. Прежде чем точно сформулировать, в чем эта задача заключается, нам придется подробно объяснить, что́ мы подразумеваем, когда говорим об *отношении, в котором некоторая точка делит данный отрезок.*

Пусть на плоскости даны две произвольные различные точки, из которых одна считается первой, другая — второй. Обозначим их в заданном порядке через M_1 и M_2. Проведем через данные точки прямую u и назначим на ней положительное направление; тем самым мы сделаем ее осью.

Пусть, далее, M — еще одна точка оси u, расположенная на ней как угодно с исключением только одного случая: она не должна совпадать с точкой M_2 (рис. 18).

Число λ, определяемое равенством

$$\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}, \tag{1}$$

где M_1M и MM_2 суть величины направленных отрезков $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$ оси u, называется отношением, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$.

Замечание 1. Число λ не зависит от того, как выбрано положительное направление на прямой u, определяемой точками M_1 и M_2. В самом деле, если мы изменим положительное направление этой прямой на противоположное, то величины M_1M и MM_2 одновременно изменят знак (сохраняя модуль); при этом дробь $\frac{M_1M}{MM_2}$, очевидно, останется без изменения.

Замечание 2. Число λ не зависит и от выбора масштаба для измерения длин. В самом деле, при изменении масштаба величины всех отрезков на оси M_1M_2 умножатся на одно и то же число и, следовательно, отношение $\frac{M_1M}{MM_2}$ не изменится.

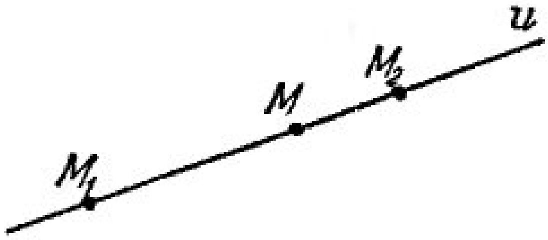

Рис. 18.

Замечание 3. Если не исключать возможности совпадения точки M с точкой M_2, то в том случае, когда M совпадет с M_2, равенство (1) не определяет никакого числа (так как $MM_2 = 0$). В этом случае говорят (по причине, которая выяснится в следующем n°), что отношение $\frac{M_1M}{MM_2}$ «равно бесконечности».

23. Предположим, что на прямой M_1M_2 положительное направление выбрано так, что отрезок $\overline{M_1M_2}$ положительно направлен; тогда M_1M_2 есть число положительное. Если при этом точка M находится между точками M_1 и M_2, то числа M_1M, MM_2 также положительны, а потому и отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ есть число положительное. Если точка M приближается к точке M_1, то λ приближается к нулю (λ становится равным нулю, когда M совпадает с M_1); если точка M приближается к точке M_2, то λ неограниченно возрастает или, как говорят, стремится к бесконечности (поэтому и говорят, что λ «обращается в бесконечность», когда M совпадает с M_2).

Допустим теперь, что точка M находится на прямой, определяемой точками M_1 и M_2, вне отрезка $\overline{M_1M_2}$. В этом случае одно из чисел M_1M, MM_2 положительно, другое отрицательно, а так как M_1M и MM_2 суть величины разных знаков, то $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ в данном случае есть число отрицательное.

24. В аналитической геометрии задача о делении отрезка в данном отношении заключается в следующем.

Считая известными координаты двух точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ и отношение λ, в котором некоторая (неизвестная) точка M делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, найти координаты точки M.

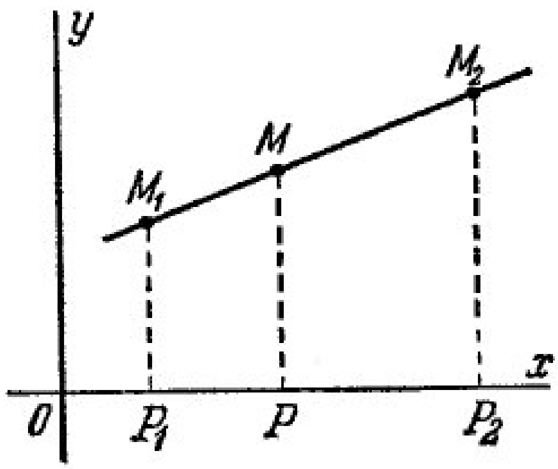

Рис. 19.

Решение этой задачи дает следующая теорема:

Теорема 6. *Если точка $M(x; y)$ делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении λ, то координаты этой точки выражаются формулами*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

Доказательство. Проектируем точки M_1, M_2, M на ось Ox и обозначим их проекции соответственно через P_1, P_2 и P (рис. 19). На основании известной теоремы элементарной геометрии о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda. \tag{3}$$

Согласно теореме 3 (n° 17)

$$P_1P = x - x_1, \qquad PP_2 = x_2 - x.$$

Отсюда и из равенства (3) получаем:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

Решая это уравнение относительно неизвестного x, найдем, что

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Тем самым мы получили первую из формул (2). Вторая устанавливается совершенно аналогично при помощи проектирования на ось Oy. Теорема доказана.

Замечание. Если $\lambda=-1$, то формулы (2) теряют смысл, так как в знаменателях этих формул оказывается нуль ($1+\lambda=0$). Но в этом случае и поставленная задача не имеет решения; в самом деле, никакая точка не может делить отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda=-1$, так как, если $\frac{M_1M}{MM_2}=-1$, то $M_1M=-MM_2$ и $M_1M+MM_2=M_1M_2=0$, что невозможно, поскольку точки M_1, M_2 предполагаются различными.

25. Отметим один важный частный случай предыдущей теоремы: *если $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ — две произвольные точки и $M(x;\ y)$ — середина отрезка $\overline{M_1M_2}$, то*

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Эти формулы получаются из формул (2) n° 24 при $\lambda=1$*). Мы можем утверждать, следовательно, что *каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.*

Пример 1. Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(7;\ 4)$. На определяемой ими прямой найти точку M, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2, и находится между точками M_1 и M_2.

Решение. Искомая точка делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda=\frac{1}{2}$. Применяя формулы (2) n° 24, находим координаты этой точки: $x=3$, $y=2$.

Пример 2. Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(7;\ 4)$. На прямой M_1M_2 найти точку M, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2, и находится вне отрезка, ограниченного точками M_1 и M_2.

Решение. Искомая точка делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda=-\frac{1}{2}$. Применяя формулы (2) n° 24, находим координаты этой точки: $x=-5$, $y=-2$.

Пример 3. Даны вершины треугольника $A(5;-1)$, $B(-1;\ 7)$, $C(1;\ 2)$. Найти длину его внутренней биссектрисы, проведенной из вершины A.

Решение. Обозначим через M точку пересечения указанной биссектрисы со стороной BC, через c и b — длины сторон AB и AC. Как известно из элементарной геометрии, биссектриса, проведенная

---

*) Если M — середина отрезка $\overline{M_1M_2}$, то $M_1M=MM_2$ и потому $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=1$.

из какой-нибудь вершины треугольника, делит противолежащую этой вершине сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом, точка M делит отрезок $\overline{BC}$ в отношении λ, где

$$\lambda=\frac{BM}{MC}=\frac{c}{b}.$$

Пользуясь формулой (2) n° 18, находим длины сторон AB и AC

$$c=\sqrt{(5+1)^2+(-1-7)^2}=10,\ b=\sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2}=5.$$

Следовательно, $\lambda=2$. Применяя формулы (2) n° 24, находим координаты точки M: $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{11}{3}$.

Снова пользуясь формулой (2) n° 18, получаем искомую длину биссектрисы $AM=\frac{14}{3}\sqrt{2}$.

Пример 4. В точках $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ помещены массы m_1, m_2, m_3. Найти центр тяжести этой системы масс.

Решение. Найдем сначала центр тяжести $M'(x';\ y')$ системы двух масс m_1 и m_2. Согласно известному положению механики центр тяжести системы этих масс делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ на части, обратно пропорциональные массам m_1, m_2, т. е. в отношении $\lambda=\frac{m_2}{m_1}$. По формулам (2) n° 24 находим:

$$x'=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2},\quad y'=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{y_1m_1+y_2m_2}{m_1+m_2}.$$

Пусть $M(x;\ y)$ — центр тяжести системы трех масс m_1, m_2, m_3. Положение точки M не изменится, если массы m_1, m_2 будут сосредоточены в точке M'. Иначе говоря, точка M является центром тяжести системы двух масс: массы m_3, помещенной в точке M_3, и массы m_1+m_2, помещенной в точке M'. Следовательно, мы можем найти искомую точку M как точку, которая делит отрезок $\overline{M'M_3}$ в отношении $\lambda=\frac{m_3}{m_1+m_2}$. Применяя формулы (2) n° 24, получаем:

$$x=\frac{x'+\frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{\frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2}+\frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3}{m_1+m_2+m_3},$$

$$y=\frac{y'+\frac{m_3}{m_1+m_2}y_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{\frac{y_1m_1+y_2m_2}{m_1+m_2}+\frac{m_3}{m_1+m_2}y_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{y_1m_1+y_2m_2+y_3m_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Замечание. Если дана система масс $m_1, m_2, \ldots, m_k$, помещенных в точках $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_k(x_k; y_k)$, то координаты центра тяжести этой системы масс определяются формулами

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}, \qquad y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_km_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}.$$

Для их доказательства следует применить формулы (2) n° 24 и метод математической индукции.

§ 8. Преобразование декартовых координат при параллельном сдвиге осей

26. Как мы уже знаем, в задачах аналитической геометрии положение заданных геометрических объектов определяется относительно некоторой системы координат. Может, однако, возникнуть надобность в замене координатной системы, к которой отнесены данные рассматриваемой задачи, другой системой, по каким-либо соображениям более удобной. Но произвольная точка в разных координатных системах имеет, вообще говоря, разные координаты. Поэтому в том случае, когда при рассмотрении одного вопроса употребляются две системы координат, возникает потребность: зная координаты произвольной точки в одной системе, вычислить координаты этой же точки в другой системе. Для этой цели служат формулы преобразования координат, соответствующие данному изменению координатной системы.

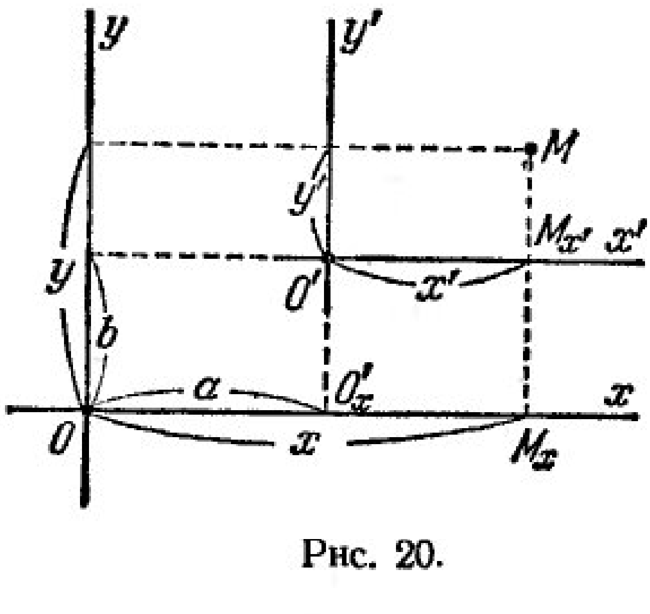

Рис. 20.

27. Прежде всего мы установим формулы преобразования декартовых координат при параллельном сдвиге осей, т. е. при таком изменении декартовой системы координат, когда меняется положение начала координат, а направления осей (и масштаб) остаются неизменными.

Пусть Ox и Oy — старые, а $O'x'$ и $O'y'$ — новые координатные оси (рис. 20). *Положение новых осей относительно старой системы определяется заданием старых координат но-*

вого начала: O' $(a;\ b)$. Число a будем называть величиной сдвига по направлению оси Ox, число b — величиной сдвига по направлению оси Oy. Произвольная точка M плоскости имеет относительно старых осей некоторые координаты $(x;\ y)$; эта же точка по отношению к новым осям имеет другие координаты: $(x';\ y')$. Наша цель — установить формулы, выражающие x, y через x', y' (или x', y' через x, y).

Спроектируем точку O' на ось Ox и точку M на оси Ox и $O'x'$.

Обозначим проекцию точки O' на ось Ox через O'_x, проекции точки M на оси Ox и $O'x'$ — через M_x и $M_{x'}$. Очевидно, величина отрезка O'_xM_x оси Ox равна величине отрезка $O'M_{x'}$ оси $O'x'$. Но $O'M_{x'} = x'$; следовательно, $O'_xM_x = x'$. Кроме того, $OO'_x = a$, $OM_{x'} = x$. Согласно основному тождеству (см. n° 3) $OM_x = OO'_x + O'_xM_x$; отсюда и на основании предыдущих указаний имеем $x = x' + a$. Аналогично при помощи проектирований на оси Oy и $O'y'$ найдем $y = y' + b$.

Итак,

$$x = x' + a, \quad y = y' + b. \tag{1}$$

Это и есть искомые формулы. Их можно также записать в виде

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{1'}$$

Полученный результат можно сформулировать так: *при параллельном сдвиге декартовой системы координат на величину a в направлении оси Ox и на величину b в направлении оси Oy абсциссы всех точек уменьшаются на величину a, ординаты — на величину b.*

§ 9. Преобразование декартовых прямоугольных координат при повороте осей

28. Теперь мы установим формулы преобразования декартовых прямоугольных координат при повороте осей, т. е. при таком изменении декартовой прямоугольной системы координат, когда обе оси поворачиваются в одну сторону на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть Ox и Oy—старые, а Ox', Oy'—новые координатные оси (рис. 21). *Положение новых осей относительно старой системы определяется заданием угла поворота, совмещающего старые оси с новыми.* Этот угол мы обозначим буквой α и будем понимать его, как принято в тригонометрии (положительные повороты определим, как в n°15).

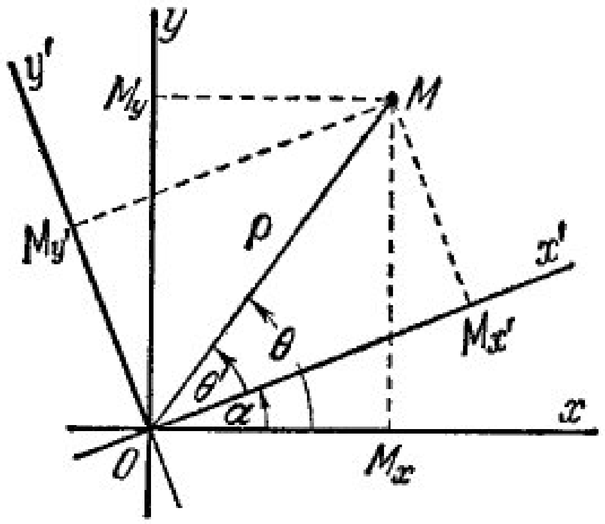

Рис. 21.

Произвольная точка M плоскости имеет относительно старых осей некоторые координаты $(x; y)$, эта же точка по отношению к новым осям имеет, вообще говоря, другие координаты $(x'; y')$. Именно, $x = OM_x$, $y = OM_y$, $x' = OM_{x'}$, $y' = OM_{y'}$ (см. рис. 21). Наша цель—установить формулы, выражающие x', y' через x, y или x, y через x', y'.

Обозначим через (ρ, θ) полярные координаты точки M, считая полярной осью Ox, и через (ρ, θ')—полярные координаты той же точки M, считая полярной осью Ox' (в каждом случае $\rho = |OM|$). Очевидно, $\theta = \theta' + \alpha$. Далее, согласно формулам (1) n° 15

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

и аналогично

$$x' = \rho\cos\theta', \quad y' = \rho\sin\theta'.$$

Таким образом,

$$x = \rho\cos\theta = \rho\cos(\theta' + \alpha) = \rho(\cos\theta'\cos\alpha - \sin\theta'\sin\alpha) =$$
$$= \rho\cos\theta'\cos\alpha - \rho\sin\theta'\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = \rho\sin\theta = \rho\sin(\theta' + \alpha) = \rho(\cos\theta'\sin\alpha + \sin\theta'\cos\alpha) =$$
$$= \rho\cos\theta'\sin\alpha + \rho\sin\theta'\cos\alpha = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Итак,

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Это и есть искомые формулы, т. е. формулы, которые при повороте осей на угол α выражают старые координаты $(x; y)$ произвольной точки M через новые координаты $(x'; y')$ этой же точки.

Формулы, выражающие новые координаты x', y' точки M через ее старые координаты x, y, можно получить из равенств (1), рассматривая их как систему двух уравнений с двумя неизвестными x', y' и решая эту систему относительно x', y'. Но эти формулы можно получить и сразу при помощи следующего рассуждения: если новая система получается поворотом старой на угол α, то старая система получается поворотом новой на угол $-\alpha$; поэтому в равенствах (1) можно поменять местами старые и новые координаты, заменяя одновременно α на $-\alpha$. Выполнив это преобразование, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

что и требовалось.

§ 10. Преобразование декартовых прямоугольных координат при изменении начала и повороте осей

29. Мы рассмотрим сейчас такое перемещение осей, которое можно осуществить путем параллельного сдвига и последующего поворота (масштаб предполагается неизменным).

Обозначим величину сдвига системы в направлении оси Ox через a, величину сдвига в направлении оси Oy через b, угол поворота системы — через α. Пусть $O'x'$ и $O'y'$ — новые оси. Произвольная точка M плоскости имеет относительно старых осей некоторые координаты (x, y); эта же точка M относительно новых осей имеет, вообще говоря, другие координаты (x', y'). Наша цель — получить формулы, выражающие x', y' через x, y, а также формулы, выражающие x, y через x', y'.

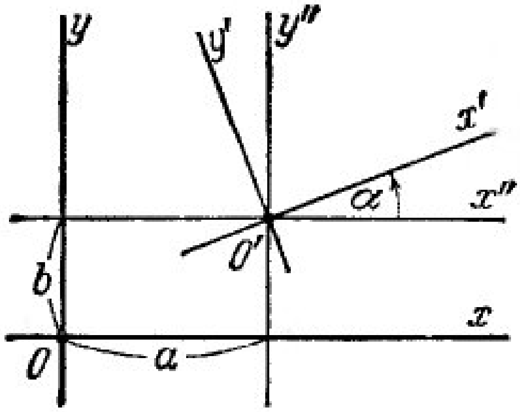

Рис. 22.

Для решения этой задачи введем вспомогательную систему координат, направления осей которой совпадают с направлениями осей старой системы, а начало совпадает с началом новой системы (рис. 22); оси вспомогательной системы мы обозначим через $O'x''$ и $O'y''$, а координаты точки M относительно этих осей — через x'', y''. Так как вспомогательная система получается параллельным сдвигом старой на величину a в направлении Ox и на величину b в направлении Oy, то согласно n° 27

$$x = x'' + a,$$
$$y = y'' + b.$$

Так как, далее, новая система получается поворотом вспомогательной на угол α, то согласно n° 28

$$x'' = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y'' = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Подставляя эти выражения x'', y'' в правые части предыдущих равенств, получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Рассматривая здесь x', y' как неизвестные и определяя их из этой системы, найдем:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Последние две пары формул и являются искомыми.

Формулы (1) выражают старые координаты произвольной точки через ее новые координаты, формулы (2), наоборот, выражают новые координаты через старые.

Полученный результат мы сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 7. *Если оси декартовой прямоугольной системы параллельно переносятся на величину a в направлении Ox и на величину b в направлении Oy и, кроме того, поворачиваются на угол α (а масштаб остается неизменным), то этому изменению системы соответствуют формулы преобразования координат*

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

выражающие старые координаты x, y произвольной точки плоскости через ее новые координаты x', y', и алгебраически равносильные им формулы

$$\left.\begin{aligned} x' &= \quad (x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

выражающие новые координаты через старые.

П р и м е р. Составить формулы преобразования координат, соответствующие переносу начала в точку O' $(2;\ 3)$ и повороту осей на угол $+45°$.

Р е ш е н и е. Полагая в формулах (1) $a=2$, $b=3$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, получим выражения старых координат через новые:

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}+2, \qquad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+3.$$

Отсюда (или из формул (2)) получаются выражения новых координат через старые:

$$x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}, \quad y'=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

З а м е ч а н и е. Обычно на чертежах координатные оси располагаются так, что для совмещения положительной полуоси абсцисс с положительной полуосью ординат ее нужно поворачивать (кратчайшим путем) **п р о т и в ч а с о в о й с т р е л к и.** В таком случае система координат называется *правой*. Иногда, однако, употребляется система осей, иным образом расположенных, именно так, что кратчайший поворот положительной полуоси абсцисс к положительной полуоси ординат направлен **п о ч а с о в о й с т р е л к е.** В таком случае система координат называется *левой*.

Пусть даны две (декартовы прямоугольные) системы координат. Если **о б е** они **п р а в ы е**, или **о б е л е в ы е**, то оси одной из них можно совместить с осями другой при помощи параллельного сдвига и последующего поворота на некоторый угол; отсюда и из предыдущего следует, что при переходе от одной из этих систем к другой координаты любой точки плоскости преобразуются по формулам вида (1). Если же **о д н а и з д а н н ы х с и с т е м п р а в а я, д р у г а я — л е в а я**, то оси одной из них нельзя совместить с осями другой при помощи сдвига и последующего поворота; именно, если при помощи сдвига и поворота мы совместим положительную полуось абсцисс одной системы («старой») с положительной полуосью абсцисс другой («новой»), то их положительные полуоси ординат направятся противоположно друг другу. Следовательно, в этом случае при переходе от одной системы к другой преобразование координат будет определяться формулами, которые получаются из формул (1) изменением знака величины y'. Таким образом, общие формулы преобразования декартовых прямоугольных координат (при неизменном масштабе) могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha \mp y'\sin\alpha + a, \\ y &= x'\sin\alpha \pm y'\cos\alpha + b, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где a, b — старые координаты нового начала, α — угол, на который нужно повернуть старую ось абсцисс, чтобы она направилась так же, как новая; верхние знаки в формулах (3) соответствуют случаю перехода от правой системы к правой или от левой — к левой, нижние знаки соответствуют случаю разноименных систем. Нужно еще иметь в виду, что если старая система является левой, то угол α следует считать положительным в том случае, когда он отсчитывается по часовой стрелке.

ГЛАВА 3
УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

§ 11. Понятие уравнения линии. Примеры задания линий при помощи уравнений

30. В элементарной геометрии детально исследуются лишь немногие линии: прямая, окружность, ломаные. Между тем потребности техники ставят перед математикой общую задачу исследования многочисленных линий, многообразных по своей форме и по характеру своих свойств. Для решения этой общей задачи требуются методы более совершенные, чем те, какими располагает элементарная геометрия. Такие методы дают алгебра и математический анализ. В основе же применения методов алгебры и анализа лежит некоторый единообразный способ задания линии, именно — способ задания ее при помощи уравнения.

31. Пусть x и y — две произвольные переменные величины. Это значит, что как под символом x, так и под символом y подразумеваются какие угодно (вещественные) числа. Соотношение вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ означает какое-нибудь выражение, содержащее x и y, мы будем называть уравнением с двумя переменными x, y, если $F(x, y) = 0$ есть равенство, верное не всегда, т. е. не для всяких пар чисел x, y. Таковы, например, соотношения $2x + 7y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 25 = 0$, $\sin x + \sin y - 1 = 0$ и т. п.

Если соотношение $F(x, y) = 0$ имеет место при любых численных значениях x, y, то его называют *тождеством*. Таковы, например, соотношения $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$, $(x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0$ и т. п.

В дальнейшем, рассматривая уравнения с двумя переменными, мы не исключаем возможности, что левая часть уравнения, помимо x и y, содержит еще и другие символы a, b, c, ...; но в таком случае мы будем предполагать, что они представляют собой фиксированные (хотя бы и не указанные) числа, и будем называть их постоянными *параметрами* уравнения. Например, в уравнении $ax+by-1=0$ параметрами являются a и b.

32. Говорят, что два числа $x=x_0$, $y=y_0$ удовлетворяют некоторому уравнению с двумя переменными, если при подстановке их в это уравнение вместо переменных получается верное равенство. Например, числа $x=3$, $y=4$ удовлетворяют уравнению $x^2+y^2-25=0$, так как при подстановке этих чисел в уравнение его левая часть обращается в нуль; напротив, числа $x=1$, $y=2$ этому уравнению не удовлетворяют, так как после подстановки их в уравнение слева получаем число, не равное нулю.

33. Рассмотрим произвольное уравнение $F(x, y)=0$. Предположим, что x и y теперь обозначают уже не любые числа, а числа, удовлетворяющие этому уравнению. И при таком условии величины x и y могут, вообще говоря, изменяться, но уже не произвольно друг относительно друга: задание численного значения величины x обусловливает возможные численные значения величины y. Ввиду этого говорят, что уравнение $F(x, y)=0$ устанавливает между переменными x и y функциональную зависимость.

34. Важнейшим понятием аналитической геометрии является понятие уравнения линии. Чтó под этим подразумевается, мы сейчас объясним.

Пусть на плоскости дана какая-нибудь линия и пусть вместе с тем выбрана некоторая система координат.

Уравнением данной линии (в выбранной системе координат) *называется такое уравнение $F(x, y)=0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.*

Таким образом, если известно уравнение линии, то относительно каждой точки плоскости возможно решить вопрос: лежит она на этой линии или нет. Для этого достаточно координаты испытуемой точки подставить в уравнение вместо переменных; если эти координаты удовлетворяют уравнению, точка лежит на линии, если не удовлетворяют,—не лежит.

Высказанное определение дает основу методам аналитической геометрии; суть их заключается в том, что рассматриваемые линии исследуются при помощи анализа их уравнений.

35. Во многих задачах уравнение линии играет роль первичного данного, а сама линия рассматривается как нечто вторичное. Иначе говоря, часто заранее дается какое-нибудь уравнение и тем самым определяется некоторая линия. Это связано с потребностью геометрического изображения функциональных зависимостей.

Если уравнение дано и мы отвечаем на вопрос «что́ такое определенная им линия» (или что́ такое линия, имеющая его «своим уравнением»), — то удобно пользоваться следующей формулировкой: *линия, определенная данным уравнением* (в некоторой системе координат), *есть геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.*

36. Линия, определяемая уравнением вида $y=f(x)$, называется *графиком* функции $f(x)$. Можно также сказать, что линия, определяемая произвольным уравнением $F(x, y)=0$, есть график той функциональной зависимости между x и y, которая устанавливается этим уравнением.

37. Поскольку величины x, y рассматриваются как координаты переменной точки, их называют *текущими координатами.* Если в основу положена не декартова, а какая-нибудь другая система координат, то текущие координаты следует обозначать другими буквами, так, как принято для этой системы.

38. Рассмотрим несколько простейших примеров определения линий уравнениями.

1. Данное уравнение есть $x-y=0$. Представив его в виде $y=x$, заключаем: точки, координаты которых этому уравнению удовлетворяют, суть те и только те, которые расположены в первой или третьей четвертях на одинаковых расстояниях от координатных осей. Таким образом, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, представляет собой биссектрису первого и третьего координатных углов (рис. 23). Это и есть линия,

определенная уравнением $x-y=0$ (она же — график функции $y=x$).

2. Данное уравнение есть $x+y=0$. Представив его в виде $y=-x$, заключаем: точки, координаты которых этому уравнению удовлетворяют, суть те и только те, которые расположены на одинаковых расстояниях от координатных осей во второй или четвертой четвертях. Таким образом

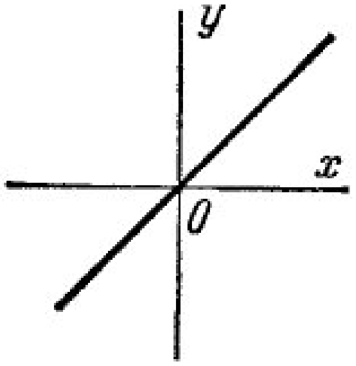

Рис. 23.

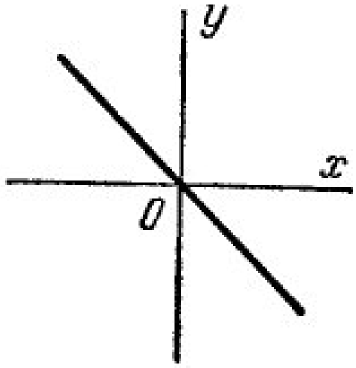

Рис. 24.

геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, представляет собой биссектрису второго и четвертого координатных углов (рис. 24). Это и есть линия, определенная уравнением $x+y=0$ (она же — график функции $y=-x$).

3. Данное уравнение есть $x^2-y^2=0$. Представив его в виде $(x-y)(x+y)=0$, заключаем: точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, суть те и только те, которые удовлетворяют либо уравнению $x-y=0$, либо уравнению $x+y=0$. Таким образом, линия, определяемая уравнением $x^2-y^2=0$, состоит из точек двух биссектрис координатных углов (рис. 25).

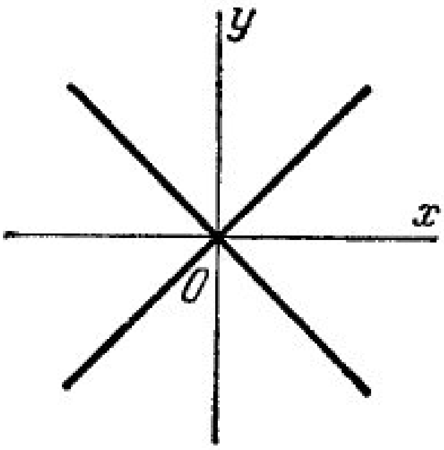

Рис. 25.

4. Данное уравнение есть $x^2+y^2=0$. Так как при вещественных x и y числа x^2 и y^2 не могут иметь разных знаков, то при сложении они не могут взаимно уничтожиться; следовательно, если $x^2+y^2=0$, то $x=0$ и $y=0$. Таким образом, данному уравнению удовлетворяют координаты только точки $O(0; 0)$. Значит, геометрическое место точек,

координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=0$, состоит лишь из одной точки. В данном случае уравнение определяет, как говорят, **вырожденную** линию.

5. Данное уравнение есть $x^2+y^2+1=0$. Так как при любых вещественных x и y числа x^2 и y^2 не отрицательны, то $x^2+y^2+1>0$. Значит, нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют данному уравнению; никакого геометрического образа на плоскости это уравнение не определяет.

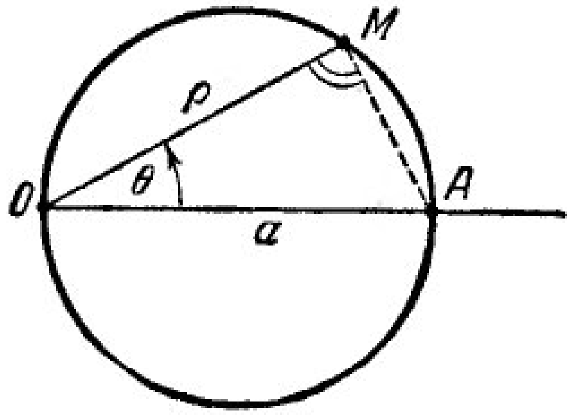

Рис. 26.

6. Данное уравнение есть $\rho=a\cos\theta$, где a — положительное число, переменные ρ и θ — полярные координаты. Обозначим через M точку с полярными координатами $(\rho; \theta)$, через A — точку с полярными координатами $(a; 0)$. Если $\rho=a\cos\theta$, то угол OMA — прямой, и обратно. Следовательно, геометрическое место точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению $\rho=a\cos\theta$, представляет собой окружность с диаметром OA (рис. 26).

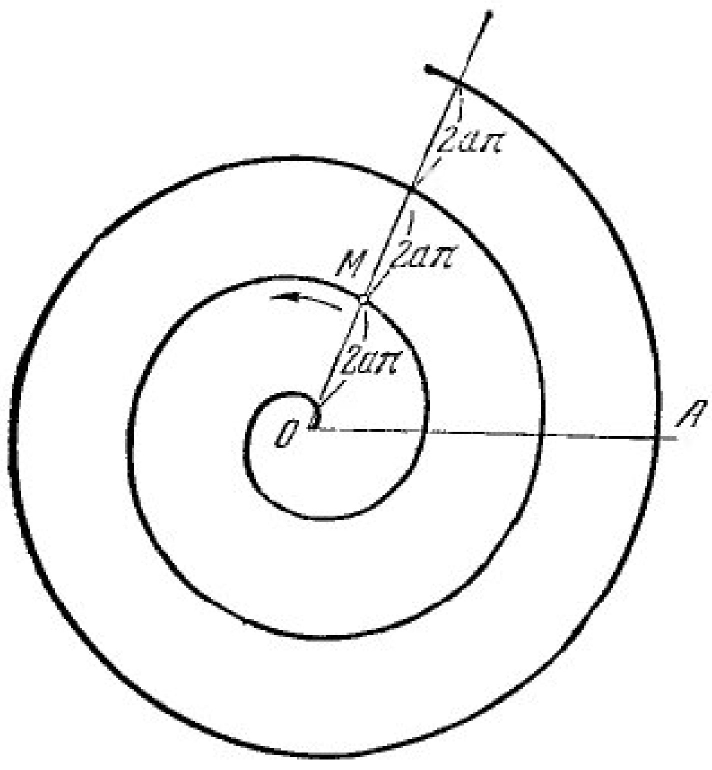

Рис. 27.

7. Пусть дано уравнение $\rho=a\theta$, где a — некоторое положительное число. Чтобы представить себе определяемую данным уравнением линию, будем предполагать, что θ возрастает, начиная от нуля, и проследим за соответствующим движением переменной точки $M(\rho; \theta)$, координаты которой связаны этим уравнением. Если $\theta=0$, то также $\rho=0$; если θ возрастает, начиная от нуля, то ρ будет возрастать пропорционально θ (число a служит коэффициентом пропор-

циональности). Мы видим, что переменная точка $M(\rho;\ \theta)$, исходя из полюса заданной полярной системы координат, движется вокруг полюса (в положительном направлении), одновременно удаляясь от него. Таким образом, точка M описывает некоторую с п и р а л ь; спираль, определяемая уравнением $\rho = a\theta$, называется *спиралью Архимеда* (рис. 27).

Если точка $M(\rho;\ \theta)$, исходя из произвольного положения, движется по спирали Архимеда и совершает в положительном направлении один полный оборот вокруг полюса, то

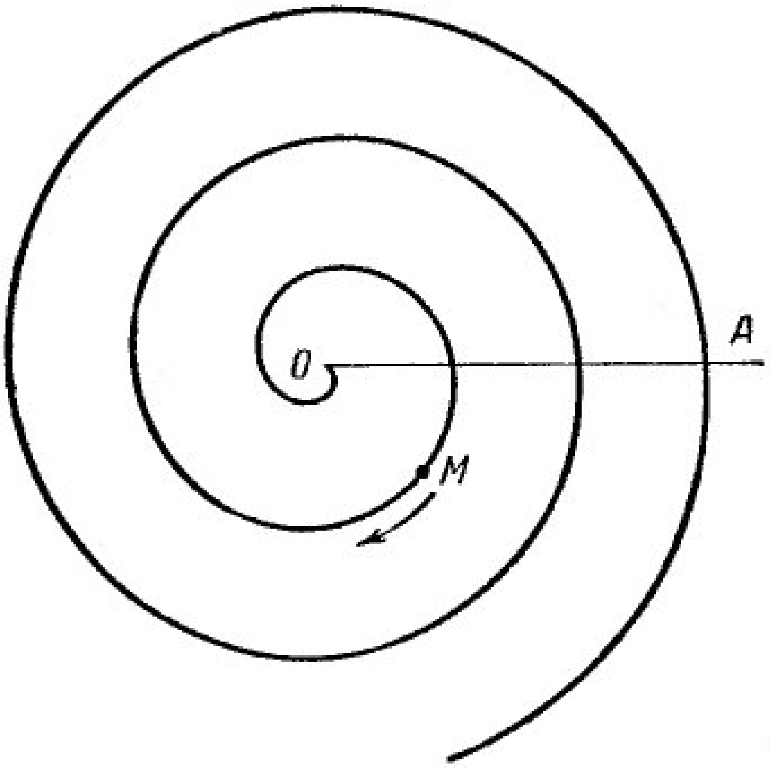

Рис. 28.

угол θ возрастает на 2π, а полярный радиус ρ на $2a\pi$. Отсюда следует, что спираль Архимеда рассекает каждый полярный луч на равные отрезки (не считая отрезка, примыкающего к полюсу); все эти отрезки имеют постоянную длину $2a\pi$.

Уравнение $\rho = a\theta$, где a — о т р и ц а т е л ь н о е число, определяет «обратную» спираль Архимеда, точки которой соответствуют отрицательным значениям θ (рис. 28).

8. Данное уравнение есть $\rho = \frac{a}{\theta}$, где a — некоторое положительное число; будем исследовать определяемую им линию. Возьмем какое-нибудь положительное значение θ, например $\theta = \frac{\pi}{2}$, ему соответствует точка $M_1\left(\frac{2a}{\pi};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Если θ затем неограниченно увеличивается, то ρ, будучи обратно пропорциональным θ, стремится к нулю; следовательно, переменная точка $M(\rho;\ \theta)$ движется вокруг полюса в положительном направлении и вместе с тем неограниченно приближается к полюсу (рис. 29). Пусть теперь θ уменьшается, начиная от значения $\frac{\pi}{2}$, и стремится к нулю; при этом $\rho \to \infty$ и точка $M(\rho;\ \theta)$ уходит в бесконечность. Чтобы

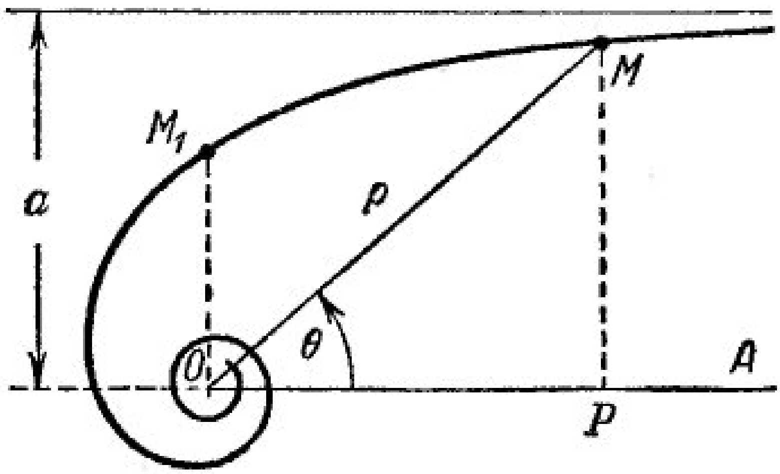

Рис. 29.

исследовать движение точки M более детально, спроектируем точку M на полярную ось и обозначим проекцию через P; тогда, очевидно, $PM = \rho \sin\theta$ (см. вторую из формул (1) n° 15). В силу данного уравнения $\rho \sin\theta = a\frac{\sin\theta}{\theta}$. Но, как известно из анализа, $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ при $\theta \to 0$. Следовательно, при $\theta \to 0$ величина PM стремится к a. Отсюда можно заключить, что точка M, уходя в бесконечность, приближается к прямой, которая параллельна полярной оси и отстоит от нее на расстоянии a.

Мы видим, что данное уравнение, как и в предыдущем примере, определяет спираль; такая спираль называется *гиперболической*.

Уравнение $\rho = \frac{a}{\theta}$, где a — отрицательное число, определяет «обратную» гиперболическую спираль, точки которой соответствуют отрицательным значениям θ (рис. 30).

9. Данное уравнение есть $\rho = a^{\theta}$, где a — положительное число, большее единицы. Это уравнение определяет спираль, называемую *логарифмической*.

Чтобы уяснить себе особенности логарифмической спирали, предположим, что $\theta \to +\infty$; в таком случае $\rho = a^{\theta} \to +\infty$ и, следовательно, переменная точка $M(\rho;\ \theta)$, двигаясь вокруг полюса в положительном направлении, неограниченно удаляется от полюса. Если точка M, исходя

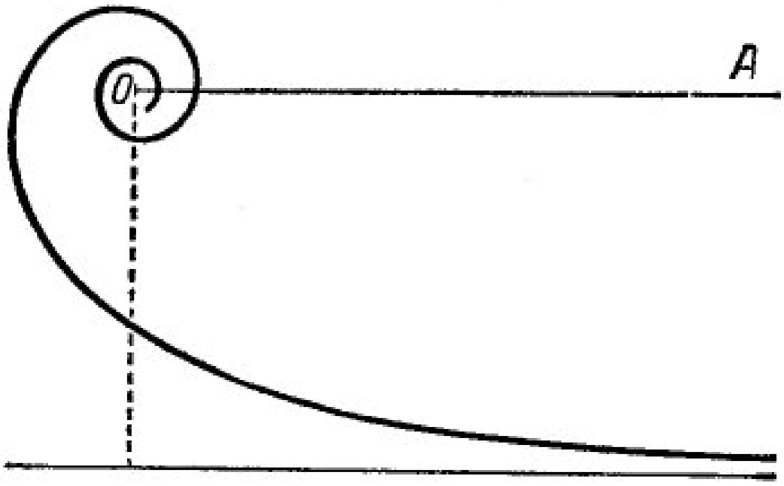

Рис. 30.

из произвольного положения, совершает один полный оборот в положительном направлении вокруг полюса, то к ее полярному углу прибавляется 2π, а полярный радиус умножается на $a^{2\pi}$ (так как $a^{\theta+2\pi} = a^{\theta}a^{2\pi}$). Таким образом, с каждым оборотом вокруг полюса полярный радиус точки M возрастает, причем рост идет в геометрической прогрессии (со знаменателем $a^{2\pi}$).

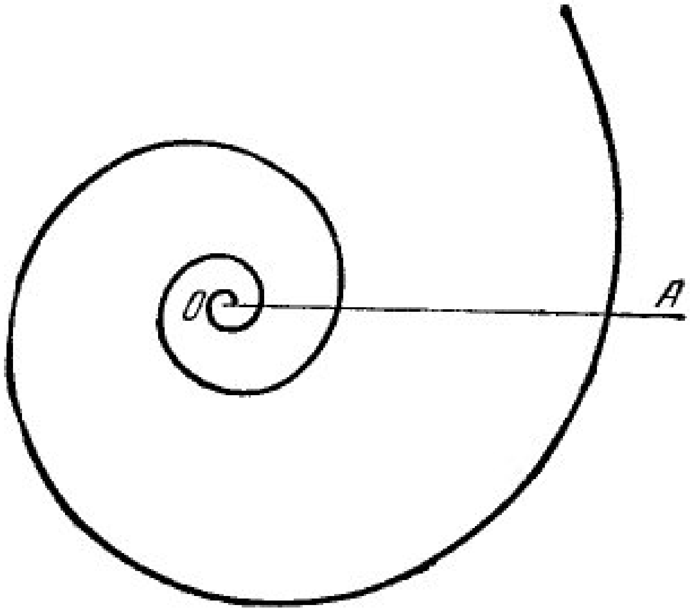

Рис 31.

Предположим теперь, что $\theta \to -\infty$; тогда $\rho \to 0$ и точка M, вращаясь вокруг полюса (в отрицательном направлении), неограниченно приближается к нему (рис. 31).

Если a меньше единицы (будучи положительным), то уравнение $\rho = a^{\theta}$ определяет «обратную» логарифмическую спираль (рис. 32). В этом случае при вращении точки M вокруг полюса в положительном направлении она неограниченно приближается к полюсу, а при вращении в отрицательном направлении — неограниченно удаляется от него (так как в случае $0 < a < 1$ имеем $a^\theta \to 0$ при $\theta \to +\infty$ и $a^\theta \to +\infty$ при $\theta \to -\infty$).

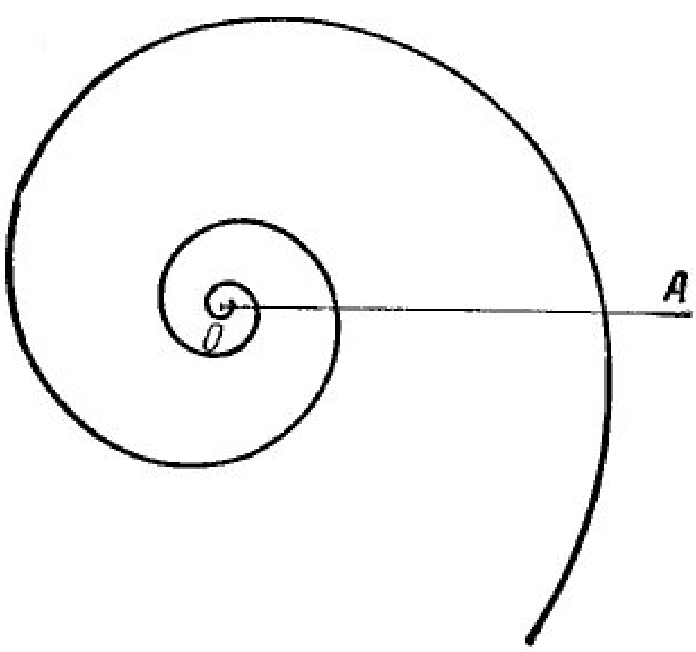

Рис. 32.

Если $a = 1$, то уравнение $\rho = a^\theta$ определяет окружность, так как для любого θ будет $\rho = 1$.

Мы привели сейчас примеры уравнений настолько простых, что определяемые ими линии усматривались непосредственно. В более сложных случаях даже приближенное изображение линии (с заданной точностью) может быть весьма затруднительным и потребовать применения разнообразных методов анализа и аналитической геометрии.

§ 12. Примеры вывода уравнений заранее данных линий

39. В предыдущем параграфе мы рассмотрели несколько примеров определения линии при помощи заранее данного уравнения. Здесь мы рассмотрим примеры противоположного характера; в каждом из них линия определяется чисто геометрически, а уравнение ее требуется найти (как говорят, «вывести» из геометрического определения линии).

Если линия определена как геометрическое место точек, подчиненных известному условию, то, выражая это условие при помощи координат, мы получим некоторую зависимость между координатами. Это и будет уравнение данной линии, так как ему удовлетворяют координаты точки в том и только в том случае, когда расположение точки подчинено поставленному условию, т. е. когда точка лежит на данной линии.

40. Пример. Дана декартова прямоугольная система координат. Вывести уравнение окружности, которая имеет центр $C(\alpha; \beta)$ и радиус, равный r (рис. 33).

Обозначим буквой M переменную точку, буквами x, y — ее координаты (т. е. текущие координаты). Данная окружность есть геометрическое место точек, каждая из которых отстоит от точки C на расстоянии r; таким образом, точка M находится на данной окружности в том и только в том случае, когда

$$CM = r. \tag{1}$$

По формуле (2) n° 18 имеем $CM = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$. Заменяя этим выражением величину CM *) в равенстве (1), получаем:

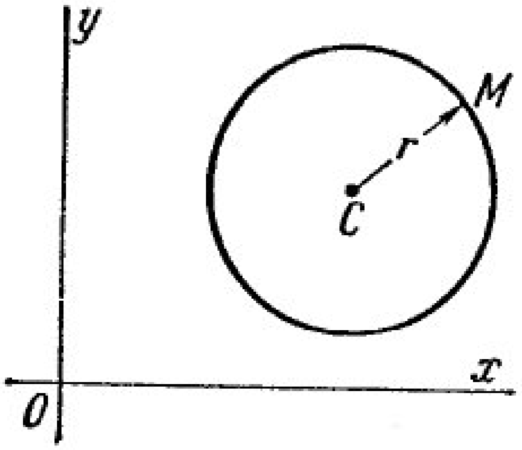

Рис. 33.

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r. \tag{2}$$

Мы нашли уравнение, которое связывает величины x, y и которому удовлетворяют координаты тех и только тех точек, что лежат на данной окружности. Это и есть, следовательно, искомое уравнение. Задача решена.

41. Возводя обе части равенства (2) в квадрат, мы получим стандартную запись уравнения окружности с центром $C(\alpha; \beta)$ и радиусом r:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2. \tag{3}$$

Оно встречается во многих геометрических задачах **). Полагая в нем $\alpha = 0$, $\beta = 0$, найдем уравнение окружности с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{4}$$

42. Пример. Вывести уравнение траектории точки M, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(2; 0)$, чем к точке $B(8; 0)$.

Обозначим через x, y координаты точки M (т. е. текущие координаты). Согласно условию задачи, точка M всегда вдвое ближе к A, чем к B, т. е.

$$2AM = BM. \tag{5}$$

---

*) См. сноску на стр. 12.

**) При возведении обеих частей уравнения в квадрат может получиться уравнение, не равносильное исходному, а именно, удовлетворяющееся и такими значениями x и y, которые не удовлетворяют исходному уравнению. В данном случае, однако, так не будет, т. е. уравнение (3) равносильно уравнению (2). В самом деле, извлекая из обеих частей уравнения (3) квадратный корень, мы получим $+\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \pm r$. Но в правой части необходимо взять знак $+$, так как в противном случае получится неверное равенство. Таким образом, уравнение (2) выводится из уравнения (3), как и уравнение (3) выводится из уравнения (2).

По формуле (2) n° 18

$$AM=\sqrt{(x-2)^2+y^2}, \qquad BM=\sqrt{(x-8)^2+y^2}.$$

Отсюда и из равенства (5) находим:

$$2\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-8)^2+y^2}. \tag{6}$$

Мы получили уравнение, связывающее величины x и y. Ему удовлетворяют координаты любой точки рассматриваемой траектории и не удовлетворяют координаты никакой другой точки плоскости. Следовательно, это уравнение и является искомым. Задача решена. Мы можем только пожелать переделать запись этого уравнения и привести его к более удобному виду. С этой целью возведем обе части уравнения (6) в квадрат. Мы получим уравнение:

$$4[(x-2)^2+y^2]=(x-8)^2+y^2,$$

равносильное уравнению (6) *). Раскрывая скобки, находим:

$$4x^2-16x+16+4y^2=x^2-16x+64+y^2$$

или

$$x^2+y^2=16.$$

Получив уравнение траектории в таком виде, мы легко можем уяснить себе форму этой траектории. Действительно, сравнивая полученное уравнение с уравнением (4) n° 41, заключаем: рассматриваемая траектория есть окружность, имеющая центр в начале координат и радиус $r=4$.

43. Пример. Составить уравнение прямой в полярных координатах, считая известными расстояние p от полюса до прямой и угол θ_0 от полярной оси до луча, направленного из полюса перпендикулярно к прямой (рис. 34).

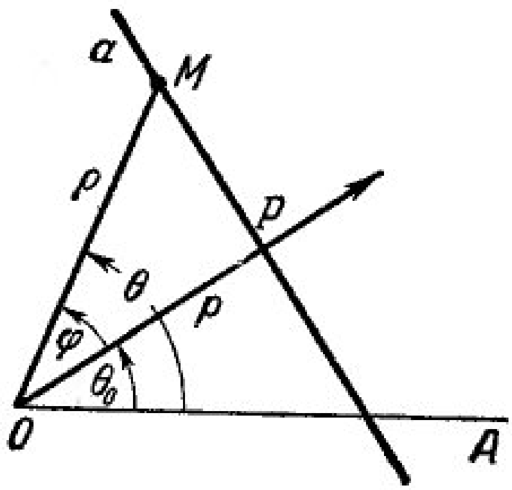

Рис. 34.

Решение. Пусть a — произвольная прямая, P — основание перпендикуляра, опущенного на нее из полюса O; согласно условию будем считать известными $OP=p$ и угол θ_0 от полярной оси OA до луча OP. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(\rho;\ \theta)$. Очевидно, точка M лежит на прямой a в том и только в том случае, когда проекция точки M на луч OP совпадает с точкой P, т. е. когда $\rho\cos\varphi=p$, где $\varphi=\angle POM$. Заметив, что $\varphi=\theta-\theta_0$ (или $\varphi=\theta_0-\theta$), получаем отсюда искомое уравнение прямой a в виде $\rho\cos(\theta-\theta_0)=p$; текущие координаты здесь суть ρ и θ.

*) Это доказывается так же, как аналогичное утверждение в n° 41 (см. предыдущее подстрочное примечание).

§ 13. Задача о пересечении двух линий

44. В аналитической геометрии часто приходится решать следующую задачу:

Даны уравнения двух линий:

$$F(x, y)=0, \quad \Phi(x, y)=0.$$

Найти точки их пересечения.

Как всегда в аналитической геометрии, говоря: «найти точки», мы подразумеваем: «вычислить их координаты». Принцип решения этой задачи усматривается сразу из определения уравнения линии, данного в n° 34.

В самом деле, каждая точка пересечения данных линий есть их общая точка. Следовательно, координаты такой точки должны удовлетворять как уравнению $F(x, y)=0$, так и уравнению $\Phi(x, y)=0$. Мы найдем все точки пересечения данных линий, если решим их уравнения совместно. При этом каждое решение системы

$$\left.\begin{aligned} F(x, y)&=0,\\ \Phi(x, y)&=0 \end{aligned}\right\}$$

определяет одну из искомых точек. Само собой разумеется, что практическое осуществление этого общего принципа может натолкнуться на вычислительные трудности.

Пример 1. Даны уравнения двух окружностей $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ и $(x-3)^2+(y-5)^2=4$. Найти точки их пересечения.

Решение. Раскрывая скобки и перенося все члены в левую сторону, можем записать данные уравнения в виде:

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0, \qquad x^2+y^2-6x-10y+30=0. \tag{1}$$

Вычтем из первого уравнения второе; получим: $4x+4y-24=0$ или $y=-x+6$. Объединяя это уравнение с первым из данных, составим систему:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-2x-6y+6&=0,\\ y&=-x+6. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Система (2) равносильна системе (1) *). Поэтому задача сводится к решению этой системы. Подставим в первое из уравнений (2) $y=-x+6$; найдем: $x^2+x^2-12x+36-2x+6x-36+6=0$, или

---

*) Так как система (2) выведена из системы (1), а систему (1), в свою очередь, легко вывести из системы (2).

$x^2-4x+3=0$. Отсюда $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}$, т. е. $x_1=1$, $x_2=3$. По найденым значениям x определим соответствующие значения y из уравнеиня $y=-x+6$; при $x_1=1$ получаем $y_1=5$, при $x_2=3$ имеем $y_2=3$. Таким образом, искомыми являются точки $(1;\ 5)$ и $(3;\ 3)$.

Пример 2. Даны уравнения двух линий: $x+y=0$ (биссектриса второго координатного угла) и $(x-5)^2+y^2=1$ (окружность). Найти точки их пересечения.

Решение. Составим систему

$$\left.\begin{aligned}(x-5)^2+y^2=1,\\ x+y=0.\end{aligned}\right\}$$

Подставим в первое уравиение $y=-x$ (из второго). Получаем: $(x-5)^2+x^2=1$, или $x^2-5x+12=0$. Отсюда

$$x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-12}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{-23}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-23}$ есть мнимое число, заключаем: система не имеет вещественных решений, следовательно, даиные линии не пересекаются.

§ 14. Параметрические уравнения линии

45. Пусть задана какая-нибудь система координат и пусть даны две функции от одного аргумента t:

$$\left.\begin{aligned}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Условимся величины x и y при каждом значении t рассматривать как координаты некоторой точки M. При изменении t величины x и y, вообще говоря, меняются, следовательно, точка M перемещается по плоскости. *Равенства* (1) *называются параметрическими уравнениями траектории точки M; аргумент t называется переменным параметром.*

Параметрические уравнения играют важную роль в механике, где они используются в качестве так называемых *уравнений движения*. Именно, если материальная точка M движется по плоскости, то в каждый момент времени t она имеет определенные координаты x, y. Уравнения, которые выражают x и y как функции времени t, и называются уравнениями движения точки M; они имеют вид (1).

В механике движение материальной точки считается математически заданным, если составлены его уравнения.

46. Пусть некоторая линия определена параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ как траектория точки $M(x;\ y)$.

Если $F(x, y)=0$ есть следствие данных уравнений, то ему удовлетворяют координаты $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ точки M при любом t. Таким образом, точка M движется по линии $F(x, y)=0$. Если при этом точка M обходит всю эту линию, то $F(x, y)=0$ представляет собой обычное уравнение траектории точки M. Составление такого следствия $F(x, y)=0$ параметрических уравнений $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ называется *исключением параметра*.

Пример. Уравнения $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ суть параметрические уравнения окружности, которая имеет центр в начале координат и радиус r. В самом деле, возводя эти уравнения в квадрат и складывая почленно, мы получим их следствие $x^2+y^2=r^2$. Отсюда видно, что точка $M(x;\ y)$ движется по указанной окружности. Кроме того, так как параметр t принимает все возможные численные значения, то луч OM (который составляет с осью Ox угол t) занимает все возможные положения. Следовательно, точка M обегает всю окружность (при бесконечном возрастании t бесконечно много раз).

47. Пусть $\rho=f(\theta)$ — полярное уравнение некоторой линии. Та же линия в декартовых координатах может быть определена параметрическими уравнениями

$$x=f(\theta)\cos\theta,$$
$$y=f(\theta)\sin\theta.$$

Чтобы получить эти уравнения, достаточно в формулах $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ (см. п° 15) заменить ρ функцией $f(\theta)$.

Пример. Спираль Архимеда, гиперболическая спираль и логарифмическая спираль имеют полярные уравнения соответственно $\rho=a\theta$, $\rho=\frac{a}{\theta}$, $\rho=a^\theta$ (см. п° 38). Отсюда находим в декартовых координатах параметрические уравнения:

$$x=a\theta\cos\theta,\qquad y=a\theta\sin\theta$$

— спирали Архимеда,

$$x=\frac{a\cos\theta}{\theta},\qquad y=\frac{a\sin\theta}{\theta}$$

— гиперболической спирали и

$$x=a^\theta\cos\theta,\qquad y=a^\theta\sin\theta$$

— логарифмической спирали.

Во всех рассмотренных случаях параметром является полярный угол θ переменной точки.

§ 15. Алгебраические линии

48. Основным предметом изучения в аналитической геометрии являются линии, определяемые по отношению к декартовым прямоугольным координатам алгебраическими уравнениями. Это суть уравнения следующих видов:

$$Ax+By+C=0; \tag{1}$$
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0; \tag{2}$$
$$Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Ex^2+Fxy+Gy^2+$$
$$+Hx+Iy+K=0; \tag{3}$$

. . . .

Здесь A, B, C, D, E и т. д.— некоторые фиксированные числа; они называются коэффициентами указанных уравнений.

Уравнение (1) называется *общим уравнением первой степени* (численные значения его коэффициентов могут быть какими угодно, но при условии, чтобы уравнение действительно содержало члены первой степени, т. е. одновременное обращение в нуль A и B исключается); уравнение (2) называется *общим уравнением второй степени* (численные значения его коэффициентов могут быть какими угодно, но при условии, чтобы уравнение действительно содержало члены второй степени, т. е. случай, когда все три коэффициента A, B, C равны нулю, исключается); уравнение (3) называется *общим уравнением третьей степени* (численные значения его коэффициентов могут быть какими угодно, исключая случай, когда все четыре коэффициента A, B, C, D равны нулю). Аналогичный вид имеют уравнения четвертой, пятой и т. д. степеней.

В качестве примеров неалгебраических уравнений укажем следующие:

$$y-\sin x=0, \qquad 10^x-5^y+1=0,$$
$$y-\log x=0, \qquad 2^{xy}-x-y=0.$$
$$y-10^x=0,$$

Линия, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется алгебраическим уравнением степени n, называется алгебраической линией n-го порядка.

49. Теорема 8. *Линия, которая определяется алгебраическим уравнением степени n в какой-нибудь системе декартовых прямоугольных координат, в любой другой системе таких же координат определяется также алгебраическим уравнением и той же степени n.*

Доказательство. Пусть некоторая линия определена алгебраическим уравнением степени n в системе координат с осями Ox и Oy. При переходе к какой-нибудь другой системе координат с осями $O'x'$, $O'y'$ координаты всех точек плоскости преобразуются по формулам вида

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha \mp y'\sin\alpha+a,\\ y&=x'\sin\alpha \pm y'\cos\alpha+b \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

при некотором выборе знаков перед вторыми членами в правых частях (см. замечание в конце п° 29). Чтобы получить уравнение той же линии в новых координатах, мы должны старые аргументы ее уравнения заменить по формулам (4). Левая часть этого уравнения представляет собой сумму одночленов, каждый из которых есть взятое с некоторым коэффициентом произведение целых неотрицательных степеней переменных x и y. После замены x и y по формулам (4) и после раскрытия всех скобок мы получим в левой части преобразуемого уравнения сумму новых одночленов, каждый из которых есть взятое с некоторым коэффициентом произведение целых неотрицательных степеней новых переменных x' и y'. Следовательно, алгебраический характер уравнения при таком преобразовании сохраняется.

Теперь мы должны доказать, что и степень уравнения остается неизменной. Это почти очевидно. В самом деле, так как формулы (4) имеют относительно x' и y' первую степень, то после замены x и y по этим формулам и раскрытия всех скобок в левой части преобразуемого уравнения не может возникнуть ни одного одночлена, степень которого*) относительно новых переменных x' и y' была бы выше n.

Таким образом, при любом указанном преобразовании алгебраического уравнения стéпень его не может повыситься. Заранее, однако, неясно, не может ли она понизиться (т. е. не могут ли все старшие одночлены после преобразования взаимно уничтожиться). Но если при переходе от одной декартовой системы прямоугольных координат к другой такой же системе координат степень некоторого алгебраического уравнения понижается, то при обратном переходе она должна повыситься, а это, как мы видели, невозможно. Теорема доказана.

Установленная сейчас теорема показывает, что алгебраический характер уравнения и порядок суть свойства, присущие самой алгебраической линии, т. е. что они не связаны с выбором координатных осей.

Общая теория алгебраических линий служит предметом специальных сочинений по аналитической геометрии. В этой книге будут систематически рассматриваться только линии первого и второго порядков.

В ближайших параграфах устанавливается, что линии первого порядка суть прямые (и только прямые).

---

*) Степенью одночлена называется сумма показателей входящих в него переменных.

ГЛАВА 4

ЛИНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 16. Угловой коэффициент

50. Пусть задана декартова прямоугольная система координат и некоторая прямая. Обозначим через α угол, на который нужно повернуть ось Ox, чтобы придать ей одно из направлений данной прямой; углу припишем знак плюс или минус в зависимости от того, будет ли этот поворот положительным или отрицательным. *Назовем угол α углом наклона данной прямой к оси Ox.*

Если после некоторого поворота оси Ox мы придадим ей одно из направлений данной прямой, то, совершая дополнительный поворот на угол $\pm\pi$, или $\pm 2\pi$, или $\pm 3\pi$ и т. д., мы каждый раз снова будем получать одно из направлений данной прямой. Таким образом, угол α может иметь множество различных значений, которые отличаются друг от друга на величину $\pm n\pi$, где n — натуральное число. *Чаще всего в качестве угла наклона прямой к оси Ox берут наименьшее положительное значение угла α* (рис. 35, *а*, 35, *б*), *а в случае, когда прямая параллельна оси Ox, угол наклона ее к оси Ox считают равным нулю.*

Существенно заметить, что для данной прямой все значения угла наклона ее к оси Ox имеют один и тот же тангенс (так как $\operatorname{tg}(\alpha \pm n\pi) = \operatorname{tg}\alpha$).

51. *Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется угловым коэффициентом этой прямой.*

Обозначая угловой коэффициент буквой k, запишем предыдущее определение символически:

$$k = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (1)$$

В частности, если $\alpha = 0$, то и $k = 0$, т. е. прямая, параллельная оси Ox, имеет угловой коэффициент, равный нулю. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $k = \operatorname{tg} \alpha$ теряет арифметический смысл (не выражается никаким числом), т. е. прямая, перпендикулярная к оси Ox, не имеет углового коэффициента. Впрочем, очень

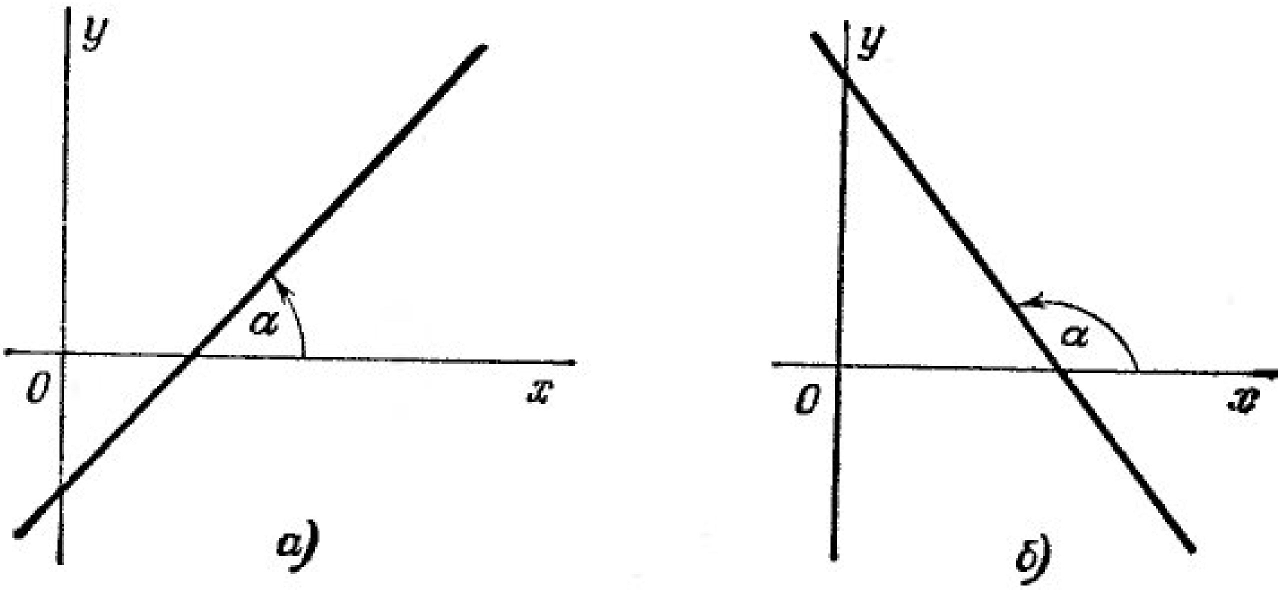

Рис. 35.

часто говорят, что если прямая перпендикулярна к оси Ox, ее угловой коэффициент «обращается в бесконечность»; этим выражают тот факт, что $k \to \infty$ при $\alpha \to \frac{\pi}{2}$.

Угловой коэффициент является важнейшей характеристикой направления прямой и постоянно используется в аналитической геометрии и ее приложениях.

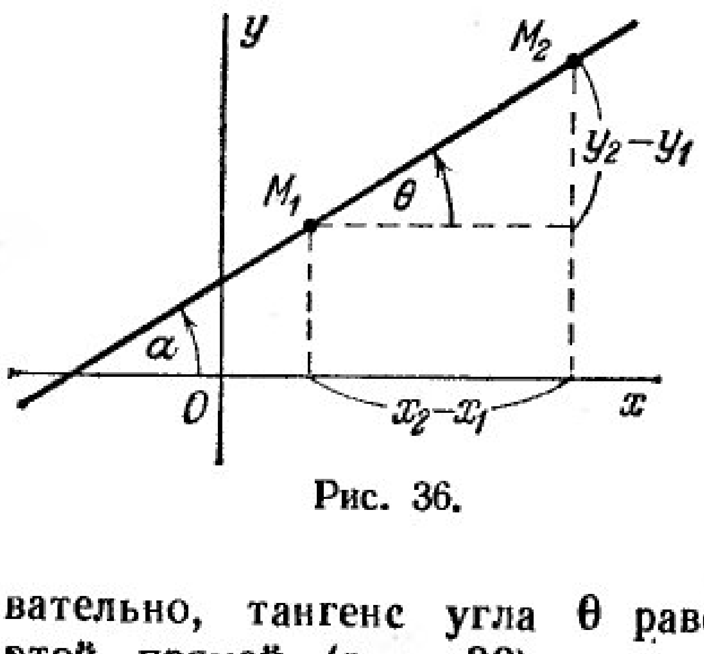

Рис. 36.

52. Рассмотрим произвольную прямую; предположим только, что она не перпендикулярна к оси Ox. Возьмем на ней любые две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Полярный угол θ отрезка $\overline{M_1M_2}$ равен углу наклона рассматриваемой прямой к оси Ox, следовательно, тангенс угла θ равен угловому коэффициенту этой прямой (рис. 36); отсюда и по формуле (6) n° 19 находим:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{2}$$

(это соотношение легко усматривается также из рис. 36). *Формула* (2) *выражает угловой коэффициент прямой по двум ее данным точкам.*

§ 17. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

53. Пусть дана некоторая прямая; как и раньше, предположим, что она не перпендикулярна к оси Ox. *Выведем уравнение данной прямой, полагая известными ее угловой коэффициент* k *и величину* b *направленного отрезка* $\overline{OB}$, который она отсекает на оси Oy (см. рис. 37).

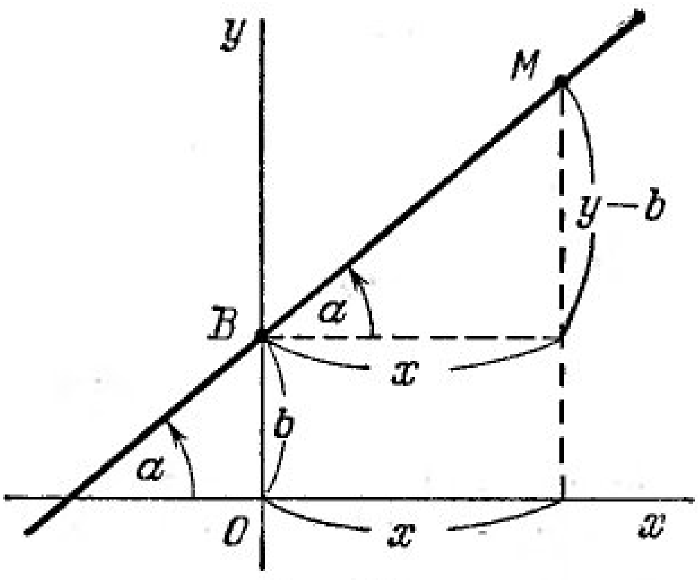

Рис. 37.

Обозначим через M переменную точку, через x, y — ее координаты (т. е. текущие координаты); рассмотрим, кроме того, точку $B(0, b)$, в которой прямая пересекает ось Oy. Вычислим правую часть формулы (2) n° 52, приняв в качестве M_1 точку B, в качестве M_2 — точку M. Если точка M лежит на данной прямой, то в результате вычисления мы получим угловой коэффициент этой прямой, т. е.

$$\frac{y-b}{x}=k, \tag{3}$$

если же M не лежит на данной прямой, то это равенство не будет соблюдаться. Следовательно, равенство (3) является у р а в н е н и е м д а н н о й п р я м о й (оно легко усматривается также из рис. 37, если принять во внимание, что $k=\operatorname{tg}\alpha$). Освобождаясь от знаменателя и перенося b в правую сторону, получим

$$y=kx+b. \tag{4}$$

54. Итак, *каждая прямая, не перпендикулярная к оси* Ox, *может быть определена уравнением вида* (4).

Обратно, *каждое уравнение вида* (4) *определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент* k *и отсекает на оси* Oy *отрезок величины* b. В самом деле, если дано уравнение $y=kx+b$, то, каковы бы ни были числа k и b, всегда возможно построить прямую, которая имеет данный угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок $\overline{OB}$ данной величины b; но тогда, согласно предыдущему, построенная прямая и будет определяться заданным уравнением. *Уравнение вида* (4) *называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

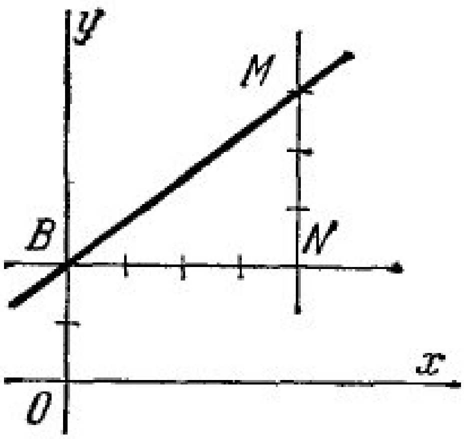

Рис. 38.

Пример. Построить прямую по уравнению

$$y=\frac{3}{4}x+2.$$

Решение. Отложим на оси Oy отрезок $OB=2$ (рис. 38); проведем через точку B в «правую» сторону параллельно оси Ox отрезок $BN=4$, и через точку N в направлении оси Oy («вверх») — отрезок $NM=3$. После этого, соединяя точки B и M, получим искомую прямую (она отсекает на оси Oy отрезок $b=2$ и составляет с осью Ox угол, тангенс которого равен $^3/_4$).

55. Функция

$$y=kx+b$$

называется *линейной*. На основании изложенного можно сказать, что *графиком линейной функции является прямая линия.*

При $b=0$ мы получаем:

$$y=kx. \tag{5}$$

Переменные x и y, связанные такой зависимостью, называются *пропорциональными* друг другу; число k называют *коэффициентом пропорциональности*. Из предыдущего ясно, что *графиком функции* $y=kx$ *является прямая, которая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент* k.

56. Во многих случаях встречается необходимость составить уравнение прямой, зная одну ее точку $M_1(x_1;\ y_1)$ и угловой коэффициент k. Искомое уравнение сразу получается из формулы (2) n° 52. В самом деле, пусть M — переменная точка, x, y — ее (текущие) координаты. Если M лежит на прямой, которая проходит через точку M_1

и имеет данный угловой коэффициент k, то в силу формулы (2) n° 52

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k; \tag{6}$$

если же точка M не лежит на этой прямой, то равенство (6) не соблюдается. Таким образом, равенство (6) и есть искомое уравнение; обычно его пишут в виде

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{7}$$

Замечание. В том частном случае, когда в качестве $M_1(x_1;\ y_1)$ берется точка $B(0;\ b)$, уравнение (7) принимает вид (4).

57. Применяя соотношение (7), легко решить следующую задачу: *составить уравнение прямой, которая проходит через две данные точки* $M_1(x_1;\ y_1)$ *и* $M_2(x_2;\ y_2)$.

Пользуясь формулой (2) n° 52, находим угловой коэффициент прямой

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

после чего, на основании (7), получаем искомое уравнение

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Это уравнение принято писать в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{8}$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3;\ 1)$ и $M_2(5;\ 4)$.

Решение. Подставляя данные координаты в соотношение (8), получим

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3},$$

или $3x-2y-7=0$.

§ 18. Вычисление угла между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

58. Одной из стандартных задач аналитической геометрии является вычисление угла между двумя прямыми. Здесь мы выведем формулу, по которой можно вычислить угол между прямыми, зная их угловые коэффициенты (мы предполагаем, что ни одна из прямых не перпендикулярна к оси Ox).

Рассмотрим две прямые; будем одну из них (какую угодно) называть первой, другую второй (рис. 39). Обозначим, соответственно, через k_1 и k_2 угловые коэффициенты этих прямых, через φ — *угол наклона второй прямой к первой, т. е. угол, на который нужно повернуть первую прямую,*

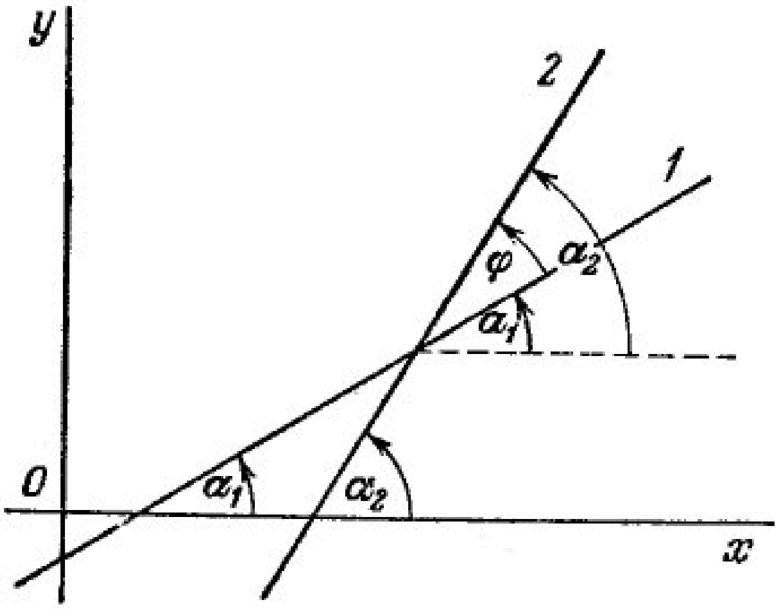

Рис. 39.

чтобы придать ей одно из направлений второй прямой. Углу φ припишем знак плюс или минус в зависимости от того, будет ли этот поворот положительным, или отрицательным. Говоря об угле между двумя прямыми, мы и будем подразумевать угол φ.

Пусть α_1 — угол наклона первой прямой к оси Ox. Если мы повернем ось Ox на угол α_1, то придадим ей одно из направлений первой прямой; если затем повернуть ось Ox еще на угол φ, то она получит одно из направлений второй прямой. Таким образом, прибавляя к углу α_1 угол φ, мы получаем угол наклона к оси Ox второй прямой; обозначим его через α_2. Согласно сказанному, имеем

$$\alpha_1 + \varphi = \alpha_2, \text{ или } \varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$; следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{1}$$

Это и есть формула, которую мы имели в виду получить.

В случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ тангенс угла φ теряет арифметический смысл («обращается в бесконечность»); в этом случае (и только в этом случае) знаменатель правой части формулы (1) будет равен нулю.

Пример. Даны прямые $y = -\frac{1}{7}x + 2$, $y = \frac{3}{4}x + 3$. Найти угол между ними.

Решение. По формуле (1) находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{21+4}{28-3} = 1.$$

Таким образом, один из углов, которые составляют данные прямые, равен 45°.

59. При решении различных задач аналитической геометрии часто бывает важно, зная уравнения двух прямых, установить, являются ли они параллельными или являются ли они перпендикулярными друг к другу.

Этот вопрос выясняется также весьма просто.

Пусть известны угловые коэффициенты двух прямых k_1 и k_2. Обозначим через α_1 и α_2 соответственно углы наклона этих прямых к оси Ox. Очевидно, данные прямые параллельны тогда и только тогда, когда углы наклона их к оси Ox имеют одинаковые значения, т. е. когда $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$. Отсюда заключаем, что *признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:*

$$k_2 = k_1.$$

Данные прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда угол φ между ними равен $\frac{\pi}{2}$, т. е. когда $\operatorname{tg}\varphi$ теряет арифметический смысл; в этом случае знаменатель правой части формулы (1) обращается в нуль и мы имеем: $1 + k_1 k_2 = 0$. Следовательно, *признаком перпендикулярности двух прямых* *является соотношение*

$$k_1 k_2 = -1.$$

Последнее соотношение обычно пишут в виде

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{2}$$

и, соответственно этому, условие перпендикулярности двух прямых формулируют так: *угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

Применяя установленные признаки, сразу можно сказать, что, например, прямые $y = \frac{2}{3}x + 1$, $y = \frac{2}{3}x + 5$ параллельны, а прямые $y = \frac{3}{4}x + 2$, $y = -\frac{4}{3}x + 3$ перпендикулярны друг другу.

Пример. Найти проекцию точки $P(4; 9)$ на прямую, проходящую через точки $A(3; 1)$ и $B(5; 2)$.

Решение. Искомую точку найдем, решая совместно уравнение прямой AB с уравнением перпендикуляра, проведенного к этой прямой из точки P. Прежде всего, составим уравнение прямой AB; применяя соотношение (8) n° 57, получаем:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1},$$

или

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Чтобы составить уравнение перпендикуляра из точки P на прямую AB, напишем уравнение произвольной прямой, проходящей через точку P; согласно соотношению (7) n° 56 имеем:

$$y - 9 = k(x - 4), \tag{*}$$

где k — пока еще не определенный угловой коэффициент. Нам нужно, чтобы искомая прямая прошла перпендикулярно к AB; следовательно, ее угловой коэффициент должен удовлетворять условию перпендикулярности с прямой AB. Так как угловой коэффициент прямой AB равен $\frac{1}{2}$, то согласно формуле (2) находим $k = -2$. Подставляя найденное значение k в уравнение (*), получаем:

$$y - 9 = -2(x - 4) \text{ или } y = -2x + 17.$$

Решая совместно уравнения

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},$$

$$y=-2x+17,$$

найдем координаты искомой проекции:

$$x=7, \quad y=3.$$

§ 19. Прямая как линия первого порядка. Общее уравнение прямой

60. Здесь мы докажем следующую принципиальную теорему:

Теорема 9. *В декартовых координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени и обратно, каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую.*

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение теоремы. Пусть дана произвольная прямая. Если эта прямая не перпендикулярна к оси Ox, то согласно n°53 она определяется уравнением вида $y=kx+b$, т. е. уравнением первой степени.

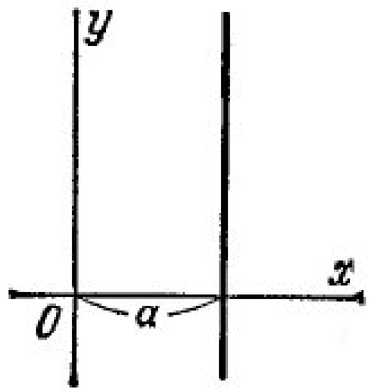

Рис. 40.

Если прямая перпендикулярна к оси Ox, то все ее точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox (рис. 40); таким образом, если мы обозначим величину этого отрезка буквой a, то получим уравнение прямой в виде $x=a$, что также есть уравнение первой степени. Итак, каждая прямая в декартовых координатах определяется уравнением первой степени; тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение первой степени

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

с какими угодно численными значениями A, B, C. Если $B\neq 0$, то данное уравнение можно записать в виде:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Обозначая $-\frac{A}{B}$ через k, $-\frac{C}{B}$ через b, получим $y=kx+b$, а такое уравнение согласно п° 53 определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок, величина которого равна b.

Если $B=0$, то $A\neq 0$, и уравнению (1) можно придать вид

$$x=-\frac{C}{A}.$$

Обозначая $-\frac{C}{A}$ через a, получим $x=a$, т. е. уравнение прямой, перпендикулярной к оси Ox. Итак, каждое уравнение первой степени определяет прямую. Теорема доказана.

Линии, которые в декартовых координатах определяются уравнением первой степени, называются, как мы знаем, линиями первого порядка (см. п° 48). Употребляя эту терминологию, мы можем высказать установленный результат так: *каждая прямая есть линия первого порядка; каждая линия первого порядка есть прямая.*

61. Уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется *общим уравнением прямой* (как общее уравнение первой степени). При различных численных значениях A, B, C оно может определять всевозможные прямые без исключения.

§ 20. Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках»

62. Рассмотрим три частных случая, когда уравнение первой степени является неполным.

1) $C=0$; *уравнение имеет вид* $Ax+By=0$ *и определяет прямую, проходящую через начало координат.*

Действительно, числа $x=0$, $y=0$ удовлетворяют уравнению $Ax+By=0$. Следовательно, начало координат принадлежит прямой.

2) $B=0$ $(A\neq 0)$; *уравнение имеет вид* $Ax+C=0$ *и определяет прямую, параллельную оси* Oy.

Этот случай уже рассматривался в п° 60 в ходе доказательства теоремы 9. Как было тогда показано, уравнение $Ax+C=0$ приводится к виду

$$x=a,$$

где $a=-\frac{C}{A}$. Такое уравнение определяет прямую, перпендикулярную оси Ox, потому что согласно этому уравнению все точки прямой имеют одинаковые абсциссы ($x = a$) и, следовательно, расположены на одном расстоянии от оси Oy («справа», если a — число положительное, «слева», если a — число отрицательное); a есть величина отрезка, который отсекает прямая на оси Ox (считая от начала координат; см. рис. 40).

В частности, если $a = 0$, то *прямая совпадает с осью* Oy. Таким образом, *уравнение*

$$x = 0$$

определяет ось ординат.

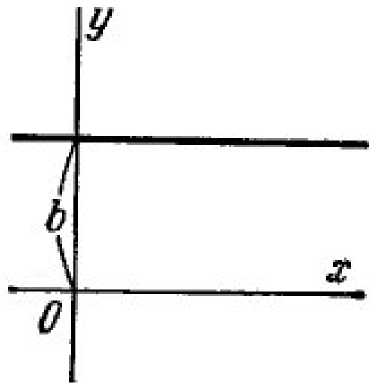

Рис. 41.

3) $A = 0$ $(B \neq 0)$; *уравнение имеет вид* $By + C = 0$ *и определяет прямую, параллельную оси* Ox.

Это устанавливается аналогично предыдущему случаю. Заметим только, что если положить $-\frac{C}{B} = b$, то уравнение $By + C = 0$ примет вид

$$y = b;$$

число b есть общий для всех точек прямой «уровень расположения» (рис. 41) и вместе с тем величина отрезка, который отсекает прямая на оси Oy (считая от начала координат).

В частности, если $b = 0$, то *прямая совпадает с осью* Ox. Таким образом, *уравнение*

$$y = 0$$

определяет ось абсцисс.

63. Пусть теперь дано уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

при условии, что ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Такое уравнение может быть приведено к некоторому специальному виду, который бывает удобен в ряде задач аналитической геометрии.

Перенесем свободный член C в правую часть уравнения; получим:

$$Ax + By = -C.$$

Поделим затем обе части уравнения на $-C$; тогда будем иметь:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Вводя обозначения

$$a=-\frac{C}{A},$$

$$b=-\frac{C}{B},$$

получим:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1)$$

Это и есть тот специальный вид уравнения прямой, который мы хотели получить.

Существенно, что числа a и b имеют весьма простой геометрический смысл. Именно, a и b суть величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях, считая каждый от начала координат (рис. 42). Чтобы убедиться в этом, найдем точки пересечения прямой с координатными осями. Точка пересечения прямой с осью Ox определяется путем совместного решения уравнения этой прямой и уравнения оси Ox:

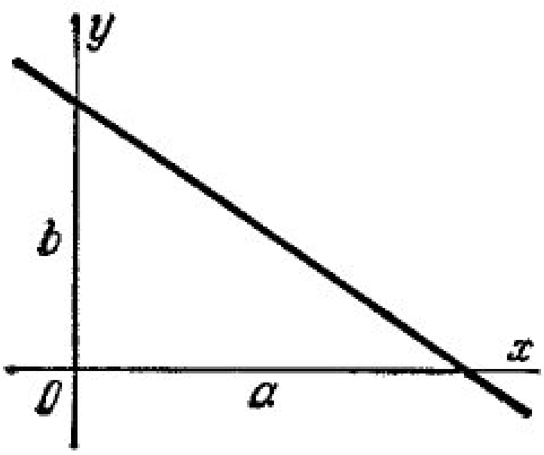

Рис. 42.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=1,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда $x=a$, $y=0$. Таким образом, величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox, действительно равна a. Аналогично устанавливается, что величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy, равна b.

Уравнение вида (1) принято называть *уравнением прямой «в отрезках»*. Эту форму уравнения, в частности, удобно использовать для построения прямой на чертеже.

Пример. Дана прямая

$$3x - 5y + 15 = 0.$$

Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить прямую на чертеже.

Решение. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

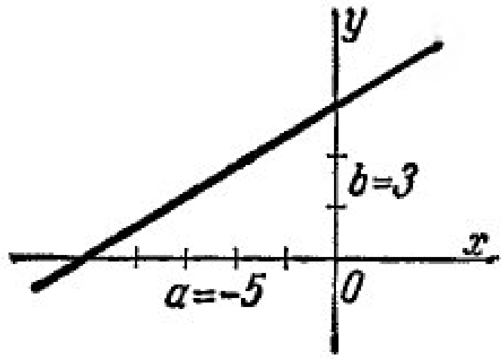

Рис. 43.

Мы получим эту прямую на чертеже, если отложим на координатных осях Ox и Oy отрезки, величины которых соответственно равны $a = -5$, $b = 3$, и соединим их концы (рис. 43).

§ 21. Совместное исследование уравнений двух прямых

64. Пусть дана система двух уравнений первой степени:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Каждое из уравнений (1) в отдельности определяет прямую. Каждое их совместное решение определяет общую точку этих прямых.

Будем исследовать систему (1) и дадим результатам исследования геометрическое истолкование.

Предположим, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. В этом случае определитель системы не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Значит, система совместна и имеет единственное решение *); соответственно, прямые, определяемые уравнениями системы, пересекаются в одной точке; следовательно, *эти прямые различны и не параллельны друг другу*. Координаты точки

*) См. Приложение, n°2.

пересечения находятся из уравнений (1) при помощи формул:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

или

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{2}$$

Предположим теперь, что $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Здесь в свою очередь имеются две возможности: либо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, либо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Рассмотрим первую из них. Обозначим каждое из равных отношений $\frac{A_1}{A_2}$ и $\frac{B_1}{B_2}$ буквой q; тогда имеем: $A_1 = A_2 q$, $B_1 = B_2 q$, $C_1 \neq C_2 q$. Помножим второе из уравнений (1) на q и вычтем полученное соотношение из первого уравнения; получим $C_1 - C_2 q = 0$. Это соотношение противоречиво, так как $C_1 \neq C_2 q$. Но оно вытекает из системы (1); следовательно, уравнения системы (1) ни при каких численных значениях аргументов x, y не могут быть одновременно правильными равенствами, т. е. система (1) не имеет совместных решений. В данном случае *уравнения* (1) *определяют прямые, не имеющие ни одной общей точки, т. е. параллельные.*

Рассмотрим вторую из двух указанных выше возможностей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Полагая каждое из этих отношений равным q, найдем: $A_1 = A_2 q$, $B_1 = B_2 q$, $C_1 = C_2 q$. Таким образом, при умножении левой части второго уравнения на некоторое число q мы получаем левую часть первого уравнения. Следовательно, уравнения (1) равносильны. Следовательно, *оба уравнения* (1) *определяют одну и ту же прямую.*

Примеры: 1) Прямые

$$3x + 4y - 1 = 0,$$
$$2x + 3y - 1 = 0$$

пересекаются, так как $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{3}$. Координаты точки пересечения суть $x=-1$, $y=+1$.

2) Прямые

$$2x+3y+1=0,$$
$$4x+6y+3=0$$

параллельны, так как $\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \neq \frac{1}{3}$. (Система данных уравнений, очевидно, несовместна, так как, умножая первое из них на 2 и отнимая от второго, получим противоречивое равенство $1=0$.)

3) Прямые

$$x+\ y+1=0,$$
$$2x+2y+2=0$$

совпадают друг с другом, так как данные уравнения равносильны.

Замечание. *Соотношение* $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ *называют условием параллельности прямых*

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

хотя, как мы видели, при этом условии прямые могут быть либо параллельными, либо совпадающими. Таким образом, говоря, что соотношение $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ есть условие параллельности двух прямых, нужно условиться случай, когда две прямые совпадают, рассматривать в качестве особого (предельного) случая их параллельности.

65. Из рассуждений предыдущего пункта непосредственно вытекает следующее важное предложение.

Два уравнения

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \ \text{и} \ A_2x+B_2y+C_2=0$$

определяют одну прямую в том и только в том случае, когда их коэффициенты пропорциональны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Это предложение в дальнейшем будет использоваться.

§ 22. Нормальное уравнение прямой. Задача вычисления расстояния от точки до прямой

66. Здесь мы рассмотрим один специальный вид записи уравнения прямой, известный под названием нормального уравнения прямой.

Пусть дана какая-нибудь прямая. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную к данной, — мы будем называть ее *нормалью*, — и пометим буквой P точку, в которой она пересекает данную прямую (рис. 44).

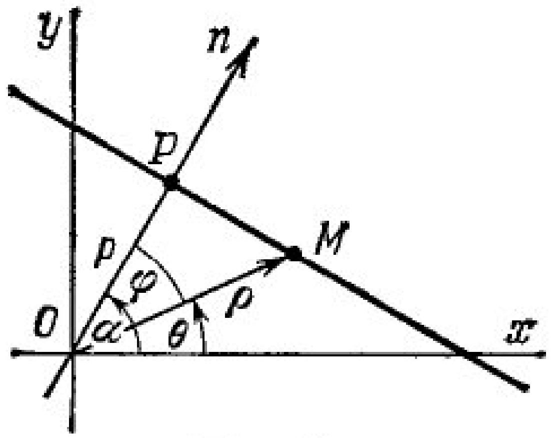

Рис. 44.

На нормали мы введем положительное направление от точки O к точке P (если точка P совпадает с точкой O, т. е. если данная прямая проходит через начало координат, то положительное направление нормали выберем произвольно). Таким образом, нормаль является осью. Обозначим через α угол от оси Ox до направленной нормали, через p — длину отрезка $\overline{OP}$.

Угол α будем понимать как в тригонометрии и будем называть его полярным углом нормали.

Мы выведем сейчас уравнение данной прямой, считая известными числа α и p. С этой целью возьмем на прямой произвольную точку M и обозначим через x, y ее координаты; очевидно, проекция отрезка $\overline{OM}$ на нормаль равна OP, а так как положительное направление нормали совпадает с направлением отрезка $\overline{OP}$, то величина этого отрезка выражается положительным числом, именно числом p:

$$\text{пр}_n \overline{OM} = p. \tag{1}$$

Найдем выражение проекции отрезка $\overline{OM}$ на нормаль через координаты точки M. С этой целью обозначим через φ угол наклона отрезка $\overline{OM}$ к нормали, через ρ, θ — полярные координаты точки M. Согласно n° 20 имеем:

$$\text{пр}_n \overline{OM} = \rho\cos\varphi = \rho\cos(\alpha - \theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) =$$
$$= (\rho\cos\theta)\cos\alpha + (\rho\sin\theta)\sin\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$\text{пр}_n \overline{OM} = x \cos\alpha + y \sin\alpha. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, или

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{3}$$

Это и есть уравнение данной прямой (ему, как мы видим, удовлетворяют координаты x, y каждой точки M, лежащей на данной прямой; если же точка M не лежит на данной прямой, то ее координаты уравнению (3) не удовлетворяют, так как тогда $\text{пр}_n \overline{OM} \neq p$).

Уравнение прямой, написанное в форме (3), *называется нормальным; в этом уравнении* α *обозначает полярный угол нормали,* p — *расстояние от начала координат до прямой.*

67. Пусть дана произвольная прямая. Построим ее нормаль n (назначив на нормали положительное направление так, как было описано в предыдущем п°). Пусть, далее, M^* — какая угодно точка плоскости, d — ее расстояние от данной прямой (рис. 45).

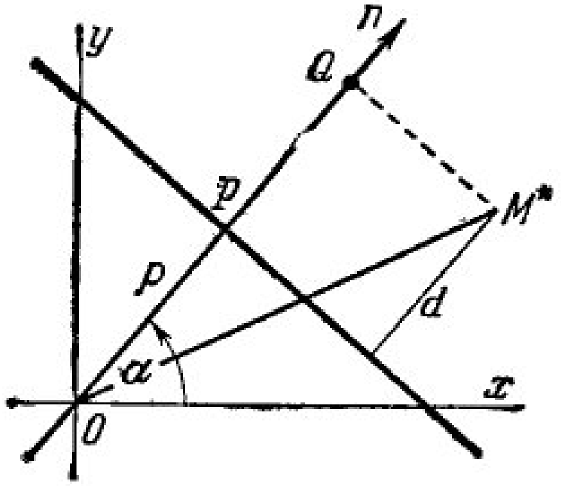

Рис. 45.

Условимся называть *отклонением* точки M^* от данной прямой число $+d$, если M^* лежит по ту сторону от прямой, куда идет положительное направление нормали, и $-d$, если M^* лежит с другой стороны от данной прямой. Отклонение точки от прямой будем обозначать буквой δ; таким образом: $\delta = \pm d$, причем полезно заметить, что $\delta = +d$, когда точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от прямой, и $\delta = -d$, когда точка M^* и начало координат лежат по одну сторону от прямой (для точек, лежащих на прямой, $\delta = 0$).

Одной из стандартных задач аналитической геометрии является задача вычисления отклонения точки от прямой. Эта задача решается следующей теоремой:

Теорема 10. *Если точка M^* имеет координаты $(x^*; y^*)$, а прямая задана нормальным уравнением*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

то отклонение точки M^* от этой прямой дается формулой

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p. \qquad (4)$$

Доказательство. Спроектируем точку M^* на нормаль; пусть Q — ее проекция (рис. 45). Мы имеем:

$$\delta = PQ = OQ - OP,$$

где PQ, OQ и OP суть величины направленных отрезков $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{OP}$, расположенных на нормали. Но $OQ = \text{пр}_n\, \overline{OM^*}$, $OP = p$; следовательно,

$$\delta = \text{пр}_n\, \overline{OM^*} - p. \qquad (5)$$

Согласно формуле (2) n° 66, примененной к точке M^*, имеем:

$$\text{пр}_n\, \overline{OM^*} = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha. \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (6) получаем:

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p.$$

Тем самым теорема доказана.

Заметим теперь, что $x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p$ есть не что иное, как левая часть нормального уравнения данной прямой, где вместо текущих координат подставлены координаты точки M^*. Отсюда получаем следующее правило:

Чтобы найти отклонение какой-либо точки M^* от некоторой прямой, нужно в левую часть нормального уравнения этой прямой вместо текущих координат подставить координаты точки M^*. Полученное число и будет равно искомому отклонению.

Замечание. Расстояние точки от прямой равно модулю (абсолютной величине) отклонения этой точки: $d = |\delta|$. Следовательно, если требуется найти расстояние точки от прямой, то достаточно вычислить по только что указанному правилу отклонение и взять его модуль.

68. Мы видели, что задача вычисления отклонения точки от прямой легко решается, если прямая задана нормальным уравнением. Теперь мы покажем, как привести общее уравнение прямой к нормальному виду. Пусть

$$Ax + By + C = 0 \qquad (7)$$

— общее уравнение некоторой прямой, а

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{3}$$

— ее нормальное уравнение.

Так как уравнение (7) и (3) определяют одну и ту же прямую, то согласно n° 65 коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Это означает, что, помножив все члены уравнения (7) на некоторый множитель μ, мы получим уравнение

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0,$$

совпадающее с уравнением (3), т. е. мы будем иметь:

$$\mu A = \cos\alpha,\ \ \mu B = \sin\alpha,\ \ \mu C = -p. \tag{8}$$

Чтобы найти множитель μ, возведем первые два из этих равенств в квадрат и сложим; получим:

$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9}$$

Число μ, по умножении на которое общее уравнение прямой приобретает нормальный вид, называется *нормирующим множителем* этого уравнения. Нормирующий множитель определяется формулой (9), но не вполне: остается неопределенным его знак.

Для определения знака нормирующего множителя используем третье из равенств (8). Согласно этому равенству μC есть число отрицательное. Следовательно, *знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена нормируемого уравнения.*

Замечание. Если $C = 0$, то знак нормирующего множителя можно выбрать по желанию.

Пример. Даны прямая $3x - 4y + 10 = 0$ и точка M (4; 3). Найти отклонение точки M от данной прямой.

Решение. Чтобы применить правило, изложенное в n° 67, нам нужно прежде всего привести данное уравнение к нормальному виду. С этой целью находим нормирующий множитель

$$\mu = \frac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Умножая данное уравнение на μ, получим искомое нормальное уравнение

$$-\frac{1}{5}(3x-4y+10)=0.$$

Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки M, имеем:

$$\delta=-\frac{1}{5}(3\cdot 4-4\cdot 3+10)=-2.$$

Итак, точка M имеет отрицательное отклонение от данной прямой и удалена от нее на расстояние $d=2$.

§ 23. Уравнение пучка прямых

69. Совокупность всех прямых плоскости, проходящих через некоторую точку $S(x_0;\ y_0)$, называется *пучком* прямых с центром S. В аналитической геометрии часто встречается потребность, зная уравнения двух прямых пучка, найти уравнение некоторой третьей прямой того же пучка при условии, что направление этой третьей прямой так или иначе описано. Задачи такого типа можно решать, используя, например, уравнение (7) n° 56: $y-y_1=k(x-x_1)$, где в качестве x_1, y_1 следует брать координаты x_0, y_0 центра пучка (угловой коэффициент k находится соответственно тому, как задано направление искомой прямой). При этом, однако, приходится предварительно вычислять координаты x_0, y_0 центра пучка.

Следующее предложение позволяет в подобных случаях избежать вычисления координат x_0, y_0.

Пусть $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ — уравнения двух прямых, пересекающихся в точке S, и α, β — какие угодно числа, не равные одновременно нулю; тогда

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (1)$$

есть уравнение прямой, проходящей через точку S.

Доказательство. Прежде всего установим, что соотношение (1) есть действительно уравнение. Для этого запишем его в виде

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)=0 \qquad (2)$$

и докажем, что величины $\alpha A_1+\beta A_2$ и $\alpha B_1+\beta B_2$ не могут быть обе равными нулю. Предположим противное, т. е. что

$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$ и $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$; но тогда $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ и $\frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$. Так как числа α и β не равны нулю одновременно, то отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ не может быть неопределенным; поэтому из предыдущих равенств следует пропорция $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Однако коэффициенты A_1, B_1 не могут быть пропорциональными коэффициентам A_2, B_2, так как данные прямые пересекаются (см. n° 64). Таким образом, наше предположение приходится отвергнуть. Итак, $\alpha A_1 + \beta A_2$ и $\alpha B_1 + \beta B_2$ одновременно исчезнуть не могут, а это и означает, что равенство (2) есть уравнение (с переменными x и y). Далее, непосредственно ясно, что *оно является уравнением первой степени*, и, следовательно, определяет некоторую прямую. Остается доказать, что эта прямая проходит через точку S. Пусть x_0, y_0 — координаты точки S. Так как каждая из данных прямых проходит через точку S, то $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$, откуда

$$\alpha (A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta (A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0.$$

Мы видим, что координаты точки S удовлетворяют уравнению (1), следовательно, прямая, определяемая уравнением (1), проходит через точку S, и наше предложение доказано.

Таким образом, уравнение вида (1) при всяких значениях α, β, не равных одновременно нулю, определяет прямые пучка с центром S.

Теперь мы докажем, что *в уравнении* (1) *числа* α, β *всегда можно подобрать так, чтобы оно определило любую* (заранее назначенную) *прямую пучка с центром* S. Так как каждая прямая пучка с центром S определяется заданием, кроме точки S, еще одной своей точки, то для доказательства высказанного утверждения достаточно установить, что в уравнении (1) числа α, β всегда возможно подобрать так, чтобы определяемая им прямая прошла через любую заранее назначенную точку $M^* (x^*; y^*)$.

Но это ясно; в самом деле, прямая, определяемая уравнением (1), будет проходить через точку M^*, если координаты точки M^* удовлетворяют этому уравнению, т. е. если

$$\alpha (A_1x^* + B_1y^* + C_1) + \beta (A_2x^* + B_2y^* + C_2) = 0. \quad (3)$$

Будем считать, что точка M^* не совпадает с точкой S (только этот случай нам и нужен). Тогда хотя бы одно из чисел

$$A_1x^*+B_1y^*+C_1, \quad A_2x^*+B_2y^*+C_2$$

не равно нулю, следовательно, равенство (3) является не тождеством, а уравнением, именно, уравнением первой степени с двумя неизвестными α, β; чтобы найти неизвестные α, β, нужно одной из них придать численное значение произвольно, а другую вычислить из этого уравнения; например, если $A_2x^*+B_2y^*+C_2 \neq 0$, то α можно взять каким угодно (не равным нулю), а β соответственно определить равенством:

$$\beta = -\frac{A_1x^*+B_1y^*+C_1}{A_2x^*+B_2y^*+C_2}\alpha.$$

Итак, уравнением вида (1) можно определить прямую, проходящую через какую угодно заранее указанную точку плоскости, а значит, и любую прямую пучка с центром S. Поэтому уравнение вида (1) называют *уравнением пучка прямых* (*с центром* S).

Если $\alpha \neq 0$, то, полагая $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, получим из уравнения (1):

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (4)$$

В таком виде уравнение пучка прямых в практике решения задач более употребительно, чем уравнение (1). Существенно, однако, заметить, что, так как при переходе от уравнения (1) к уравнению (4) исключается случай $\alpha=0$, то уравнением вида (4) нельзя определить прямую $A_2x+B_2y+C_2=0$; т. е. уравнение вида (4) при различных λ определяет все прямые пучка, кроме одной (второй из двух данных).

Пример. Даны две прямые $2x+3y-5=0$, $7x+15y+1=0$, пересекающиеся в точке S. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку S и перпендикулярна к прямой $12x-5y-1=0$.

Решение. Прежде всего проверим утверждение условия задачи: данные прямые действительно пересекаются, так как $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{15}$. Далее составим уравнение пучка прямых с центром S:

$$2x+3y-5+\lambda(7x+15y+1)=0. \qquad (5)$$

Чтобы выделить в этом пучке искомую прямую, вычислим λ согласно условию перпендикулярности этой прямой к прямой $12x-5y-1=0$.

Представив уравнение (5) в виде

$$(2+7\lambda)\,x+(3+15\lambda)\,y+(-5+\lambda)=0, \qquad (6)$$

находим угловой коэффициент искомой прямой:

$$k=-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}.$$

Данная прямая имеет угловой коэффициент

$$k_1=\frac{12}{5}.$$

По условию перпендикулярности $k=-\dfrac{1}{k_1}$, т. е.

$$-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}=-\frac{5}{12}.$$

Отсюда $\lambda=-1$. Подставляя $\lambda=-1$ в уравнение (6), получаем $-5x-12y-6=0$ или

$$5x+12y+6=0.$$

Задача решена.

ГЛАВА 5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе будут рассмотрены три вида линий второго порядка: эллипсы, гиперболы и параболы. Основной целью главы является ознакомление читателя с важнейшими геометрическими свойствами указанных линий.

§ 24. Эллипс. Определение эллипса и вывод его канонического уравнения

70. *Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина;* требуется, чтобы эта постоянная была *больше расстояния между фокусами.* Фокусы эллипса принято обозначать через F_1 и F_2.

Замечание. Сумма расстояний произвольной точки M от двух фиксированных точек F_1 и F_2, очевидно, не может быть меньше расстояния между точками F_1, F_2. Эта сумма равна расстоянию между F_1, F_2 в том и только в том случае, когда точка M находится на отрезке F_1F_2. Следовательно, геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1, F_2, есть постоянная величина, равная расстоянию между F_1, F_2, представляет собой просто отрезок F_1F_2. Указанный случай исключен оговоркой в конце предыдущего определения.

71. Пусть M — произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2. Отрезки F_1M и F_2M (так же как и длины этих отрезков) называются *фокальными радиусами* точки M. Постоянную сумму фокальных радиусов точки эллипса принято обозначать через $2a$. Таким образом, для любой точки M эллипса имеем:

$$F_1M + F_2M = 2a. \tag{1}$$

Расстояние F_1F_2 между фокусами обозначают через $2c$. Так как

$$F_1M + F_2M > F_1F_2,$$

то

$$2a > 2c, \text{ т. е. } a > c. \tag{2}$$

Из определения эллипса непосредственно вытекает следующий способ построения его при помощи нити: если концы нерастяжимой нити длины $2a$ закрепить в точках F_1, F_2 и натянуть нить острием карандаша, то при движении острия оно будет вычерчивать эллипс с фокусами F_1, F_2 и суммой фокальных радиусов $2a$. Выполнив это построение фактически, можно наглядно убедиться, что эллипс представляет собой выпуклую замкнутую линию (овал), симметричную относительно прямой F_1F_2, а также относительно прямой, которая проходит перпендикулярно к отрезку F_1F_2 через его середину (рис. 46). Немного далее мы установим форму эллипса аналитически при помощи исследования его уравнения; уравнение эллипса выводится в следующем пункте.

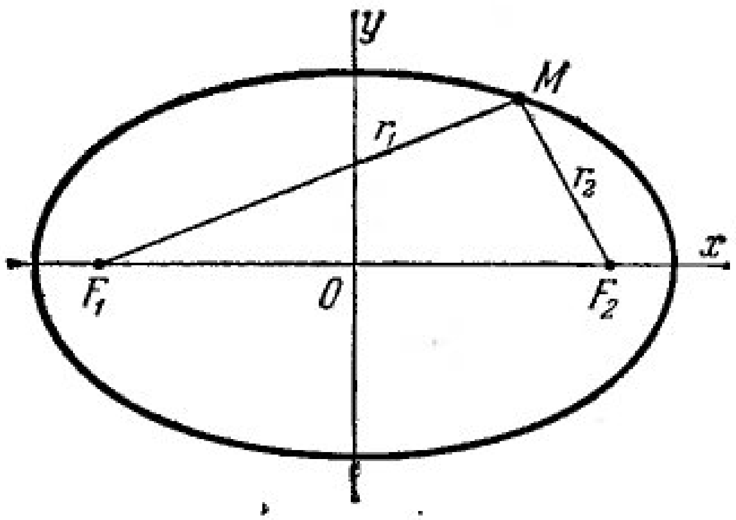

Рис. 46.

72. Пусть дан какой-нибудь эллипс с фокусами F_1, F_2 (вместе с тем мы считаем данными a и c). Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, оси которой расположим специальным образом по отношению к этому эллипсу; именно, в качестве оси абсцисс мы возьмем прямую F_1F_2, считая ее направленной от F_1 к F_2, начало координат поместим в середине отрезка F_1F_2 (рис. 46). Выведем уравнение эллипса в установленной системе координат.

Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y. Обозначим, далее, через r_1 и r_2 расстояния от точки M до фокусов ($r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$). Точка M будет находиться на данном эллипсе в том и только в том случае, когда

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{3}$$

Чтобы получить искомое уравнение, нужно в равенстве (3) заменить переменные r_1 и r_2 их выражениями через координаты x, y.

Заметим, что так как $F_1F_2 = 2c$ и так как фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты $(-c;\ 0)$ и $(+c;\ 0)$; приняв это во внимание и применяя формулу (2) n° 18, находим:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{4}$$

Заменяя r_1 и r_2 в равенстве (3) найденными выражениями, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{5}$$

Это и есть уравнение рассматриваемого эллипса в назначенной системе координат, так как ему удовлетворяют координаты точки $M(x;\ y)$ в том и только в том случае, когда точка M лежит на этом эллипсе. Дальнейшие наши выкладки имеют целью получить уравнение эллипса в более простом виде.

Уединим в уравнении (5) первый радикал, после чего возведем обе части равенства в квадрат; получим:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \tag{6}$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{7}$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, найдем:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \tag{8}$$

откуда

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2). \tag{9}$$

Здесь мы введем в рассмотрение новую величину

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \tag{10}$$

геометрический смысл величины b будет раскрыт несколько позднее; сейчас мы только заметим, что $a > c$, следовательно, $a^2 - c^2 > 0$ и величина b — вещественна. Из равенства (10) имеем:

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{11}$$

вследствие чего уравнению (9) можно придать вид

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

Докажем, что *уравнение* (12) *есть уравнение данного эллипса*. Этот факт не является самоочевидным, поскольку уравнение (12) получено из уравнения (5) двукратным освобождением от радикалов; очевидно лишь, что уравнение (12) есть следствие уравнения (5). Мы должны доказать, что уравнение (5) в свою очередь есть следствие уравнения (12), т. е. что эти уравнения эквивалентны.

Предположим, что x, y — какие-нибудь два числа, для которых соблюдено равенство (12). Производя предыдущие выкладки в обратном порядке, мы получим из равенства (12) сначала равенство (9), затем равенство (8), которое сейчас запишем в виде

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей этого равенства, получим

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm(a^2 - cx). \tag{13}$$

Заметим теперь, что в силу равенства (12) должно быть $|x| \leqslant a$. Так как $|x| \leqslant a$ и $c < a$, то $|cx| < a^2$, следовательно, число $a^2 - cx$ положительно. Поэтому в правой части равенства (13) необходимо взять знак плюс. Так мы приходим к равенству (7), после чего получим равенство (6); последнее мы напишем в виде

$$(x+c)^2 + y^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}]^2.$$

Отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}). \tag{14}$$

Исследуем величину

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \tag{15}$$

В силу равенства (12) имеем $x^2 \leqslant a^2$. Далее $|cx| < a^2$, следовательно, число $-2cx$ по абсолютному значению меньше $2a^2$. Наконец, также из равенства (12) заключаем, что $y^2 \leqslant b^2$, т. е. $y^2 \leqslant a^2 - c^2$ или $c^2 + y^2 \leqslant a^2$. Ввиду этих обстоятельств вся сумма в правой части (15) меньше $4a^2$, значит, корень из этой суммы меньше $2a$. Поэтому величина, стоящая внутри скобок в правой части (14), положительна, следовательно, в равенстве (14) перед скобками нужно брать знак плюс. Таким образом, мы получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

откуда сразу следует равенство (5).

Итак, уравнение (5) выводится из уравнения (12), как и уравнение (12) выводится из уравнения (5). Тем самым доказано, что уравнение (12) есть уравнение данного эллипса, поскольку оно эквивалентно уравнению (5).

Уравнение (12) называется *каноническим* уравнением эллипса.

73. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

определяющее эллйпс в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, есть уравнение второй степени; таким образом, *эллипс есть линия второго порядка.*

§ 25. Исследование формы эллипса

74. Выше, в n°71, мы описали форму эллипса, исходя из наглядных соображений. Здесь мы проведем исследование формы эллипса путем анализа его канонического уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Подчеркнем прежде всего алгебраическую особенность уравнения (1): *оно содержит члены только с четными степенями текущих координат.*

Указанной алгебраической особенности уравнения (1) соответствует важная геометрическая особенность определяемой им линии, именно: *эллипс, определяемый уравнением*

(1), *симметричен как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy.*

В самом деле, если $M(x;\ y)$ — какая-нибудь точка этого эллипса, т. е. если числа x, y удовлетворяют уравнению (1), то числа x, $-y$ также удовлетворяют уравнению (1); следовательно, точка $M'(x;\ -y)$ также лежит на этом эллипсе. Но точка $M'(x;\ -y)$ симметрична точке $M(x;\ y)$ относительно оси Ox. Таким образом, все точки эллипса расположены парами, симметрично относительно оси Ox. Иначе говоря, если мы перегнем чертеж по оси Ox, то верхняя часть эллипса совместится с его нижней частью. А это и означает, что эллипс симметричен по отношению к оси Ox.

Симметричность рассматриваемого эллипса относительно оси Oy доказывается совершенно аналогично (на основании того, что если числа x, y удовлетворяют уравнению (1), то ему удовлетворяют и числа $-x$, y).

Чтобы исследовать форму эллипса, выразим из уравнения (1) величину y как функцию от x:

$$y = \pm\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

или

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2}$$

Поскольку эллипс симметричен относительно каждой из координатных осей, нам достаточно рассмотреть лишь ту его часть, которая лежит в первой координатной четверти.

Так как указанная часть эллипса лежит в верхней полуплоскости, то ей соответствует знак $+$ в правой части уравнения (2); а так как она вместе с тем лежит в правой полуплоскости, то для всех ее точек $x \geqslant 0$. Таким образом, мы должны изобразить график функции

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{3}$$

при условии $x \geqslant 0$.

Возьмем сначала $x = 0$, тогда $y = b$. Точка $B(0;\ b)$ является самой левой точкой рассматриваемого графика. Пусть теперь x увеличивается, начиная от нуля. Очевидно, что при увеличении x подкоренное выражение в формуле (3) будет уменьшаться; вместе с тем, следовательно, будет уменьшаться и величина y. Таким образом, переменная точка $M(x; y)$, описывающая рассматриваемый график, движется вправо и вниз (рис. 47). Когда x сделается равным a, мы получим $y=0$; тогда точка $M(x; y)$ совпадает с точкой $A(a; 0)$, лежащей на оси Ox. При дальнейшем увеличении x, т. е. при $x > a$, подкоренное выражение в формуле (3) становится отрицательным, а значит, y — мнимым. Отсюда следует, что точка A является самой правой точкой графика. Итак, частью эллипса, расположенной в первой координатной четверти, является дуга BA, изображение которой дано на рис. 47.

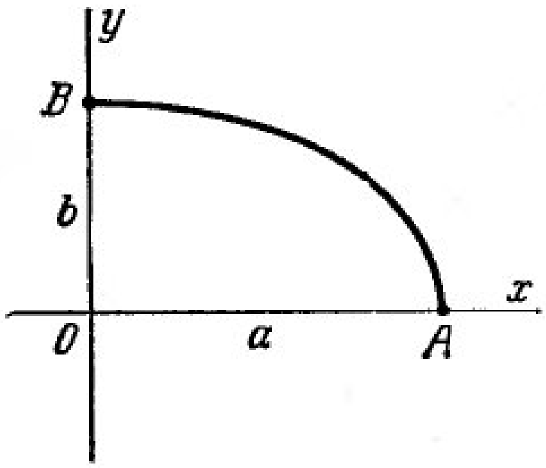

Рис. 47.

Производя зеркальные отражения дуги BA относительно координатных осей, мы получим весь эллипс; он имеет форму выпуклого овала с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии (рис. 48).

Оси симметрии эллипса называют обычно просто его *осями*, а точку пересечения осей — *центром* эллипса. Точки, в которых эллипс пересекает свои оси, называются его *вершинами*. На рис. 48 вершины эллипса суть точки A, A', B и B'.

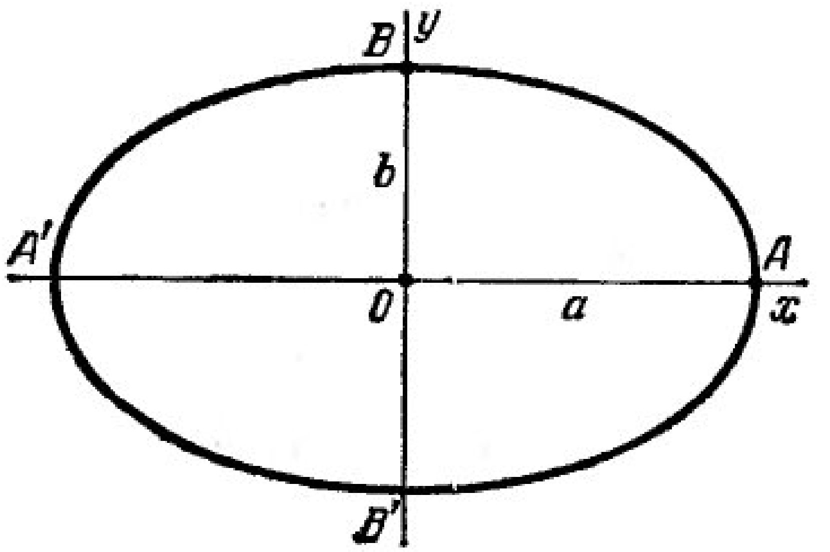

Рис. 48.

Заметим, что осями эллипса принято называть также отрезки $AA'=2a$ и $BB'=2b$. Если эллипс расположен относительно координатных осей так, как было описано в n° 72, именно, если фокусы его находятся на оси Ox, то $b=\sqrt{a^2-c^2}$, следовательно, $a>b$.

В этом случае отрезок $OA=a$ называют *большой полуосью* эллипса, отрезок $OB=b$ — *малой полуосью*. Но, само собой разумеется, эллипс, определяемый уравнением вида (1), может быть расположен так, что его фокусы будут на оси Oy; тогда $b>a$ и большой полуосью его будет отрезок $OB=b$. Но во всяком случае длина отрезка OA на оси абсцисс обозначается через a, а длина отрезка OB на оси ординат обозначается через b.

Замечание. На рис. 47 часть эллипса, расположенная в первой координатной четверти, изображена в виде дуги BA всюду выпуклой «вверх»; кроме того, на рис. 47 показано, что направление этой дуги в точке B перпендикулярно к оси Oy, а в точке A перпендикулярно к оси Ox (вследствие чего полный эллипс в своих вершинах не имеет заострений). Между тем мы не доказали, что дуга BA действительно обладает такими свойствами. Но мы не будем этим заниматься, так как такого рода исследования графиков наиболее естественно проводить при помощи методов математического анализа.

75. В частном случае, когда $b=a$, уравнеиие

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

принимает вид

$$x^2+y^2=a^2;$$

такое уравнение определяет окружность радиуса a (с центром в начале координат). В соответствии с этим окружность рассматривается как частный случай эллипса.

§ 26. Эксцентриситет эллипса

76. *Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси*; обозначив эксцентриситет буквой ε, получаем:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Так как $c<a$, то $\varepsilon<1$, т. е. *эксцентриситет каждого эллипса меньше единицы.*

Заметим, что $c^2=a^2-b^2$; поэтому

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

отсюда

$$\varepsilon=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ и } \frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением осей эллипса, а отношение осей, в свою очередь, определяется эксцентриситетом. Таким образом, *эксцентриситет характеризует форму эллипса*. Чем ближе эксцентриситет к единице, тем меньше $1-\varepsilon^2$, тем меньше, следовательно, отношение $\frac{b}{a}$; значит, *чем больше эксцентриситет, тем более эллипс вытянут*. В случае окружности $b=a$ и $\varepsilon=0$.

§ 27. Рациональные выражения фокальных радиусов эллипса

77. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$, лежащую на данном эллипсе. Если r_1 и r_2—фокальные радиусы этой точки, то

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (1)$$

Оказывается, для выражения фокальных радиусов можно указать другие формулы, свободные от иррациональностей.

В самом деле, из равенства (7) n°72 мы имеем:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

Полагая здесь $\frac{c}{a}=\varepsilon$ и принимая во внимание вторую из формул (1), получим:

$$r_2=a-\varepsilon x,$$

по определению эллипса $r_1+r_2=2a$; отсюда и из предыдущего

$$r_1=a+\varepsilon x.$$

Итак, имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} r_1&=a+\varepsilon x,\\ r_2&=a-\varepsilon x. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В § 34 эти формулы будут существенно использованы.

§ 28. Построение эллипса по точкам. Параметрические уравнения эллипса

78. Пусть дан эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Опишем вокруг его центра две окружности, одну — радиусом a, другую — радиусом b (считаем $a > b$); проведем через

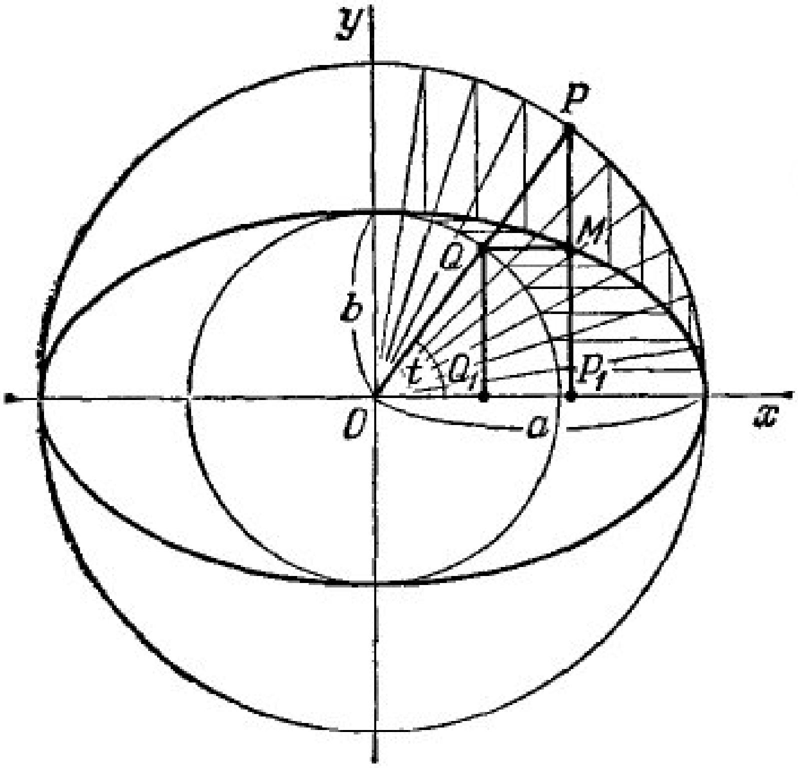

Рис. 49.

центр эллипса произвольный луч и обозначим буквой t полярный угол этого луча (рис. 49). Проведенный луч пересечет бо́льшую окружность в некоторой точке P, меньшую — в некоторой точке Q. Проведем затем через точку P прямую, параллельную оси Oy, через точку Q — прямую, параллельную оси Ox; пусть M — точка пересечения этих прямых, а P_1 и Q_1 — проекции точек P и Q на ось абсцисс.

Выразим координаты точки M через t. Из рис. 49 легко усмотреть, что

$$x=OP_1=OP\cdot\cos t=a\cos t,$$

$$y=P_1M=Q_1Q=OQ\cdot\sin t=b\sin t.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t,\\ y&=b\sin t.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставляя эти координаты в уравнение (1), убедимся, что они удовлетворяют ему при любом t. Следовательно, точка M находится на данном эллипсе. Итак, мы показали, как построить одну точку эллипса. Проводя ряд лучей и производя указанное построение соответственно каждому из них, мы можем построить столько точек эллипса, сколько пожелаем. Этот прием часто употребляется в чертежной практике (соедииняя построенные точки с помощью лекал, можно получить изображение эллипса, вполне удовлетворительное с практической точки зрения).

79. Уравнения (2) выражают координаты произвольной точки эллипса как функции переменного параметра t; таким образом, уравнеиия (2) представляют собой параметрические уравнения эллипса (см. § 14).

§ 29. Эллипс как проекция окружности на плоскость. Эллипс как сечение круглого цилиндра

80. Здесь мы докажем, что *проекция окружности на произвольную плоскость является эллипсом.*

Пусть окружность k, лежащая в плоскости β, проектируется на некоторую плоскость α. Обозначим через k' геометрическое место проекций всех точек окружности k; иужно показать, что k' есть эллипс. Для удобства рассуждений будем предполагать, что плоскость α проходит через центр окружности k (рис. 50). Введем на плоскости α декартову прямоугольную систему координат, приняв в качестве оси Ox прямую, по которой пересекаются плоскости α и β, в качестве начала координат — центр окружности k. Обозначим через a радиус окружности k, через φ — острый угол между плоскостями α и β. Пусть P — произвольная точка окружности k, M — ее проекция на плоскость α, Q — проекция на ось Ox, t — угол, который составляет отрезок OP с осью Ox. Выразим координаты точки M через t. Из рис. 50 легко усмотреть, что

$$x = OQ = OP \cdot \cos t = a \cos t,$$
$$y = QM = QP \cdot \cos\varphi = OP \cdot \sin t \cos\varphi = a \cos\varphi \sin t.$$

Обозначив постоянную величину $a\cos\varphi$ буквой b, получим:

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \sin t.$$

Эти уравнения в точности совпадают с параметрическими уравнениями эллипса (см. п° 78); следовательно, линия k' является эллипсом (с большой полуосью a и малой полуосью $b = a\cos\varphi$).

81. Легко показать также, что *каждое сечение круглого цилиндра плоскостью, не параллельной его оси, есть эллипс.*

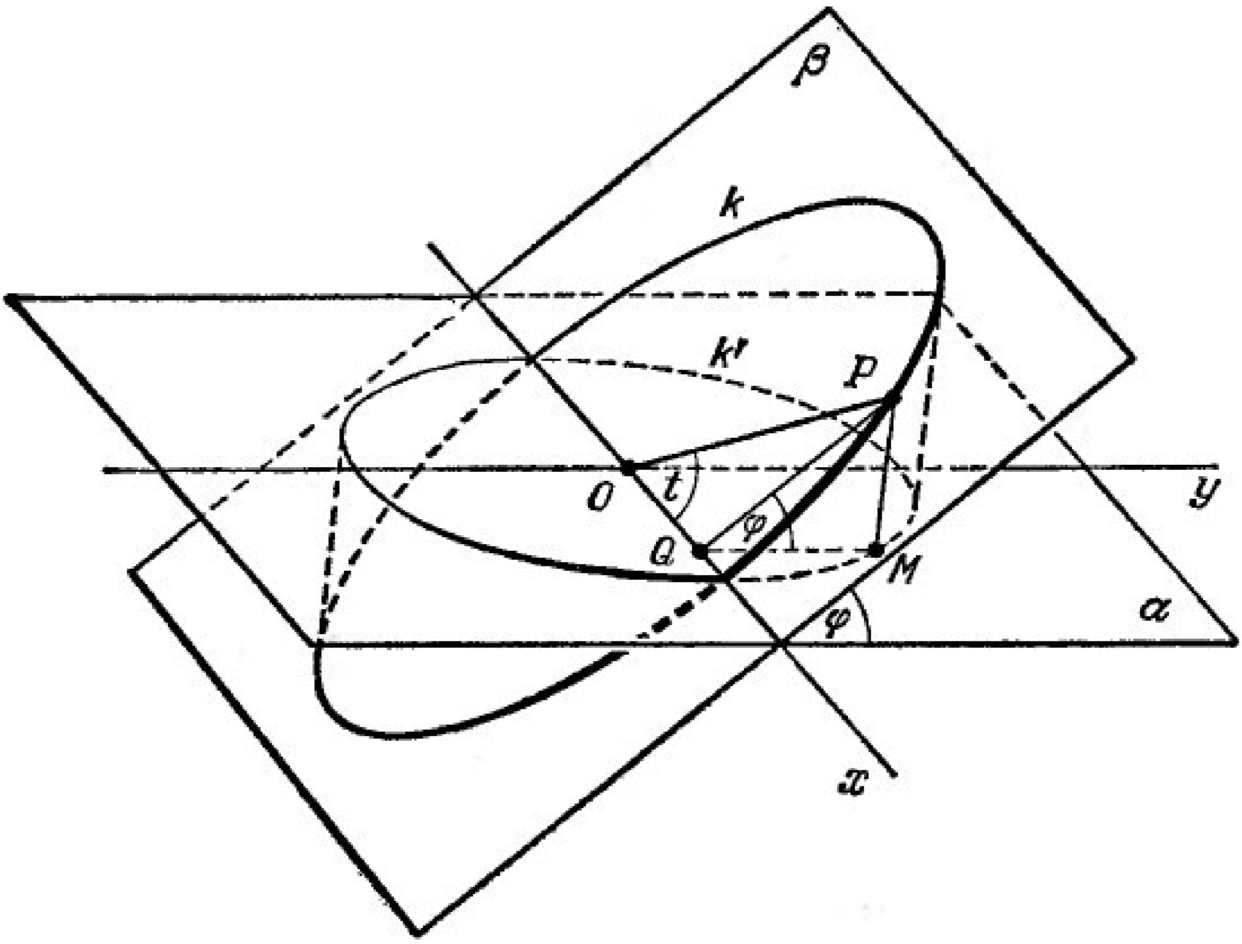

Рис. 50.

Для доказательства рассмотрим какой-нибудь круглый цилиндр и секущую плоскость α (рис. 51); линию, которая образуется в сечении, обозначим через k'. Пусть O — точка, в которой плоскость α пересекает ось цилиндра; проведем через точку O плоскость β, перпендикулярную к оси. Эта плоскость пересечет цилиндр по окружности k. Обозначим через a радиус этой окружности, через φ — острый угол между плоскостями α и β. Выберем затем на плоскости α координатные оси так, как показано на рис. 51. Возьмем на линии k' произвольную точку M; пусть P — ее проекция на плоскость β, Q — проекция на ось Ox, t — угол, который составляет отрезок OP с осью Ox. Выразим координаты точки M через t, имеем:

$$x = OQ = OP \cdot \cos t = a \cos t,$$

$$y = QM = \frac{QP}{\cos\varphi} = \frac{OP \cdot \sin t}{\cos\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi} \sin t.$$

Полагая $\frac{a}{\cos\varphi} = b$, получим:

$$x = a\cos t, \quad y = b \sin t.$$

Эти уравнения представляют собой параметрические

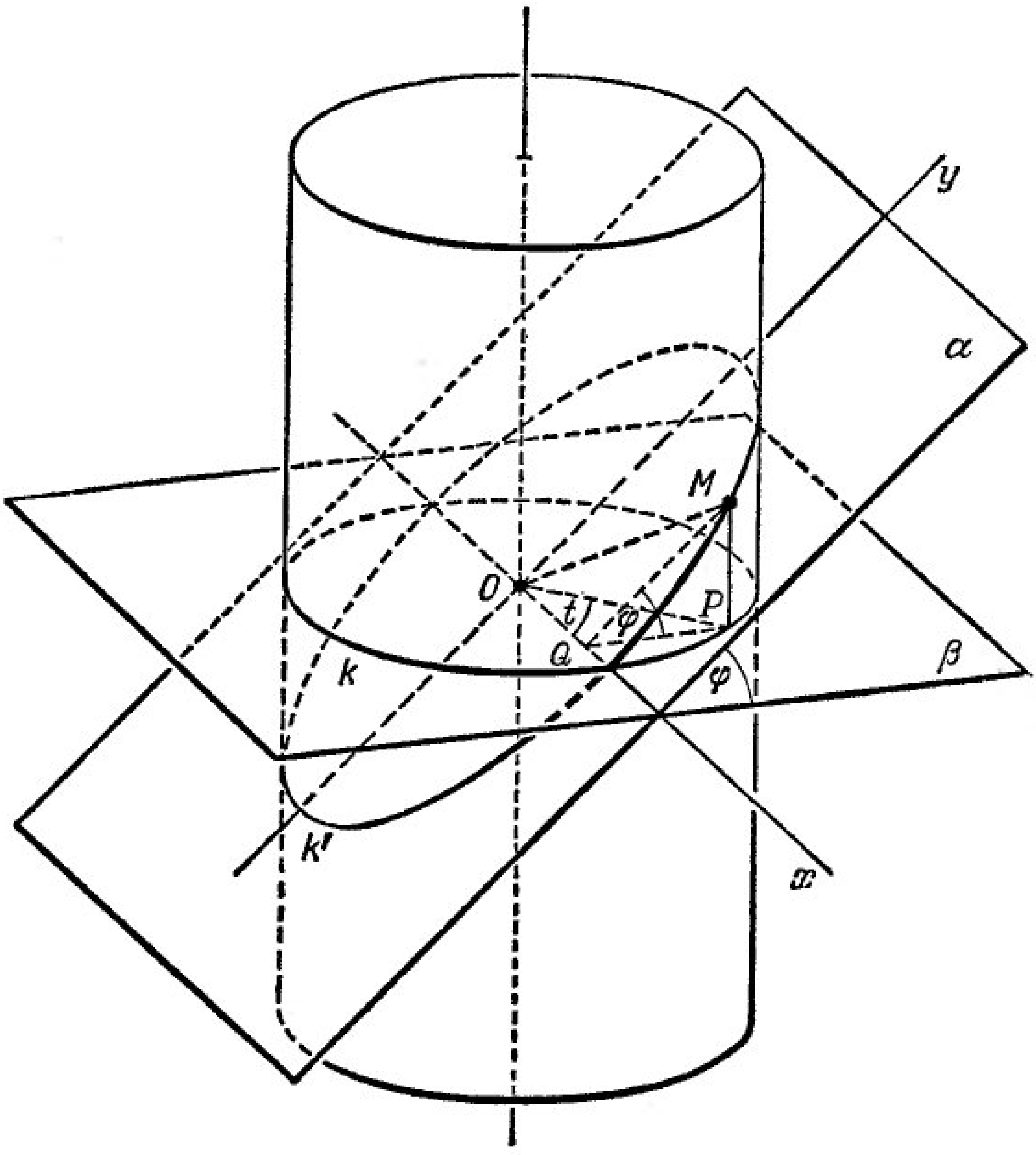

Рис. 51.

уравнения эллипса; таким образом, линия k' является эллипсом, что и требовалось доказать.

Заметим, что $\frac{a}{\cos\varphi} > a$; следовательно, a есть малая ось эллипса k', $b = \frac{a}{\cos\varphi}$ — его большая ось, т. е. эллипс k' вытянут в направлении оси Oy.

То обстоятельство, что эллипс есть плоское сечение круглого цилиндра, а также проекция окружности на плоскость, делает представление об этой линии особенно наглядным.

§ 30. Гипербола. Определение гиперболы и вывод ее канонического уравнения

82. *Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина*; указанная разность берется *по абсолютному значению*; кроме того, требуется, чтобы она была *меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля*. Фокусы гиперболы принято обозначать через F_1 и F_2, а расстояние между ними — через $2c$.

Замечание. Разность расстояний от произвольной точки M до двух фиксированных точек F_1, F_2, очевидно, не может быть больше расстояния между точками F_1, F_2. Эта разность равна расстоянию между F_1, F_2 в том и только в том случае, когда точка M находится на одном из продолжений отрезка F_1F_2. Следовательно, геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек F_1, F_2 есть постоянная величина, равная расстоянию между F_1, F_2, представляет собой оба продолжения отрезка F_1F_2 (рис. 52).

Рис. 52.

Если разность расстояний от некоторой точки M до точек F_1, F_2 равна нулю, то эта точка равноудалена от F_1 и F_2. Следовательно, геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1, F_2 есть постоянная величина, равная нулю, представляет собой прямую, перпендикулярную к отрезку F_1F_2 в его середине (рис. 53).

Указанные случаи исключены оговоркой в конце предыдущего определения.

83. Пусть M — произвольная точка гиперболы с фокусами F_1 и F_2 (рис. 54). Отрезки F_1M и F_2M (так же, как и длины этих отрезков) называются *фокальными радиусами* точки M и обозначаются через r_1 и r_2 ($F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$). По определению гиперболы разность фокальных радиусов ее точки M есть постоянная величина (т. е. при изменении положения точки M на гиперболе разность ее фокальных радиусов не меняется); эту постоянную принято обозначать через $2a$. Таким образом, для любой точки M гиперболы имеем либо

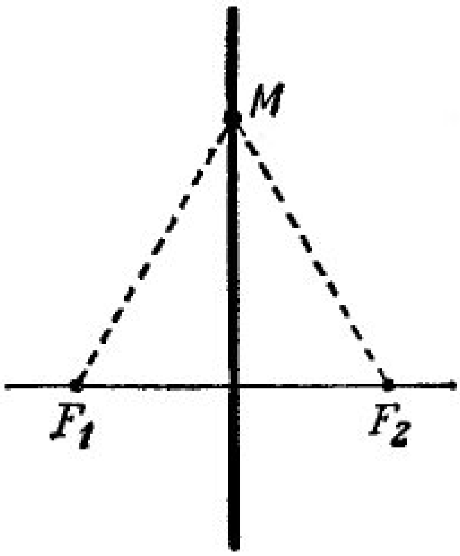

Рис. 53.

$$F_1M - F_2M = 2a, \tag{1}$$

если точка M находится ближе к фокусу F_2, либо

$$F_2M - F_1M = 2a, \tag{2}$$

если точка M находится ближе к фокусу F_1.

Так как по определению гиперболы $F_1M - F_2M < F_1F_2$ и $F_2M - F_1M < F_1F_2$, то $2a < 2c$, т. е.

$$a < c. \tag{3}$$

В следующем пункте мы выведем уравнение гиперболы, после

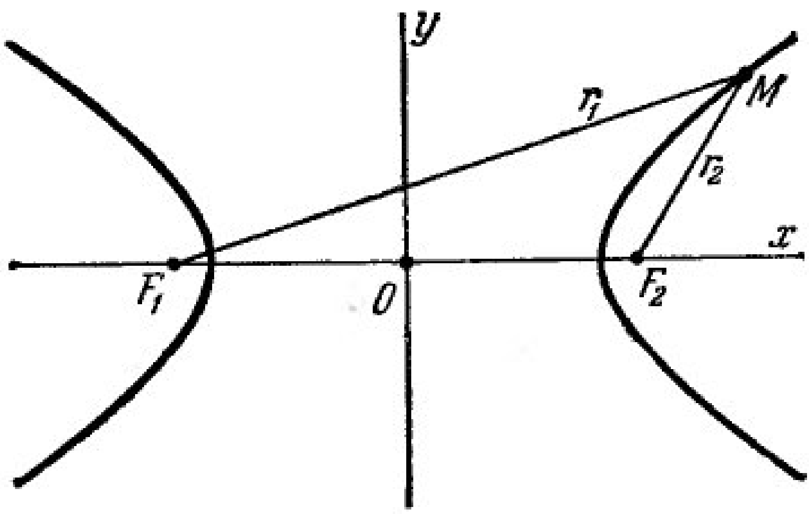

Рис. 54.

чего, анализируя это уравнение, установим ее форму. Мы увидим, что гипербола состоит из двух отдельных частей, называемых ее ветвями, каждая из которых бесконечно простирается в двух направлениях; целая гипербола симметрична относительно прямой F_1F_2, а также относительно прямой, проходящей перпендикулярно к отрезку F_1F_2 через его середину (см. рис. 54).

84. Пусть дана какая-нибудь гипербола с фокусами F_1, F_2 (вместе с тем будем считать данными a и c). Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, оси которой расположим специальным образом по отношению к этой гиперболе; именно, в качестве оси абсцисс мы возьмем прямую F_1F_2, считая ее направленной от F_1 к F_2, начало координат поместим в середину отрезка F_1F_2 (рис. 54).

Выведем уравнение гиперболы в установленной системе координат. Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y, а фокальные радиусы F_1M и F_2M через r_1 и r_2. Точка M будет находиться на (данной) гиперболе в том и только в том случае, когда $r_1 - r_2 = 2a$, или $r_2 - r_1 = 2a$. Последние два равенства мы объединим общей записью

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \tag{4}$$

Чтобы получить искомое уравнение гиперболы, нужно в равенстве (4) заменить переменные r_1 и r_2 их выражениями через текущие координаты x, y. Так как $F_1F_2 = 2c$ и так как фокусы F_1, F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты $(-c;\ 0)$ и $(+c;\ 0)$; приняв это во внимание и применяя формулу (2°) п° 18, находим:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{5}$$

Заменяя r_1 и r_2 в равенстве (4) найденными выражениями, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{6}$$

Это и есть уравнение рассматриваемой гиперболы в назначенной системе координат, так как ему удовлетворяют координаты точки $M(x;\ y)$ в том и только в том случае, когда точка M лежит на данной гиперболе (фактически, мы здесь имеем два уравнения — одно для правой, другое для левой ветви гиперболы).

Дальнейшие выкладки имеют целью получить уравнение гиперболы в более простом виде. Уединим в уравнении (6) первый радикал, после чего возведем обе части равенства в квадрат; получим:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2, \qquad (7)$$

или

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (8)$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства, найдем:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2, \qquad (9)$$

откуда

$$(c^2-a^2)\,x^2-a^2y^2=a^2\,(c^2-a^2). \qquad (10)$$

Здесь мы введем в рассмотрение новую величину

$$b=\sqrt{c^2-a^2}; \qquad (11)$$

геометрический смысл величины b будет раскрыт несколько позднее; сейчас мы только заметим, что $c>a$ (см. n° 83), следовательно, $c^2-a^2>0$ и величина b вещественна. Из равенства (11) имеем:

$$b^2=c^2-a^2,$$

вследствие чего уравнению (10) можно придать вид

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (12)$$

Докажем, что *уравнение* (12) *есть уравнение данной гиперболы*. Этот факт не является самоочевидным, поскольку уравнение (12) получено из уравнения (6) двукратным освобождением от радикалов; очевидно лишь, что уравнение (12) есть следствие уравнения (6).

Мы должны доказать, что уравнение (6) в свою очередь есть следствие уравнения (12), т. е. что эти уравнения эквивалентны.

Предположим, что x, y — какие-нибудь два числа, для которых выполняется равенство (12). Производя предыдущие выкладки в обратном порядке, мы получим из равенства (12) сначала равенство (10), затем равенство (9), которое сейчас запишем в виде

$$(cx-a^2)^2=a^2[(x-c)^2+y^2].$$

Извлекая корень из обеих частей этого равенства, получим:

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (13)$$

Если точка (x, y) находится в левой полуплоскости, то $x<0$ и левая часть равенства (13) отрицательна. В этом случае, следовательно, в правой части равенства (13) нужно брать знак минус. Если же точка (x, y) находится в правой полуплоскости, то $x>0$; согласно уравнению (12) имеем $x\geqslant a$. Так как $c>a$, то $cx>a^2$, следовательно, левая часть равенства (13) положительна; значит, в данном случае в правой части равенства (13) нужно брать знак плюс. Таким образом, равенство (13) имеет тот же смысл, что и равенство (8). Производя надлежащие преобразования, мы получим из равенства (8) равенство (7); последнее мы напишем в виде

$$(x+c)^2+y^2=[\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a]^2.$$

Отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a). \qquad (14)$$

Выясним, какой знак нужно брать в правой части этого равенства *перед скобками*. Рассмотрим два случая.

1) Точка $(x; y)$ находится в *правой* полуплоскости; тогда согласно предыдущему внутри скобок следует выбрать знак плюс, вся величина в скобках будет положительна, значит, и перед скобками нужно брать положительный знак.

2) Точка $(x; y)$ находится в *левой* полуплоскости. В этом случае x — число отрицательное, значит, абсолютная величина разности $x-c$ равна сумме $|x|+c$. Согласно уравнению (12) имеем $|x|\geqslant a$; кроме того, $c>a$. Следовательно, $(x-c)^2>4a^2$, сумма $(x-c)^2+y^2$ тем более превышает $4a^2$, корень из этой суммы больше $2a$ и вся величина внутри скобок в правой части равенства (14) снова положительна. Таким образом, и в этом случае в равенстве (14) перед скобками нужно брать знак плюс. Мы видим, что при любом расположении точки (x, y) равенство (14) приводится

к виду

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a,$$

откуда сразу получается равенство (6).

Итак, уравнение (6) выводится из уравнения (12), как и уравнение (12) выводится из уравнения (6). Тем самым доказано, что уравнение (12) есть уравнение данной гиперболы, поскольку оно эквивалентно уравнению (6).

Уравнение (12) называется *каноническим уравнением гиперболы.*

85. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

определяющее гиперболу в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, есть уравнение второй степени; таким образом, *гипербола есть линия второго порядка.*

§ 31. Исследование формы гиперболы

86. Займемся исследованием гиперболы, определенной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Выразим из уравнения (1) величину y как функцию от x:

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}$$

или

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{2}$$

Так как уравнение (1) содержит члены только с четными степенями каждой из текущих координат x, y, то определяемая им гипербола симметрична относительно каждой из координатных осей (доказывается так же, как аналогичное утверждение для эллипса; см. n° 74); отсюда ясно, что достаточно рассмотреть лишь часть гиперболы, лежащую в первой координатной четверти.

Так как указанная часть гиперболы лежит в верхней полуплоскости, то в уравнении (2) ей соответствует знак

$+$; а так как она вместе с тем лежит в правой полуплоскости, то для всех ее точек $x \geqslant 0$. Таким образом, мы должны исследовать функцию

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (3)$$

при условии $x \geqslant 0$ и изобразить ее график.

Возьмем сначала $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в правую часть формулы (3), найдем $y = \frac{b}{a}\sqrt{-a^2}$; мы получаем мнимое число. При возрастании x величина y остается мнимой до тех пор, пока x не станет равным a. Полагая в правой части формулы (3) $x = a$, найдем $y = 0$. Следовательно, точка $A(a;\ 0)$ является самой левой точкой графика. При дальнейшем возрастании x величина y будет вещественной и положительной уже все время; это сразу видно из формулы (3), так как при $x > a$ имеем $x^2 - a^2 > 0$. Из формулы (3) видно также, что y является возрастающей функцией от x (если $x \geqslant a$), т. е. каждый раз, когда увеличивается x, увеличивается также и y. Наконец, из формулы (3) видно, что при бесконечном возрастании x происходит бесконечное же возрастание y (при $x \to +\infty$ также и $y \to +\infty$). Сопоставляя все, что было сейчас сказано, приходим к следующему заключению: при возрастании x, начиная от $x = a$, переменная точка $M(x;\ y)$, описывающая график, движется все время «вправо» и «вверх», имея своим начальным положением точку $A(a;\ 0)$; удаление точки M как от оси Oy «вправо», так и от оси Ox «вверх» является бесконечным (рис. 55).

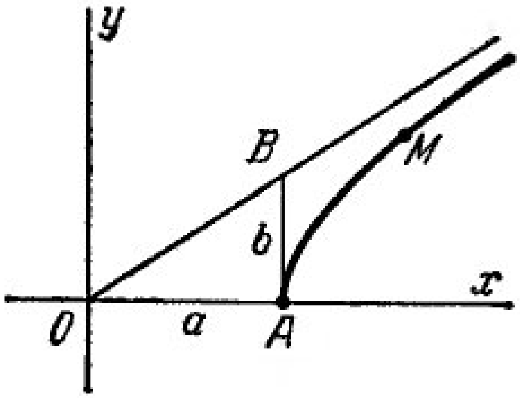

Рис. 55.

87. Присмотримся более внимательно к тому, как именно точка M «уходит в бесконечность».

С этой целью мы наряду с уравнением

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad (4)$$

которое при $x \geqslant a$ определяет изучаемую сейчас часть гиперболы, рассмотрим еще уравнение

$$y=+\frac{b}{a}x; \tag{5}$$

оно определяет прямую с угловым коэффициентом $k=\frac{b}{a}$, проходящую через начало координат. Часть этой прямой, расположенная в первой координатной четверти, изображена на рис. 55 (для построения ее использован прямоугольный треугольник OAB с катетами $OA=a$ и $AB=b$; очевидно, прямая OB как раз и имеет угловой коэффициент $k=\frac{b}{a}$).

Мы докажем, что *точка M, уходя в бесконечность, неограниченно приближается к прямой* $y=\frac{b}{a}x$.

Возьмем произвольное значение $x\,(x\geqslant a)$ и рассмотрим две точки: $M(x;\,y)$ и $N(x;\,Y)$, где

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

$$Y=\frac{b}{a}x.$$

Точка $M(x;\,y)$ лежит на гиперболе (4), точка $N(x;\,Y)$ — на прямой (5); поскольку обе эти точки имеют одну и ту же абсциссу x, прямая, соединяющая точки M и N, перпендикулярна к оси Ox (рис. 56). Подсчитаем длину отрезка MN.

Прежде всего заметим, что

$$Y=+\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\sqrt{x^2}>+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=y. \tag{6}$$

Отсюда $Y>y$ и, следовательно, $MN=Y-y$. Но

$$Y-y=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\,\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

т. е.

$$Y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}. \tag{7}$$

Проанализируем полученное выражение, предполагая, что $x\to+\infty$. Знаменатель его представляет собой сумму двух положительных бесконечно растущих слагаемых; следовательно, при $x \to +\infty$ знаменатель стремится к (положительной) бесконечности. Числитель этого выражения есть постоянная величина ab. Сопоставляя эти два обстоятельства, заключаем, что при $x \to +\infty$ правая часть равенства (7) стремится к нулю; значит, стремится к нулю и $MN = Y - y$.

Обозначим через P основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y = \frac{b}{a}x$ (MP — расстояние от точки M до этой прямой). Очевидно $MP < MN$, а так как $MN \to 0$, то, следовательно, и $MP \to 0$. А это мы и хотели доказать.

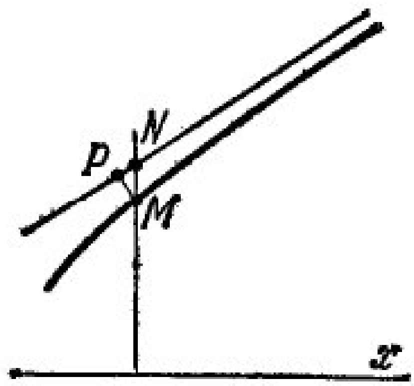

Рис. 56.

Итак, *если переменная точка M уходит в бесконечность по той части гиперболы* (1), *которая расположена в первой координатной четверти, то расстояние от точки M до прямой $y = \frac{b}{a}x$ стремится к нулю.*

88. Пусть Г — *какая-нибудь* линия, M — переменная точка на ней, a — некоторая прямая. Если возможно такое движение точки M по линии Г, что 1) точка M уходит в бесконечность, 2) при этом расстояние от точки M до прямой a стремится к нулю, — то говорят, что *линия Г асимптотически приближается к прямой a*. Прямая a в таком случае называется *асимптотой* линии Г.

Употребляя только что указанную терминологию, мы можем следующим образом сформулировать результат исследования, проведенного в n° 87:

График функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (т. е. рассматриваемая часть гиперболы) *асимптотически приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$ при $x \to +\infty$; или прямая $y = \frac{b}{a}x$ есть асимптота графика функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$* (и в то же время асимптота нашей гиперболы).

89. Мы отметим еще некоторые дополнительные особенности расположения гиперболы относительно ее асимптоты (все еще имея в виду только часть гиперболы, лежащую в первой координатной четверти).

Рассмотрим снова точки $M(x;\ y)$ и $N(x;\ Y)$, о которых шла речь в n°87, и вспомним, что точка M лежит на гиперболе, N — на асимптоте. Как установлено в n°87, имеет место неравенство $Y>y$. Отсюда следует, что точка M всегда находится «ниже» точки N. Иначе говоря, *часть гиперболы* (1), *расположенная в первой координатной четверти, на всем протяжении лежит «ниже» своей асимптоты.*

Далее, на основании формулы (7) имеем:

$$Y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Знаменатель этой дроби, будучи при $x \geqslant a$ вещественным и положительным, возрастает при возрастании x. Так как числитель здесь является постоянной величиной, то в силу указанного обстоятельства сама дробь при возрастании x всегда убывает. Таким образом, мы можем утверждать, что если x монотонно стремится к положительной бесконечности (т. е. все время только возрастает), то $MN=Y-y$ стремится к нулю также монотонно (т. е. все время убывая).

Пусть φ — угол наклона прямой $y=\frac{b}{a}x$ к оси Ox, P — основание перпендикуляра, опущенного на эту прямую из точки M; тогда, очевидно,

$$MP=MN\cdot\cos\varphi. \qquad (8)$$

Так как MN стремится к нулю монотонно, а $\cos\varphi$ есть постоянная, из формулы (8) следует, что и MP стремится к нулю монотонно.

Иначе говоря, где бы ни была расположена на гиперболе (4) точка M (в первой координатной четверти), если она передвигается по гиперболе «вправо», то расстояние от нее до асимптоты все время уменьшается. Это обстоятельство мы выразим следующим образом: *приближение гиперболы к своей асимптоте является монотонным.*

90. Подведем итог всему, что было сказано в n°n° 86—89. *Часть рассматриваемой гиперболы, лежащая в первой координатной четверти, исходит из точки* $A(a;\ 0)$ *и идет бесконечно «направо» и «вверх», асимптотически приближаясь к прямой* $y=\frac{b}{a}x$, *притом «снизу» и монотонно.*

В согласии с только что сформулированным предложением и выполнен рис. 55.

Замечание. Существенны еще два свойства рассматриваемого графика: 1) направление его в точке $A(a;\ 0)$ перпендикулярно к оси Ox, 2) своей выпуклостью он обращен везде «вверх». Мы не будем, однако, доказывать выполнение этих свойств, так как такого рода исследование графиков наиболее естественно проводить средствами математического анализа.

91. После того как исследована часть гиперболы (4), лежащая в первой координатной четверти, общий вид целой

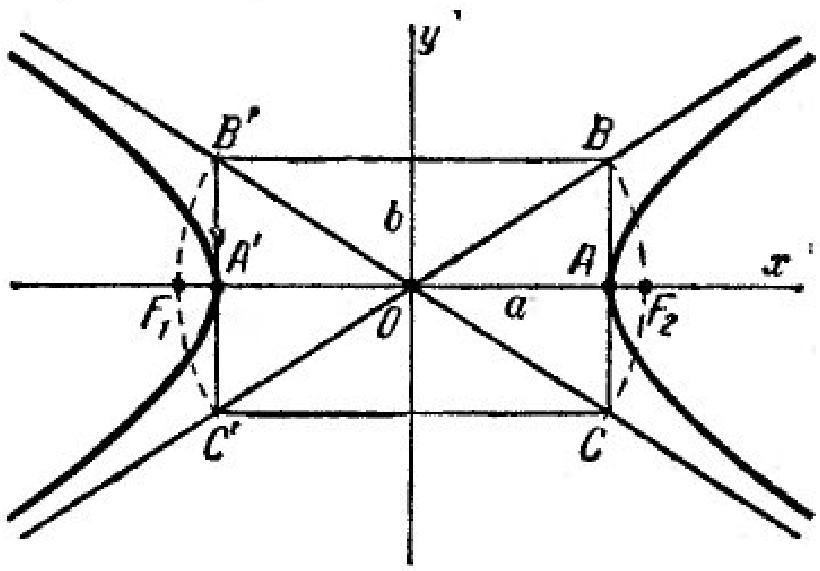

Рис. 57.

гиперболы может быть легко установлен при помощи зеркальных отражений относительно координатных осей.

Гипербола, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

изображена на рис. 57. Легко понять, что она (целая гипербола) *имеет две асимптоты*

$$y=\frac{b}{a}x$$

и

$$y=-\frac{b}{a}x;$$

первая из этих прямых нам уже знакома, вторая представляет собой ее зеркальное отражение относительно оси Ox (или оси Oy).

Оси симметрии гиперболы называют обычно просто ее *осями*, точку пересечения осей — *центром* гиперболы. (В данном случае мы имеем дело с гиперболой, оси которой совмещены с осями координат.) Одна из двух осей (в данном случае та, которая совмещена с осью Ox) пересекает гиперболу, другая ее не пересекает. Точки пересечения гиперболы с осью называются ее *вершинами*; гипербола имеет две вершины (на рис. 57 они обозначены буквами A и A').

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, мы будем называть *основным прямоугольником* гиперболы (на рис. 57 это прямоугольник $BB'C'C$). Диагонали основного прямоугольника гиперболы совпадают с ее асимптотами.

Заметим, что в математической литературе принято также называть осями гиперболы отрезки длиной $2a$ и $2b$, соединяющие середины противоположных сторон основного прямоугольника. Соответственно этому говорят, что *уравнение*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

определяет гиперболу с полуосями a и b.

Замечание. Если требуется сделать эскиз гиперболы с полуосями a и b, то следует прежде всего построить ее основной прямоугольник, затем асимптоты. После этого может быть изображена сама гипербола либо «на-глаз», либо с предварительным нанесением на чертеж нескольких ее точек. На рис. 57 показано пунктиром, как построить фокусы гиперболы, имея ее основной прямоугольник; это построение очевидным образом основано на равенстве $c^2=a^2+b^2$ (которое следует из формулы (11) п° 84).

92. Рассмотрим теперь уравнение вида:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{9}$$

При помощи перестановки букв x и y, a и b оно сводится к уравнению, изученному в предыдущих параграфах. Отсюда ясно, что уравнение (9) определяет гиперболу, расположенную так, как показано на рис. 58 (вершины ее B и B'

лежат на оси Oy). Уравнение (9) также называется каноническим уравнением гиперболы.

93. Две гиперболы, которые определяются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в одной и той же системе координат и при одних и тех же значениях a и b, называются *сопряженными* друг с другом.

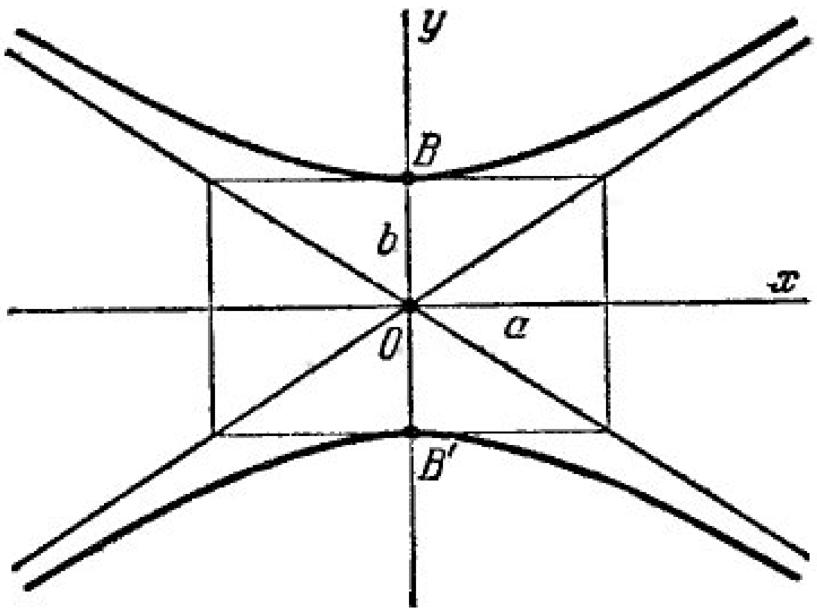

Рис. 58.

94. Гипербола с равными полуосями ($a=b$) называется *равносторонней*. Каноническое уравнение равносторонней гиперболы может быть написано в виде

$$x^2-y^2=a^2.$$

Очевидно, что основной прямоугольник равносторонней гиперболы есть квадрат; отсюда ясно, что *асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг к другу*.

§ 32. Эксцентриситет гиперболы

95. *Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к расстоянию между ее вершинами*; обозначив эксцентриситет буквой ε, получим:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Так как для гиперболы $c > a$, то $\varepsilon > 1$; т. е. *эксцентриситет каждой гиперболы больше единицы.*

Заметив, что $c^2 = a^2 + b^2$, находим:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

отсюда

$$\varepsilon = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением $\frac{b}{a}$, а отношение $\frac{b}{a}$ в свою очередь определяется эксцентриситетом. Таким образом, *эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы.*

Чем меньше эксцентриситет, т. е. чем ближе он к единице, тем меньше $\varepsilon^2 - 1$, тем меньше, следовательно, отношение $\frac{b}{a}$; значит, *чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут ее основной прямоугольник* (в направлении оси, соединяющей вершины). В случае равносторонней гиперболы $a = b$ и $\varepsilon = \sqrt{2}$.

§ 33. Рациональные выражения фокальных радиусов гиперболы

96. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$, лежащую на данной гиперболе. Если r_1 и r_2 — фокальные радиусы этой точки, то

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad (1)$$

Оказывается для выражения фокальных радиусов можно указать другие формулы, свободные от иррациональностей.

В самом деле, из равенства (8) n° 84 имеем:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right);$$

здесь знак плюс относится к случаю, когда точка M находится на правой ветви гиперболы. Полагая $\frac{c}{a} = \varepsilon$ и принимая во внимание второе из равенств (1), получим:

$$r_2 = \pm(\varepsilon x - a). \tag{2}$$

Чтобы выразить первый фокальный радиус, воспользуемся основным соотношением: $r_1 - r_2 = \pm 2a$, где знак плюс также относится к точкам правой ветви гиперболы. Из этого соотношения находим $r_1 = r_2 \pm 2a = \pm(\varepsilon x + a)$. Итак, для точек правой ветви гиперболы

$$r_1 = \varepsilon x + a, \qquad r_2 = \varepsilon x - a, \tag{3}$$

для точек левой ветви

$$r_1 = -(\varepsilon x + a), \qquad r_2 = -(\varepsilon x - a). \tag{4}$$

Эти формулы существенно используются в следующем параграфе.

§ 34. Директрисы эллипса и гиперболы

97. Рассмотрим какой-нибудь эллипс и введем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы этот эллипс определялся каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Предположим, что рассматриваемый эллипс не является окружностью, т. е. что $a \neq b$ и, следовательно, $\varepsilon \neq 0$. Предположим еще, что этот эллипс вытянут в направлении оси Ox, т. е. что $a > b$.

Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются директрисами эллипса.

Уравнения директрис в выбранной системе координат имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = +\frac{a}{\varepsilon}.$$

Первую из них мы условимся называть левой, вторую — правой.

Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена правее правой вершины эллипса; аналогично, левая директриса расположена левее его левой вершины. Эллипс вместе с директрисами изображен на рис. 59.

98. Рассмотрим какую-нибудь гиперболу и введем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы эта

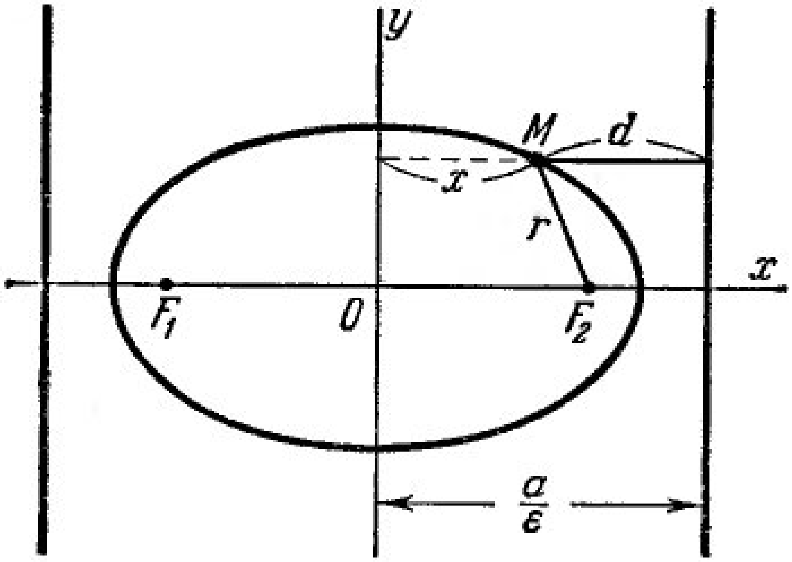

Рис. 59.

гипербола определялась каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Две прямые, перпендикулярные к той оси гиперболы, которая ее пересекает, и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ *от него, называются директрисами гиперболы.*

Уравнения директрис в выбранной системе координат имеют вид

$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x=+\frac{a}{\varepsilon}.$$

Первую из них мы условимся называть левой, вторую — правой.

Так как для гиперболы $\varepsilon>1$, то $\frac{a}{\varepsilon}<a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы; аналогично, левая директриса расположена между центром и левой вершиной. Гипербола вместе с директрисами изображена на рис. 60.

99. Значение директрис эллипса и гиперболы выявляется следующими двумя теоремами.

Теорема 11. *Если r — расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса:*

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе и правой директрисе. Пусть,

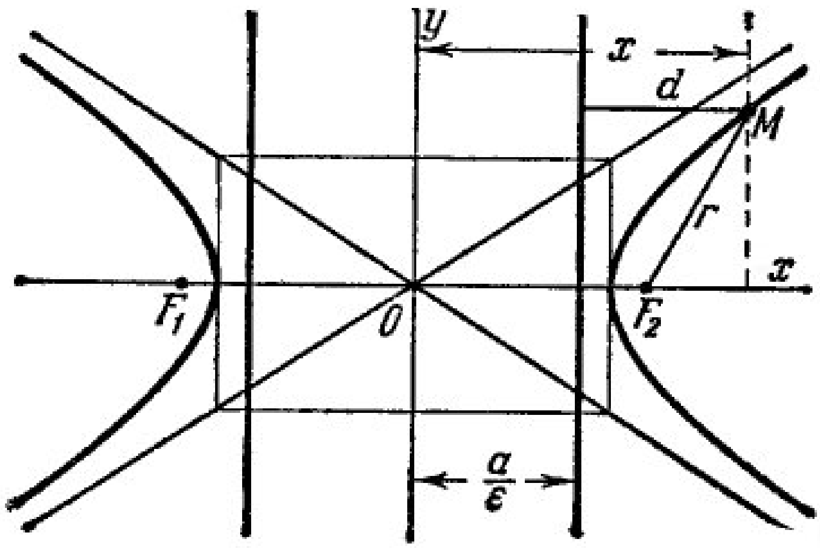

Рис. 60.

$M(x; y)$ — произвольная точка эллипса (см. рис. 59). Расстояние от M до правой директрисы выражается равенством

$$d=\frac{a}{\varepsilon}-x, \qquad (1)$$

которое легко усматривается из чертежа; расстояние от точки M до правого фокуса дается второй из формул (2) § 27:

$$r=a-\varepsilon x. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) имеем:

$$\frac{r}{d}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\frac{(a-\varepsilon x)\,\varepsilon}{a-\varepsilon x}=\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 12. *Если r — расстояние от произвольной точки гиперболы до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы:*

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе и правой директрисе. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка гиперболы (см. рис. 60). Нам придется рассмотреть два случая:

1) Точка M находится на правой половине гиперболы. Тогда расстояние от M до правой директрисы выражается равенством

$$d=x-\frac{a}{\varepsilon}, \qquad (3)$$

которое легко усматривается из чертежа. Расстояние от точки M до правого фокуса дается второй из формул (3) § 33:

$$r=\varepsilon x-a. \qquad (4)$$

Из соотношений (3) и (4) имеем:

$$\frac{r}{d}=\frac{\varepsilon x-a}{x-\frac{a}{\varepsilon}}=\frac{(\varepsilon x-a)\,\varepsilon}{\varepsilon x-a}=\varepsilon.$$

2) Точка M находится на левой половине гиперболы. Тогда расстояние от M до правой директрисы выражается равенством

$$d=|x|+\frac{a}{\varepsilon}$$

($|x|$ — расстояние от точки M до оси Oy, $\frac{a}{\varepsilon}$ — расстояние от директрисы до оси Oy, d есть сумма этих расстояний); но так как M находится на левой половине гиперболы, то x есть величина отрицательная, следовательно, $|x|=-x$, и мы получаем:

$$d=-x+\frac{a}{\varepsilon}. \qquad (5)$$

Расстояние от M до правого фокуса дается второй из формул (4) § 33:

$$r = -(\varepsilon x - a). \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6) имеем:

$$\frac{r}{d} = \frac{-(\varepsilon x - a)}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(-\varepsilon x + a)\varepsilon}{-\varepsilon x + a} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

100. Свойство эллипса и гиперболы, выраженное предыдущими теоремами, можно положить в основу определения этих линий. Именно, *геометрическое место точек, для которых расстояние r от некоторой фиксированной точки* (*фокуса*) *и расстояние d до некоторой фиксированной прямой* (*директрисы*) *находятся в постоянном отношении*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \text{const}),$$

есть эллипс, если $\varepsilon < 1$, *гипербола, если* $\varepsilon > 1$. (Чтобы убедиться в справедливости такого утверждения, нужно вывести уравнение указанного геометрического места и установить, что полученное уравнение представляет собой уравнение эллипса или гиперболы, соответственно случаям $\varepsilon < 1$ и $\varepsilon > 1$.)

Естественно поставить вопрос, что представляет собой геометрическое место точек, определенное аналогичным образом, но при условии $\varepsilon = 1$, т. е. геометрическое место точек, для каждой из которых $r = d$? Оказывается, это есть некоторая новая для нас линия второго порядка, называемая параболой.

§ 35. Парабола. Вывод канонического уравнения параболы

101. *Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой* (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус).

Фокус параболы принято обозначать буквой F, расстояние от фокуса до директрисы — буквой p. Величину p называют *параметром* параболы. Изображение параболы дано на рис. 61 (исчерпывающее пояснение этого чертежа читатель получит после чтения нескольких следующих пунктов).

Замечание. В соответствии с изложенным в п° 100 говорят, что *парабола имеет эксцентриситет* $\varepsilon = 1$.

102. Пусть дана какая-нибудь парабола (вместе с тем мы считаем заданным параметр p). Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, оси которой расположим специальным образом по отношению к данной параболе. Именно, ось абсцисс проведем через фокус перпендикулярно к директрисе и будем считать ее направленной от директрисы к фокусу; начало координат расположим посредине между фокусом и директрисой (рис. 61). Выведем уравнение данной параболы в этой системе координат.

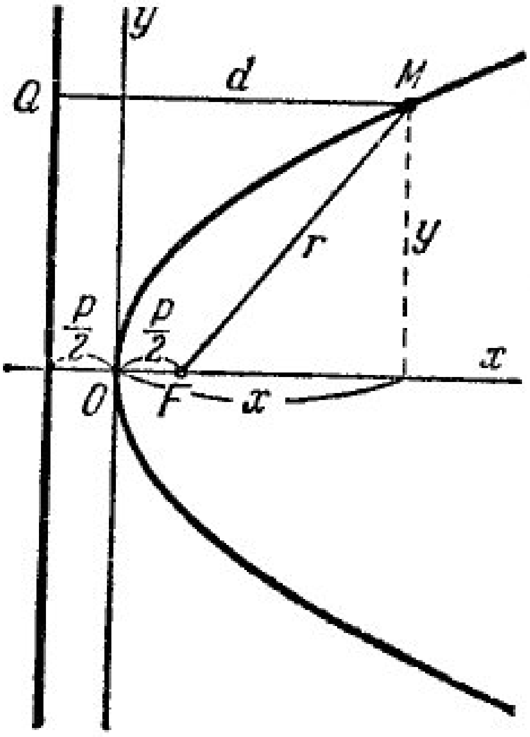

Рис. 61.

Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y. Обозначим далее через r расстояние от точки M до фокуса ($r = FM$), через d — расстояние от точки M до директрисы. Точка M будет находиться на (данной) параболе в том и только в том случае, когда

$$r = d. \tag{1}$$

Чтобы получить искомое уравнение, нужно в равенстве (1) заменить переменные r и d их выражениями через текущие координаты x, y. Заметим, что фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$; приняв это во внимание и применяя формулу (2) п° 18, находим:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Обозначим через Q основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Очевидно, точка Q имеет координаты

$\left(-\frac{p}{2};\ y\right)$; отсюда и из формулы (2) n° 18 получаем:

$$d = MQ = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = x + \frac{p}{2} \qquad (3)$$

(при извлечении корня мы взяли $x+\frac{p}{2}$ со своим знаком, так как $x+\frac{p}{2}$ — число положительное; это следует из того, что точка $M(x;\ y)$ должна находиться с той стороны от директрисы, где находится фокус, т. е. должно быть $x > -\frac{p}{2}$, откуда $x+\frac{p}{2} > 0$). Заменяя в равенстве (1) r и d их выражениями (2) и (3), найдем:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \qquad (4)$$

Это и есть уравнение рассматриваемой параболы в назначенной системе координат, так как ему удовлетворяют координаты точки $M(x;\ y)$ в том и только в том случае, когда точка M лежит на данной параболе.

Имея в виду получить уравнение параболы в более простом виде, возведем обе части равенства (4) в квадрат; получим:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}, \qquad (5)$$

или

$$y^2 = 2px. \qquad (6)$$

Уравнение (6) выведено нами как следствие уравнения (4). Легко показать, что уравнение (4) в свою очередь может быть выведено, как следствие уравнения (6). В самом деле, из уравнения (6) очевидным образом («обратным ходом») выводится уравнение (5); далее, из уравнения (5) имеем:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \pm\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Остается показать, что, если x, y удовлетворяют уравнению (6), то здесь можно выбрать только знак плюс. Но это ясно, так как из уравнения (6) $x = \frac{y^2}{2p}$, следовательно, $x \geqslant 0$, поэтому $x+\frac{p}{2}$ есть число положительное. Мы приходим к уравнению (4). Поскольку каждое из уравнений (4) и (6) есть следствие другого, они эквивалентны. Отсюда заключаем, что *уравнение* (6) *является уравнением параболы*. Это уравнение называется *каноническим* уравнением параболы.

103. Уравнение $y^2=2px$, определяющее параболу в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, есть уравнение второй степени; таким образом, *парабола есть линия второго порядка*.

§ 36. Исследование формы параболы

104. Постараемся при помощи анализа уравнения

$$y^2=2px \tag{1}$$

уяснить себе форму параболы и тем самым обосновать вышеуказанное изображение ее на чертеже.

Так как уравнение (1) включает y только в четной степени, то парабола, которую оно определяет, симметрична относительно оси Ox. Поэтому нам достаточно изучить лишь часть ее, лежащую в верхней полуплоскости. Эта часть параболы определяется уравнением

$$y=+\sqrt{2px}. \tag{2}$$

При отрицательных значениях x уравнение (2) дает мнимые значения y. Следовательно, левее оси Oy ни одной точки параболы нет. При $x=0$ получаем $y=0$. Таким образом, начало координат лежит на параболе и является самой «левой» ее точкой. Пусть теперь x возрастает, начиная от нуля; как видно из уравнения (2), при этом y будет все время возрастать. Из уравнения (2) видно также, что если $x\to+\infty$, то и $y\to+\infty$.

Таким образом, переменная точка $M(x;\ y)$, описывающая рассматриваемую часть параболы, исходит из начала координат и движется «вправо» и «вверх»; удаление точки M как от оси Oy «вправо», так и от оси Ox «вверх» является бесконечным (рис. 62).

Замечание. Существенны еще два свойства параболы: 1) направление ее в точке $O(0;\ 0)$ перпендикулярно к оси Ox, 2) часть параболы, лежащая в верхней полуплоскости, своей выпуклостью обращена «вверх». Рис. 62 выполнен с учетом этих свойств. Мы не будем, однако, доказывать, что они действительно имеют место, так как такого рода исследование линий наиболее естествено проводить средствами математического анализа.

105. После того, как мы установили форму части параболы, лежащей в верхней полуплоскости, установление формы целой параболы уже не требует ни малейшего труда. Для этого достаточно произвести зеркальное отражение относительно оси Ox. Общее представление о целой параболе, заданной уравнением

$$y^2 = 2px,$$

дает рассмотренный ранее рис. 61.

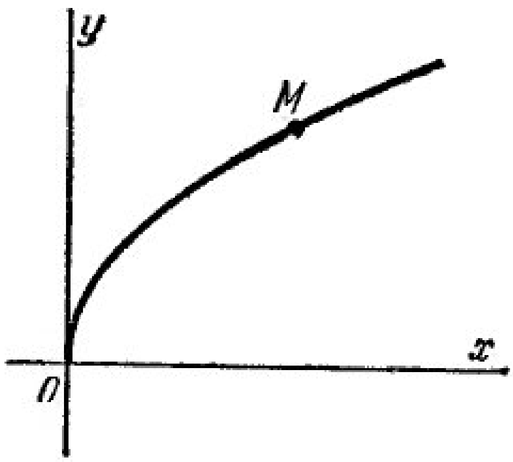

Рис. 62.

Ось симметрии параболы обычно называется просто ее *осью* (в данном случае она совмещена с осью Ox). Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется ее *вершиной* (в данном случае вершина совпадает с началом координат). Число p, т. е. параметр параболы, выражает расстояние от фокуса до директрисы. Геометрический смысл параметра p можно описать еще следующим образом. Возьмем какое-нибудь определенное значение абсциссы, например $x = 1$, и найдем из уравнения (1) соответствующие значения ординаты: $y = \pm\sqrt{2p}$. Мы получаем на параболе две точки $M_1(1;\ +\sqrt{2p})$ и $M_2(1;\ -\sqrt{2p})$, симметричные относительно оси; расстояние между ними равно $2\sqrt{2p}$. Таким образом, $2\sqrt{2p}$ есть длина хорды параболы, проведенной перпендикулярно к оси на расстоянии в одну единицу длины от вершины. Мы видим, что длина этой хорды $(= 2\sqrt{2p})$ тем больше, чем больше p. Следовательно, параметр p характеризует «ширину» области, ограниченной параболой, при условии, что эта «ширина» измеряется перпендикулярно к оси на определенном расстоянии от вершины.

106. Уравнение

$$y^2 = -2px \tag{3}$$

(при положительном p) сводится к уравнению $y^2 = 2px$ путем замены x на $-x$, т. е. путем преобразования координат, которое соответствует изменению направления оси Ox на противоположное. Отсюда следует, что уравнение $y^2 = -2px$ также определяет параболу, ось которой совмещена с осью Ox, а вершина — с началом координат, но которая расположена в левой полуплоскости (так, как показано на рис. 63).

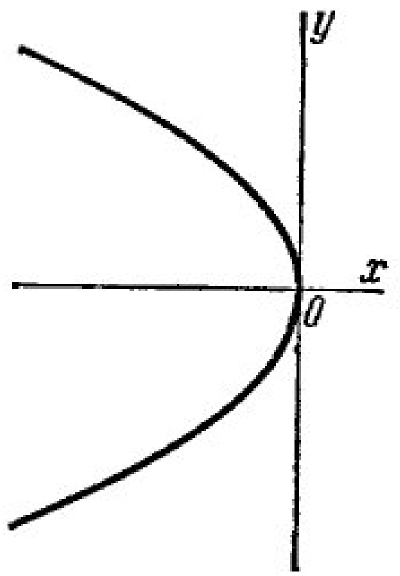

Рис. 63.

107. По аналогии с предыдущим мы можем утверждать, что каждое из уравнений

$$x^2 = 2py,$$
$$x^2 = -2py$$

($p > 0$) определяет параболу с вершиной в начале координат, расположенную симметрично относительно оси Oy (эти уравнения параболы, как и уравнения (1) и (3), называют каноническими). Параболу, определяемую уравнением $x^2 = 2py$, мы будем называть *восходящей*,

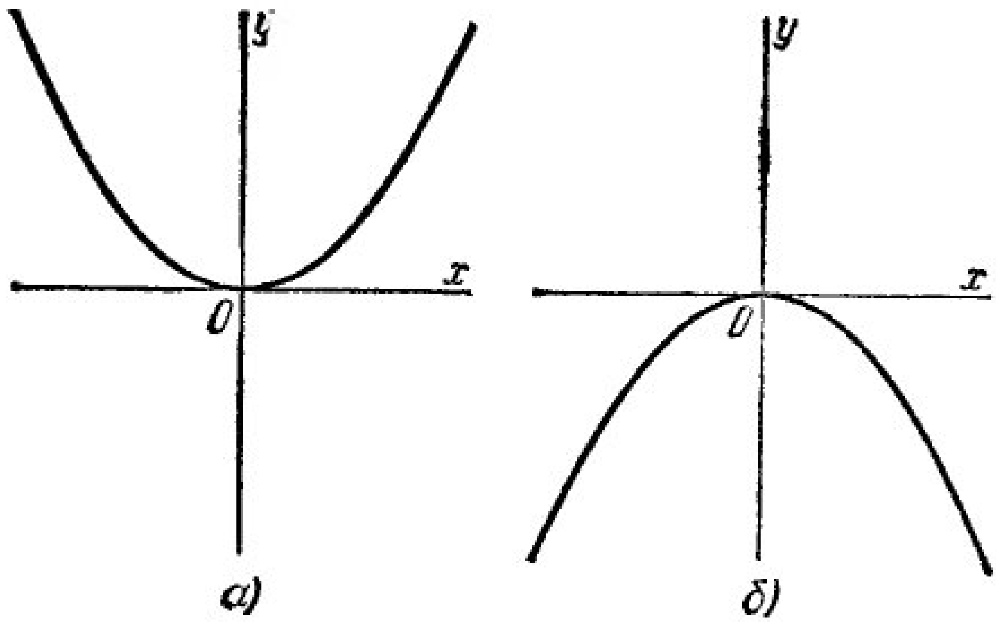

Рис. 64.

определяемую уравнением $x^2 = -2py$, — *нисходящей* (см. соответственно рис. 64, *а* и *б*): эти названия естественны и не требуют разъяснений.

§ 37. Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы

108. Пользуясь результатами, изложенными в п°п° 99—102, мы *выведем полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы* (по форме записи общее для этих трех линий) *при некотором специальном расположении полярной оси*. Оговоримся, однако, что в случае гиперболы это уравнение определяет линию не целиком, а только одну ее ветвь.

Пусть нам дана какая-нибудь из названных линий: эллипс, гипербола или парабола (если данная линия гипербола, то мы будем рассматривать какую-нибудь одну ее ветвь); обозначим ее буквой L.

Пусть F—фокус линии, g—соответствующая этому фокусу директриса (в случае гиперболы в качестве F и g возьмем фокус и директрису, ближайшие к рассматриваемой ветви).

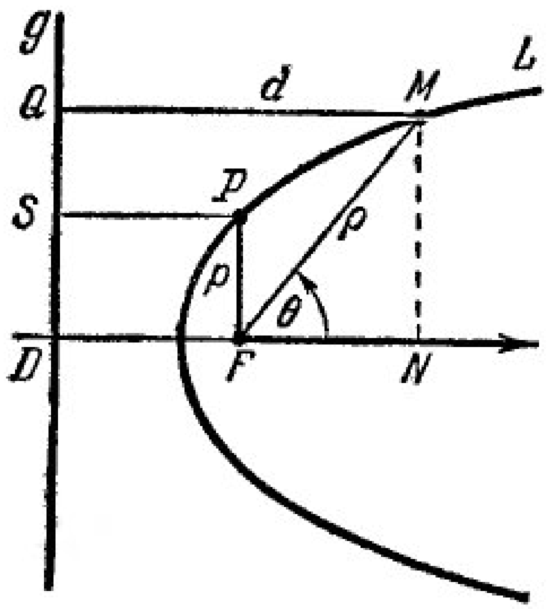

Рис. 65.

Введем полярную систему координат так, чтобы полюс совместился с фокусом F, а полярная ось направилась из фокуса по оси линии L в сторону, противоположную директрисе g (рис. 65). Обозначим, как обычно, через ρ, θ полярные координаты произвольной точки M линии L. Чтобы вывести уравнение линии L, будем исходить из соотношения

$$\frac{r}{d}=\varepsilon, \tag{1}$$

где ε—эксцентриситет линии, а r и d имеют тот же смысл, что и в п°п° 99—102.

Так как полюс совмещен с фокусом F, то

$$r=\rho. \tag{2}$$

Далее,

$$d=QM=DN=DF+FN=DF+\rho\cos\theta. \tag{3}$$

Пусть P—точка, расположенная на линии L так, что отрезок FP перпендикулярен к оси линии L, и p—длина отрезка FP.

Иначе говоря, *p есть половина фокальной хорды линии L, перпендикулярной к ее оси*; эта величина называется *фокальным параметром* *) линии L.

Вследствие основного соотношения (1), которое относится ко всем точкам линии L, мы имеем (в частности для точки P):

$$\frac{FP}{SP}=\varepsilon,$$

откуда $SP=\frac{FP}{\varepsilon}=\frac{p}{\varepsilon}$. Но $SP=DF$; следовательно,

$$DF=\frac{p}{\varepsilon}.$$

Из последнего равенства и равенства (3) получаем:

$$d=\frac{p}{\varepsilon}+\rho\cos\theta. \tag{4}$$

Подставляя теперь в левую часть уравнения (1) вместо r и d их выражения (2) и (4), найдем:

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon}+\rho\cos\theta}=\varepsilon,$$

откуда

$$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}. \tag{5}$$

Это и есть полярное уравнение эллипса, гиперболы (вернее одной ветви гиперболы) и параболы. Здесь p — фокальный параметр, ε — эксцентриситет кривой. Уравнение (5) используется в механике.

§ 38. Диаметры линий второго порядка

109. Важное и неожиданное на первый взгляд свойство линий второго порядка (эллипса, гиперболы и параболы) выражает следующая теорема:

Теорема 13. *Середины параллельных хорд линии второго порядка лежат на одной прямой.*

---

*) В том случае, когда линия L есть парабола, $FP=PS$ (см. n° 101), следовательно, $p=DF$, т. е. p равно расстоянию от фокуса до директрисы. Таким образом, в этом случае величина p совпадает с параметром параболы, с которым мы встречались уже ранее, обозначая его той же буквой.

Доказательство. 1) Пусть данная линия есть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

(рис. 66). Обозначим через k общий угловой коэффициент параллельных хорд; тогда уравнение каждой из них может быть написано в виде

$$y=kx+l; \tag{2}$$

здесь l для разных хорд имеет разные значении.

Будем искать концы хорды, определяемой уравнением (2) при каком-нибудь значении l. Решая совместно уравнения (1) и (2), исключим из них y; получим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+l)^2}{b^2}=1,$$

или

$$(b^2+a^2k^2)\,x^2+2a^2klx+ \\ +a^2(l^2-b^2)=0. \tag{3}$$

Корни x_1, x_2 этого квадратного уравнения суть абсциссы концов M_1, M_2 хорды. Пусть точка M_0 $(x_0;\ y_0)$—середина этой же хорды; тогда

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

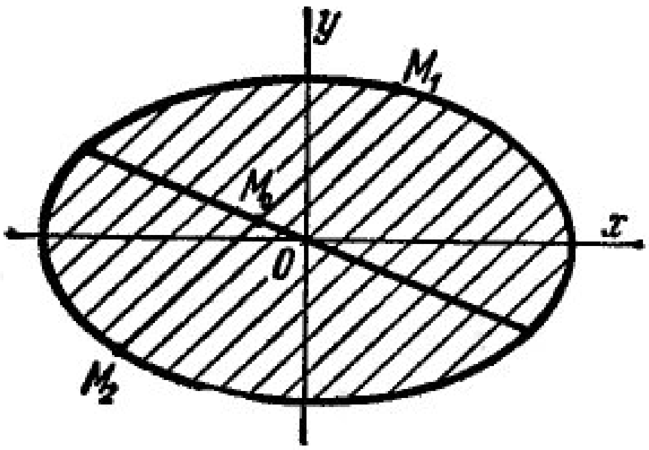

Рис. 66.

Но, по известной теореме о сумме корней квадратного уравнения,

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2kl}{b^2+a^2k^2}.$$

Следовательно,

$$x_0=-\frac{a^2kl}{b^2+a^2k^2}.$$

Зная x_0, мы найдем y_0 из уравнения (2):

$$y_0=kx_0+l=-\frac{a^2k^2l}{b^2+a^2k^2}+l=\frac{b^2l}{b^2+a^2k^2}.$$

Итак,

$$x_0=-\frac{a^2kl}{b^2+a^2k^2},\qquad y_0=\frac{b^2l}{b^2+a^2k^2}. \tag{4}$$

Меняя здесь l, мы будем получать координаты середин различных параллельных между собою хорд эллипса, но при этом, как видно из соотношений (4), x_0, y_0 будут неизменно связаны уравнением

$$\frac{y_0}{x_0}=-\frac{b^2}{a^2k},$$

или $y_0=k'x_0$, где

$$k'=-\frac{b^2}{a^2k}. \tag{5}$$

Таким образом, середины всех хорд лежат на прямой

$$y=k'x. \tag{6}$$

2) Пусть данная линия есть гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

(рис. 67, *а*, *б*). Обозначим через k общий угловой коэффициент параллельных хорд; тогда уравнение каждой из них может быть написано в виде

$$y=kx+l. \tag{8}$$

Заметим заранее, что хорды гиперболы не могут быть параллельными ее асимптотам (так как каждая прямая, параллельная асимптоте, пересекает гиперболу только в одной точке); поэтому $k\neq\frac{b}{a}$ и $k\neq-\frac{b}{a}$.

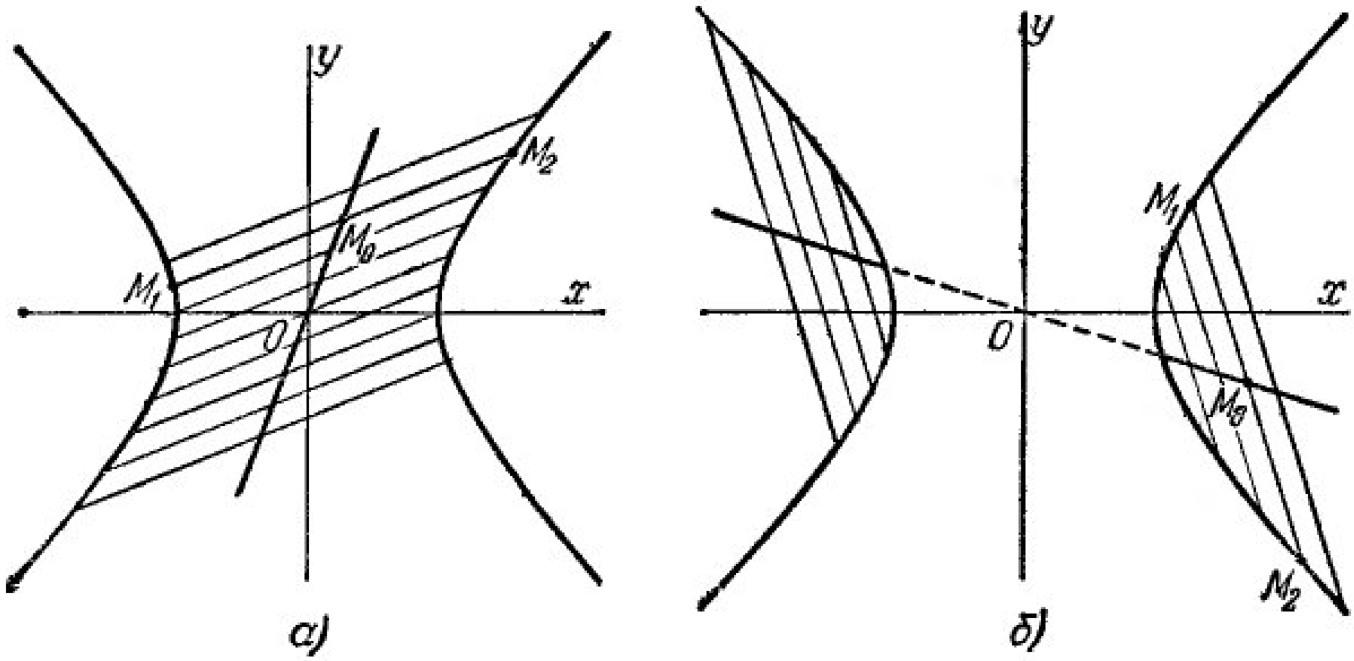

Рис. 67.

Будем искать концы хорды, определяемой уравнением (8) при каком-нибудь значении l. Решая совместно уравнения (7) и (8), исключим из них y; мы получим:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(kx+l)^2}{b^2}=1,$$

или

$$(b^2-a^2k^2)\,x^2-2a^2klx-a^2\,(l^2+b^2)=0. \tag{9}$$

Так как $k\neq\pm\frac{b}{a}$, то $b^2-a^2k^2\neq0$. Следовательно, уравнение (9) является квадратным. Корни этого квадратного уравнения x_1, x_2 суть абсциссы концов M_1, M_2 хорды. Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ — середина этой же хорды; тогда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Применяя теорему о сумме корней квадратного уравнения, находим:

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2kl}{b^2 - a^2k^2}.$$

Следовательно, $x_0 = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}$. Зная x_0, мы найдем y_0 из уравнения (8):

$$y_0 = kx_0 + l = \frac{a^2k^2l}{b^2 - a^2k^2} + l = \frac{b^2l}{b^2 - a^2k^2}.$$

Итак,

$$x_0 = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}, \qquad y_0 = \frac{b^2l}{b^2 - a^2k^2}. \tag{10}$$

Меняя здесь l, мы будем получать координаты середин различных параллельных между собою хорд гиперболы, но при этом, как видно из соотношений (10), x_0, y_0 будут неизменно связаны уравнением

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{b^2}{a^2k},$$

или $y_0 = k'x_0$, где

$$k' = \frac{b^2}{a^2k}. \tag{11}$$

Таким образом, середины всех хорд лежат на прямой

$$y = k'x. \tag{12}$$

3) Пусть, наконец, данная линия есть **п а р а б о л а**

$$y^2 = 2px \tag{13}$$

(рис. 68). Обозначим через k общий угловой коэффициент параллельных хорд; тогда уравнение каждой из них может быть написано в виде

$$y = kx + l. \tag{14}$$

Заметим заранее, что хорды параболы не могут быть параллельны ее оси (так как каждая прямая, параллельная оси, пересекает параболу только в одной точке); поэтому $k \neq 0$.

Будем искать концы хорды, определяемой уравнением (14) при каком-нибудь значении l. Решая совместно уравнения (13) и (14), исключим из них y; мы получим:

$$(kx + l)^2 - 2px = 0,$$

или

$$k^2x^2 + 2(kl - p)x + l^2 = 0. \tag{15}$$

Так как $k \neq 0$, то уравнение (15) является квадратным. Корни этого уравнения x_1, x_2 суть абсциссы концов M_1, M_2 хорды. Пусть $M_0(x_0; y_0)$— середина этой же хорды. Мы имеем:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

по теореме о сумме корней квадратного уравнения

$$x_1 + x_2 = -\frac{2(kl - p)}{k^2}.$$

Следовательно, $x_0 = \frac{p - kl}{k^2}$. Зная x_0, мы найдем y_0 из уравнения (14):

$$y_0 = kx_0 + l = k\frac{p - kl}{k^2} + l = \frac{p}{k}.$$

Итак,

$$x_0 = \frac{p - kl}{k^2}, \qquad y_0 = \frac{p}{k}. \tag{16}$$

Меняя здесь l, мы будем получать координаты середин различных параллельных между собой хорд параболы; при этом, как видно из соотношений (16), y_0 будет оставаться неизменно равным числу $\frac{p}{k}$. Таким образом, середины всех хорд лежат на прямой

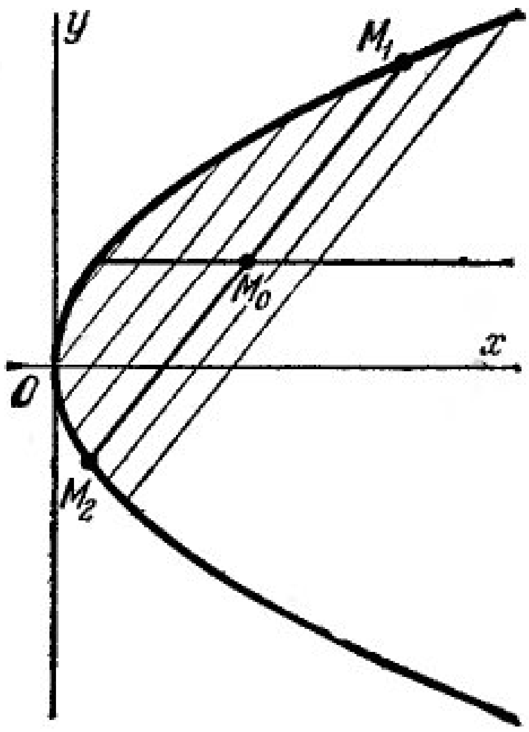

Рис. 68.

$$y = \frac{p}{k}, \tag{17}$$

которая параллельна оси абсцисс и вместе с тем параллельна оси параболы.

Мы могли бы теперь сказать, что теорема доказана вполне, если бы не было одного дефекта в технике наших вычислений. Дело в том, что мы представляли хорды линии второго порядка уравнением с угловым коэффициентом (вида $y = kx + l$). Наши выкладки, следовательно, теряют смысл, если рассматриваемые хорды параллельны оси Oy (так как прямые, параллельные оси Oy, не имеют углового коэффициента). Однако для таких хорд утверждение теоремы сразу вытекает из свойств симметрии эллипса, гиперболы и параболы. В самом деле, эллипс, гипербола и парабола, заданные каноническими уравнениями (1), (7) и (13), симметричны относительно оси Ox. Следовательно, и в том случае, когда хорды этих линий параллельны оси Oy, середины их лежат на одной прямой (на оси Ox).

110. *Прямая, проходящая через середины параллельных хорд линии второго порядка, называется ее диаметром.*

Все диаметры эллипса и гиперболы проходят через центр; это ясно геометрически (так как центр является серединой всякой проходящей через него хорды), а также сразу усматривается из уравнений (6) и (12) п° 109.

Согласно уравнению (17) *все диаметры параболы параллельны ее оси.*

Отметим некоторые свойства диаметров эллипса и гиперболы.

Рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Пусть k — угловой коэффициент какого-нибудь его диаметра. Проведем параллельно этому диаметру хорды эллипса; геометрическое место их середин есть другой диаметр, который называется *сопряженным* первому. Он имеет угловой коэффициент k', определяемый равенством (5), или

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{18}$$

Будем теперь искать диаметр, который сопряжен диаметру с угловым коэффициентом k'; аналогично предыдущему, угловой коэффициент k'' этого нового диаметра определится равенством

$$k'k''=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Отсюда и из (18) находим: $k''=k$.

Таким образом, *если один из двух диаметров эллипса сопряжен другому, то последний сопряжен первому.* Поэтому такие диаметры называются *взаимно сопряженными.* Соотношение (18) называется *условием сопряженности диаметров* (эллипса) *с угловыми коэффициентами* k и k'.

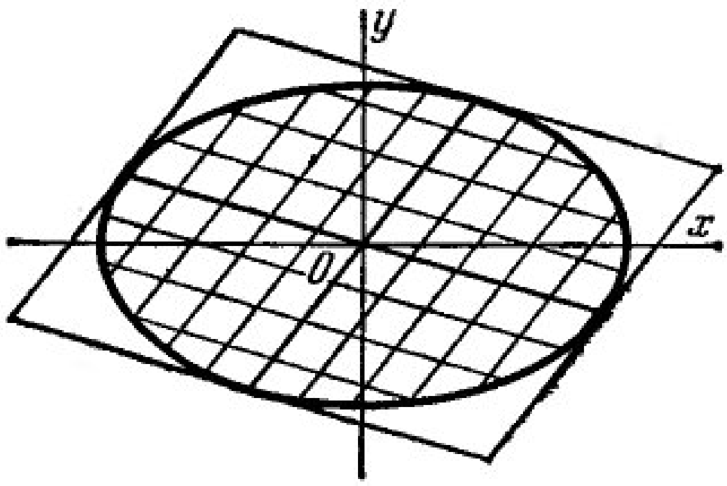

Рис. 69.

Взаимность сопряженных диаметров можно выразить еще так: *если один из двух диаметров эллипса делит пополам хорды, параллельные другому, то последний делит пополам хорды, параллельные первому* (рис. 69; этот чертеж иллюстрирует также интересное следствие предыдущего предложения: касательные к эллипсу в концах его диаметра параллельны между собой и параллельны сопряженному диаметру).

Все, что было сейчас сказано о диаметрах эллипса, непосредственно переносится на диаметры гиперболы. Только условие сопряженности диаметров гиперболы несколько отлично от соотношения (18).

Именно, если гипербола задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то условие сопряженности ее диаметров с угловыми коэффициентами k и k' есть:

$$kk'=\frac{b^2}{a^2}. \tag{19}$$

Оно вытекает из равенства (11).

Замечание. Оси симметрии эллипса и гиперболы суть взаимно сопряженные диаметры, так как каждая из них делит пополам хорды, параллельные другой. Среди всех остальных пар сопряженных диаметров оси симметрии выделяются тем, что являются диаметрами не только сопряженными, но и перпендикулярными друг к другу.

§ 39. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

111. К числу наиболее замечательных свойств эллипса, гиперболы и параболы относятся так называемые оптические их свойства. Эти свойства, между прочим, показывают, что название «фокусы» имеет источник в физике.

Мы сформулируем их прежде всего чисто геометрически.

1. Прямая, касающаяся эллипса в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит вне угла F_1MF_2 (рис. 70, *а*).

2. Прямая, касающаяся параболы в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальным радиусом FM и с лучом, который,

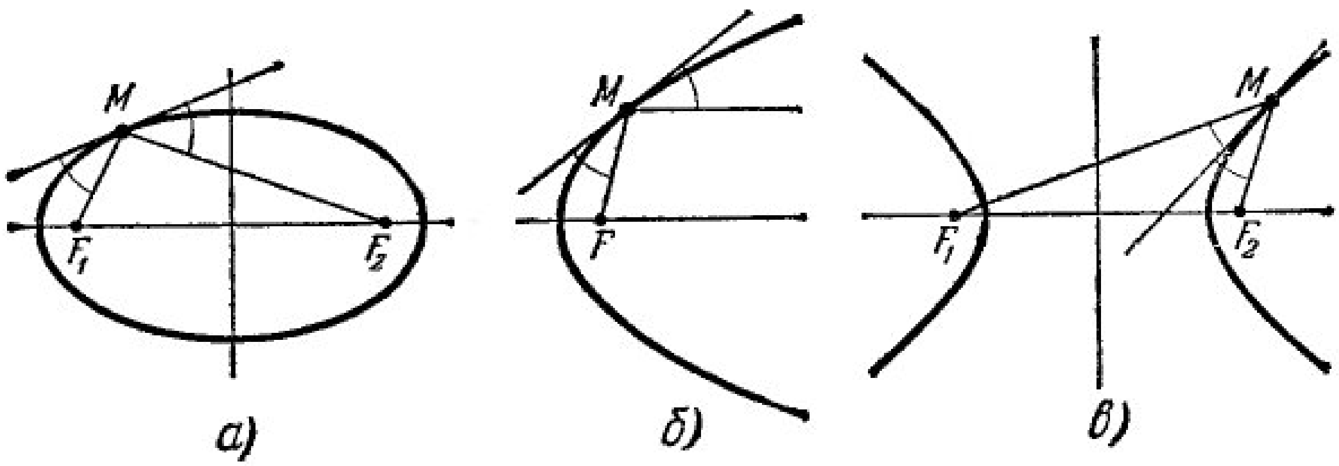

Рис. 70.

исходя из точки M, идет параллельно оси параболы в ту сторону, куда парабола бесконечно простирается (рис. 70, *б*).

3. Прямая, касающаяся гиперболы в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит внутри угла F_1MF_2 (рис. 70, *в*).

Мы не будем останавливаться на доказательстве этих свойств. Заметим только, что для доказательства их при помощи вычислений нужно уметь выражать угловой коэффициент касательной, зная уравнение кривой и точку прикосновения. Соответствующие правила даются в курсе математического анализа. Чтобы выявить физический смысл приведенных предложений, представим себе, что эллипс, парабола или гипербола вращается вокруг оси (содержащей фокусы). Тем самым образуется поверхность, называемая соответственно эллипсоидом, параболоидом или гиперболоидом. Реальная поверхность такого вида, покрытая амальгамой, представляет собой, соответственно, эллиптическое, параболическое или гиперболическое зеркало. Принимая во внимание известные в оптике законы отражения света, заключаем, что:

1. Если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе.

2. Если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут параллельно оси.

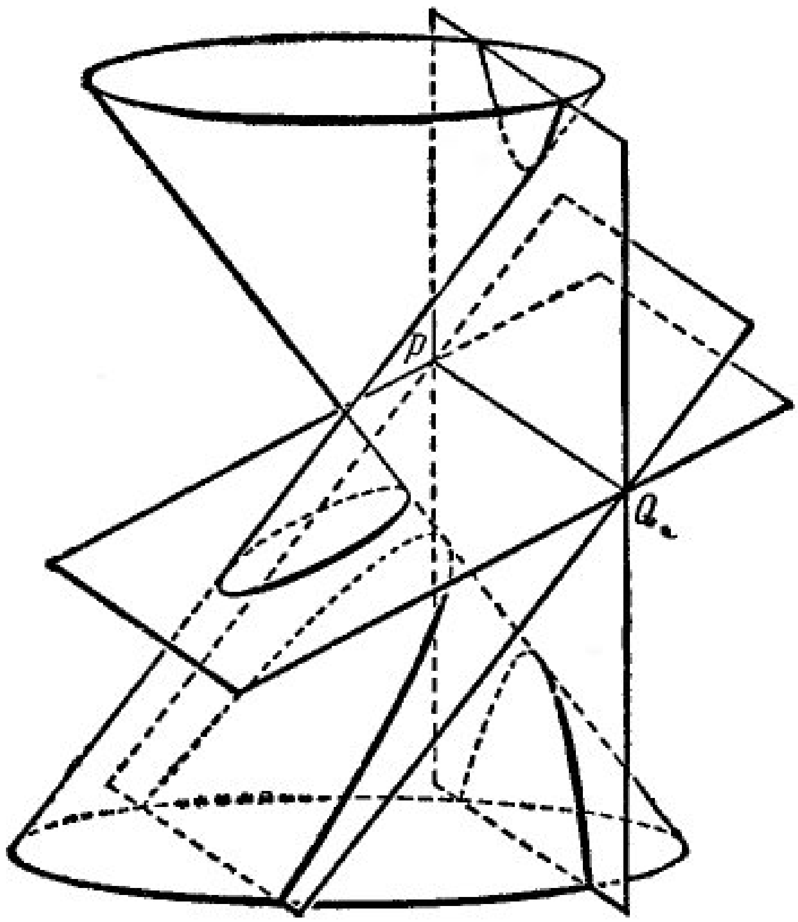

Рис. 71.

3. Если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее так, как если бы они исходили из другого фокуса.

На указанном сейчас свойстве параболического зеркала основано устройство прожектора.

§ 40. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения

112. Следующая теорема с новой точки зрения освещает геометрическую природу эллипсов, гипербол и парабол:

Теорема 14. *Сечением любого круглого конуса плоскостью (не проходящей через его вершину) определяется кривая, которая может быть лишь эллипсом, гиперболой или параболой. При этом, если плоскость пересекает только одну полость конуса и по замкнутой кривой, то эта кривая есть эллипс; если секущая плоскость пересекает только одну полость конуса и по незамкнутой кривой, то эта кривая — парабола; если плоскость пересекает обе полости конуса, то в сечении образуется гипербола* (рис. 71).

Справедливость этой теоремы можно установить, исходя из того общего положения, что пересечение поверхности второго порядка плоскостью есть линия второго порядка (см., например, нашу книгу «Квадратичные формы и матрицы» n° 31, 32).

Из рис. 71 легко усмотреть, что, поворачивая секущую плоскость вокруг прямой PQ, мы заставим изменяться кривую сечения. Будучи, например, первоначально эллипсом, она на одно мгновение становится параболой, а затем превращается в гиперболу. Параболой эта кривая будет тогда, когда секущая плоскость параллельна касательной плоскости конуса.

Вследствие сказанного в этом параграфе эллипсы, гиперболы и параболы называются *коническими сечениями*.

ГЛАВА 6

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ КООРДИНАТ

§ 41. Примеры приведения общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду

113. Важной задачей аналитической геометрии является исследование общего уравнения линии второго порядка и приведение его к простейшим (каноническим) формам. Не стремясь решать эту задачу в общем виде, мы поясним в настоящем параграфе только сущность дела, пользуясь конкретными примерами.

Прежде всего сделаем одно замечание технического характера. Ранее (§ 15) мы писали общее уравнение линии второго порядка, т. е. общее уравнение второй степени относительно x, y, в виде

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Однако в большинстве формул теории линий второго порядка коэффициенты B, D и E входят деленными на 2. Поэтому общее уравнение второй степени оказывается целесообразным записывать следующим образом:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

т. е. буквами B, D и E обозначать половины соответствующих коэффициентов. Например, если дано уравнение

$$x^2+3xy+2y^2+5x+4y+1=0,$$

то

$$A=1,\ B=\frac{3}{2},\ C=2,\ D=\frac{5}{2},\ E=2,\ F=1.$$

Числа A, B, C, D, E, F называются *коэффициентами* уравнения (1) (по отношению к B, D и E это название, как видим, условно). Первые три члена уравнения (1), т. е. члены второй степени, называются его *старшими* членами.

Чтобы сразу же показать удобство записи уравнения второй степени в виде (1), обратим внимание на следующее тождество:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=$$
$$=(Ax+By+D)\,x+(Bx+Cy+E)\,y+(Dx+Ey+F), \quad (2)$$

проверка которого не составляет труда. Оно показывает, что второй, четвертый и пятый члены уравнения (1) естественно составляются из двух одинаковых экземпляров каждый. Тождество (2) полезно во многих случаях и вскоре будет нами использовано.

114. Пусть дано общее уравнение линии второго порядка:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \quad (1)$$

Требуется упростить это уравнение путем перехода к другим координатам (при ином, более выгодном расположении осей).

Уточним предъявляемые требования:

1) нужно добиться, чтобы в группе старших членов исчез член с произведением текущих координат; 2) чтобы число членов первой степени стало наименьшим (если возможно, — совсем их уничтожить); 3) кроме того, если возможно, уничтожить свободный член. Уравнение, получаемое при соблюдении этих требований, называется *каноническим*. Далее практически показывается, как следует выполнять необходимые действия, чтобы привести данное уравнение к каноническому виду.

П р и м е р. Привести к каноническому виду уравнение

$$17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=0. \quad (3)$$

Р е ш е н и е. Прежде всего постараемся упростить уравнение при помощи параллельного переноса координатных осей. Перенесем начало координат в точку $S\,(x_0;\ y_0)$, которую пока будем считать произвольной. Согласно § 8 получим соответствующее преобразование координат:

$$x=\tilde{x}+x_0, \quad y=\tilde{y}+y_0. \quad (4)$$

Перейдем в левой части уравнения (3) к новым координатам (т. е. заменим x, y их выражениями (4)); после приведения подобных членов найдем:

$$17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=$$
$$=17\tilde{x}^2+12\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2+2(17x_0+6y_0-23)\tilde{x}+$$
$$+2(6x_0+8y_0-14)\tilde{y}+(17x_0^2+12x_0y_0+8y_0^2-46x_0-28y_0+17). \qquad (5)$$

В преобразованном уравнении данной кривой члены первой степени исчезнут, если мы подберем x_0, y_0 так, чтобы соблюдались равенства:

$$\begin{aligned} 17x_0+6y_0-23&=0,\\ 6x_0+8y_0-14&=0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Решая эти уравнения совместно, получим: $x_0=1$, $y_0=1$. Свободный член преобразованного уравнения, который мы обозначим через $\tilde{F}$, особенно легко подсчитать при помощи тождества (2) с учетом уравнений (6):

$$F=17x_0^2+12x_0y_0+8y_0^2-46x_0-28y_0+17=$$
$$=(17x_0+6y_0-23)x_0+(6x_0+8y_0-14)y_0+$$
$$+(-23x_0-14y_0+17)=-23x_0-14y_0+17=-20.$$

Теперь начало координат новой системы находится в точке S (старые координаты которой $x_0=1$, $y_0=1$). Уравнение в новых координатах имеет вид:

$$17\tilde{x}^2+12\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2-20=0. \qquad (7)$$

Заметим, что левая часть уравнения (7) не меняется при замене $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ на $-\tilde{x}$, $-\tilde{y}$. Поэтому, если уравнению (7) удовлетворяют некоторые числа $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, то удовлетворяют также числа $-\tilde{x}$, $-\tilde{y}$. Значит, если какая-нибудь точка $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ лежит на данной кривой, то точка $N(-\tilde{x}, -\tilde{y})$ также лежит на данной кривой. Но точки $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $N(-\tilde{x}, -\tilde{y})$ симметричны относительно точки S. Таким образом, все точки данной кривой расположены парами, симметрично относительно S (рис. 72). Точка S в этом случае называется центром симметрии, или просто центром данной кривой. Теперь ясен геометрический смысл произведенного преобразования: начало координат перенесено в центр кривой.

Произведем далее поворот перенесенных осей на некоторый угол α. Согласно § 9 получим соответствующее преобразование координат:

$$\begin{aligned} \tilde{x}&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ \tilde{y}&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (8)$$

Заменим в левой части уравнения (7) величины $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ их выражениями (8); после приведения подобных членов найдем:

$$17\tilde{x}^2+12\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2-20=(17\cos^2\alpha+12\cos\alpha\sin\alpha+8\sin^2\alpha)x'^2+$$
$$+2(-17\cos\alpha\sin\alpha+6\cos^2\alpha-6\sin^2\alpha+8\cos\alpha\sin\alpha)x'y'+$$
$$+(17\sin^2\alpha-12\cos\alpha\sin\alpha+8\cos^2\alpha)y'^2-20. \qquad (9)$$

Постараемся подобрать угол α так, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль. Для этого нам придется решить тригонометрическое уравнение:

$$-17\cos\alpha\sin\alpha+6\cos^2\alpha-6\sin^2\alpha+8\cos\alpha\sin\alpha=0,$$

или

$$6\sin^2\alpha+9\sin\alpha\cos\alpha-6\cos^2\alpha=0.$$

Отсюда

$$6\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+9\,\mathrm{tg}\,\alpha-6=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\,\alpha$, найдем: $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}$ или $\mathrm{tg}\,\alpha=-2$. Возьмем первое решение, что соответствует

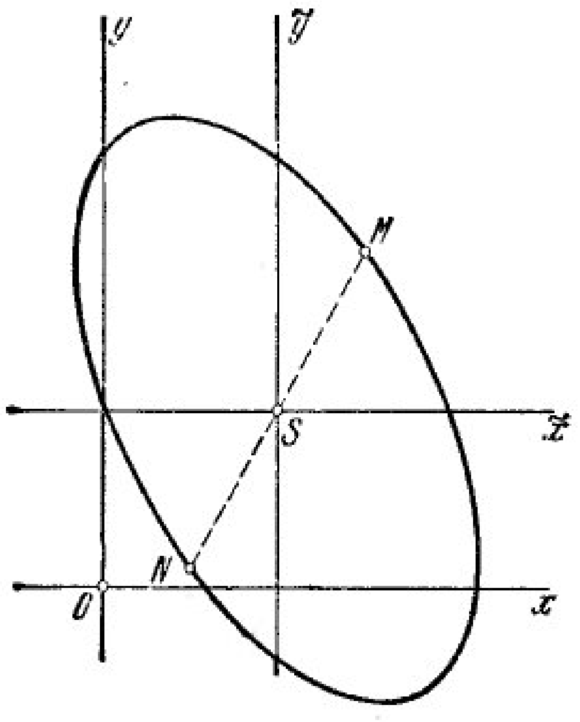

Рис. 72.

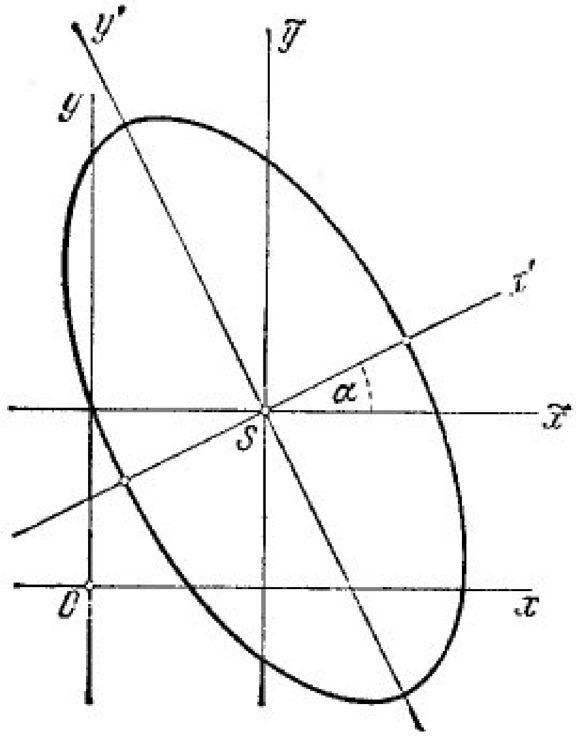

Рис. 73.

повороту координатных осей на острый угол. Зная $\mathrm{tg}\,\alpha$, вычислим $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда и согласно (9) находим уравнение данной кривой в системе x', y':

$$20x'^2+5y'^2-20=0$$

или

$$\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

Мы получили каноническое уравнение эллипса с полуосями 2 и 1 (большая ось эллипса находится на оси Oy'; см. рис. 73).

115. Если дана кривая второго порядка вообще:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

то уравнения, определяющие ее центр $S(x_0, y_0)$, напишутся так:

$$\begin{aligned} Ax_0+By_0+D&=0,\\ Bx_0+Cy_0+E&=0. \end{aligned} \tag{10}$$

После переноса начала координат в центр S уравнение данной кривой примет вид:

$$A\tilde{x}^2+2B\tilde{x}\tilde{y}+C\tilde{y}^2+\tilde{F}=0, \tag{11}$$

где $\tilde{F}=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F$. Если применить тождество (2), то

$$\tilde{F}=(Ax_0+By_0+D)x_0+(Bx_0+Cy_0+E)y_0+(Dx_0+Ey_0+F).$$

При условии, что x_0, y_0 являются координатами центра кривой, учитывая (10), найдем:

$$\tilde{F}=Dx_0+Ey_0+F.$$

Чтобы получить уравнения (10) и (11), нужно в общем виде повторить выкладки, с помощью которых мы получили уравнения (6) и (7), когда рассматривали предыдущий пример.

116. Может случиться, что система уравнений (10) несовместна, т. е. не имеет решений. В таком случае у кривой центра нет. Тогда упрощение заданного уравнения следует проводить по другому плану.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0. \tag{12}$$

Решение. Составив уравнения (10)

$$\begin{aligned} 4x_0-2y_0-1&=0,\\ -2x_0+\ \ y_0-7&=0, \end{aligned}$$

видим, что полученная система несовместна. Значит, данная кривая не имеет центра и действовать как в п° 114 нельзя.

Поступим иначе. Не меняя начала координат, повернем оси на некоторый угол α. Согласно § 9 получим формулы соответствующего преобразования координат:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Перейдем в левой части уравнения (12) к новым координатам:

$$\begin{aligned}4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=(4\cos^2\alpha-4\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha)\,x'^2+\\ +2(-4\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)\,x'y'+\\ +(4\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)\,y'^2+\\ +2(-\cos\alpha-7\sin\alpha)\,x'+2(\sin\alpha-7\cos\alpha)\,y'+7.\end{aligned} \qquad (13)$$

Постараемся теперь подобрать угол α так, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль. Для этого нам придется решить тригонометрическое уравнение

$$-4\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=0.$$

Имеем

$$2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0,$$

или

$$2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha-3\,\mathrm{tg}\,\alpha-2=0.$$

Отсюда $\mathrm{tg}\,\alpha=2$ или $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{1}{2}$. Возьмем первое решение, что соответствует повороту осей на острый угол. Зная $\mathrm{tg}\,\alpha$, вычислим $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad \sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда и учитывая (13), находим уравнение данной кривой в системе x', y':

$$5y'^2-6\sqrt{5}x'-2\sqrt{5}y'+7=0. \qquad (14)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (14) производится при помощи параллельного перенесения осей Ox', Oy'.

Перепишем уравнение (14) следующим образом:

$$5\left(y'^2-2\frac{\sqrt{5}}{5}\,y'\right)-6\sqrt{5}\,x'+7=0.$$

Дополнив выражение в первой скобке до полного квадрата разности и компенсируя это дополнение надлежащим слагаемым, получим:

$$\left(y'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\frac{6\sqrt{5}}{5}\left(x'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=0.$$

Введем теперь еще новые координаты x'', y'', полагая

$$x'=x''+\frac{\sqrt{5}}{5},\qquad y'=y''+\frac{\sqrt{5}}{5},$$

что соответствует параллельному перемещению осей на величину $\frac{\sqrt{5}}{5}$ в направлении оси Ox' и на величину $\frac{\sqrt{5}}{5}$ в направлении оси

Oy'. В координатах x'', y'' уравнение данной линии примет вид:

$$y''^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''.$$

Это есть каноническое уравнение параболы с параметром $p = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ и с вершиной в начале координат системы x'', y''. Парабола расположена симметрично относительно оси x'' и бесконечно простирается в положительном направлении этой оси. Координаты вершины в системе x', y' суть $\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, а в системе x, y суть $\left(-\frac{1}{5};\ \frac{3}{5}\right)$. Расположение этой параболы показано на рис. 74.

117. Вернемся к системе уравнений (10), определяющих центр данной кривой:

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим через δ определитель этой системы:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Если $\delta \neq 0$, то система (10) имеет единственное решение (см. Приложение, § 1). В этом случае данная кривая второго порядка имеет единственный центр и называется *центральной*. К числу центральных кривых относятся эллипсы и гиперболы. Но может случиться, что при $\delta \neq 0$ данное уравнение приводится к каноническому виду, который сходен с каноническим уравнением эллипса или с каноническим уравнением гиперболы, однако не совпадает в полной мере ни с тем, ни с другим. Сейчас мы приведем примеры такого рода. Предварительно укажем, что в случае $\delta \neq 0$ общее уравнение второй степени всегда можно упростить, действуя в точности так, как было

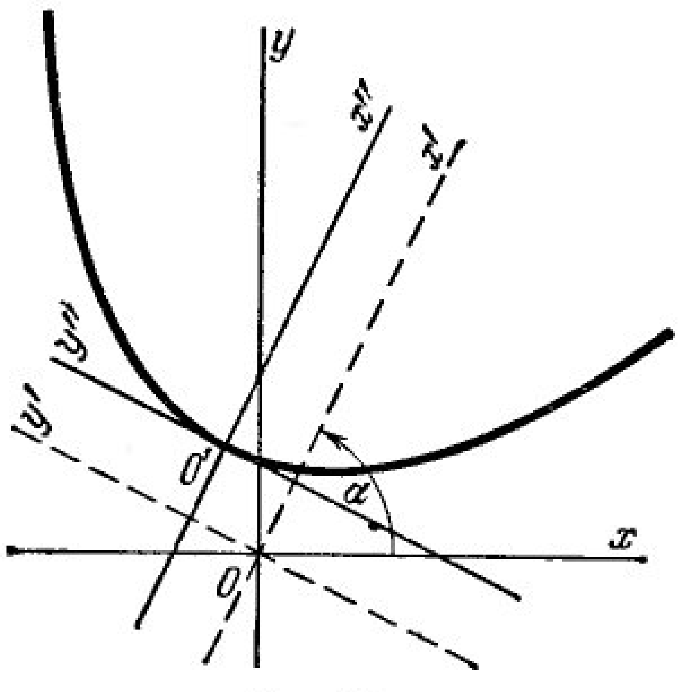

Рис. 74.

показано на примере в n° 114. Поэтому в приводимых далее примерах процесс преобразования не указывается.

Пример 1. Уравнение $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y+12=0$ ($\delta=9\neq 0$) приводится к каноническому виду $x'^2+4y'^2+4=0$, или

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=-1.$$

Это уравнение похоже на каноническое уравнение эллипса. Однако оно не определяет на плоскости никакого действительного образа, так как для любых действительных чисел x', y' левая часть его неотрицательна, а справа стоит -1. Такое уравнение и аналогичные ему называются уравнениями *мнимого эллипса*.

Пример 2. Уравнение $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y+4=0$ ($\delta=9\neq 0$) приводится к каноническому виду $x'^2+4y'^2=0$, или

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) также похоже на каноническое уравнение эллипса, но определяет не эллипс, а единственную точку: $x'=0$, $y'=0$. Такое

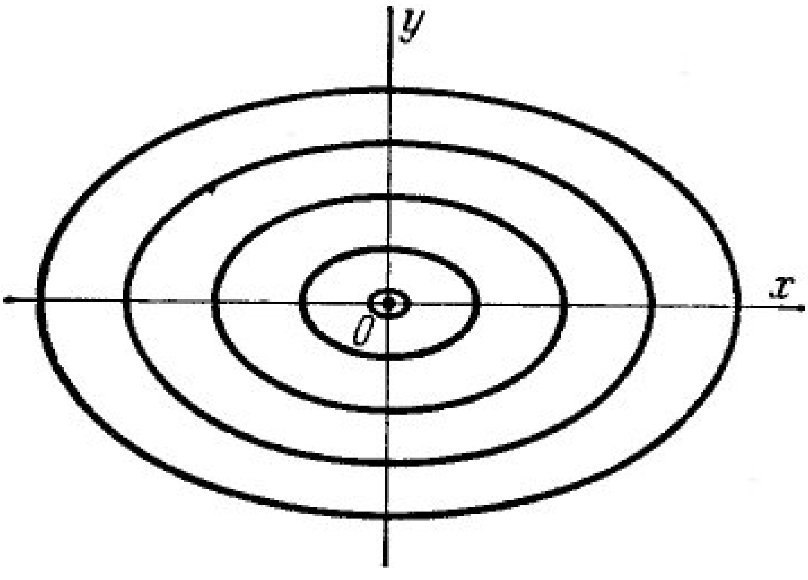

Рис. 75.

уравнение и аналогичные ему называются уравнениями *вырожденного эллипса*. Чтобы объяснить это название, рассмотрим уравнение

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=\varepsilon^2, \qquad (**)$$

где ε — какое-нибудь число ($\varepsilon>0$). Уравнение (**) определяет обыкновенный эллипс с полуосями $a=2\varepsilon$, $b=\varepsilon$. Представим себе, что ε стремится к нулю. Тогда $a\to 0$, $b\to 0$ и эллипс «вырождается» в точку (рис. 75). Вместе с тем и уравнение (**) превращается в уравнение (*).

Пример 3. Уравнение $3x^2+10xy+3y^2+16x+16y+16=0$ ($\delta=-16\neq 0$) приводится каноническому виду $x'^2-4y'^2=0$, или

$$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{1}=0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) похоже на каноническое уравнение гиперболы; оно определяет пару пересекающихся прямых: $x'-2y'=0$, $x'+2y'=0$. Такое уравнение и аналогичные ему называются уравнениями *вырожденной гиперболы*.

Чтобы объяснить это название, положим

$$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{1}=\varepsilon^2, \qquad (**)$$

где ε — какое-нибудь число ($\varepsilon>0$). Уравнение (**) определяет обыкновенную гиперболу с полуосями $a=2\varepsilon$, $b=\varepsilon$ и с вершинами на оси абсцисс. Представим себе, что ε стремится к нулю. Тогда $a\to 0$,

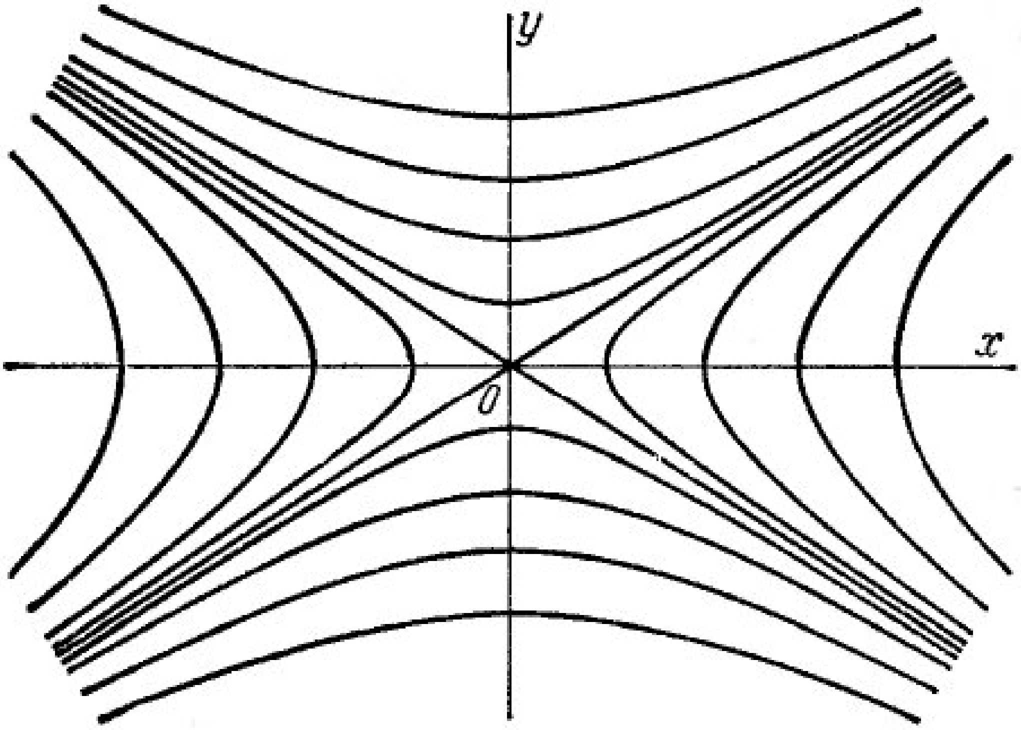

Рис. 76.

$b\to 0$, вершины гиперболы сближаются и гипербола «вырождается» в пару прямых, именно в пару своих асимптот. Вместе с тем и уравнение (**) превращается в уравнение (*). Если в уравнении (**) ε^2 заменить на $-\varepsilon^2$, то получим гиперболу с вершинами на оси ординат. Эта гипербола при $\varepsilon\to 0$ вырождается в ту же самую пару прямых (рис. 76).

Предположим теперь, что для данного общего уравнения второй степени имеем $\delta=0$. При условии $\delta=0$ возможны два случая:

1) Система уравнений (10) совсем не имеет решений; тогда кривая второго порядка не имеет центра. В этом случае данное уравнение всегда можно привести к каноническому виду так, как показано на примере в п° 116, причем в результате всегда будет получаться каноническое уравнение параболы.

2) Система уравнений (10) имеет бесконечно много решений, тогда данная линия второго порядка имеет бесконечно много центров.

Пример 4. Рассмотрим линию второго порядка

$$4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=0; \qquad (*)$$

для нее $\delta=0$. Система (10) в данном случае будет

$$4x_0-2y_0+2=0,$$
$$-2x_0+y_0-1=0.$$

Эта система равносильна одному уравнению $2x_0-y_0+1=0$, следовательно, линия имеет бесконечно много центров, составляющих прямую $2x-y+1=0$. Заметим, что левая часть данного уравнения разлагается на множители первой степени:

$$4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=$$
$$=(2x-y+3)(2x-y-1).$$

Значит, рассматриваемая линия есть пара параллельных прямых:

$$2x-y+3=0$$

и

$$2x-y-1=0.$$

Прямая $2x-y+1=0$, составленная из центров, представляет собой не что иное, как среднюю линию этой пары прямых (рис. 77).

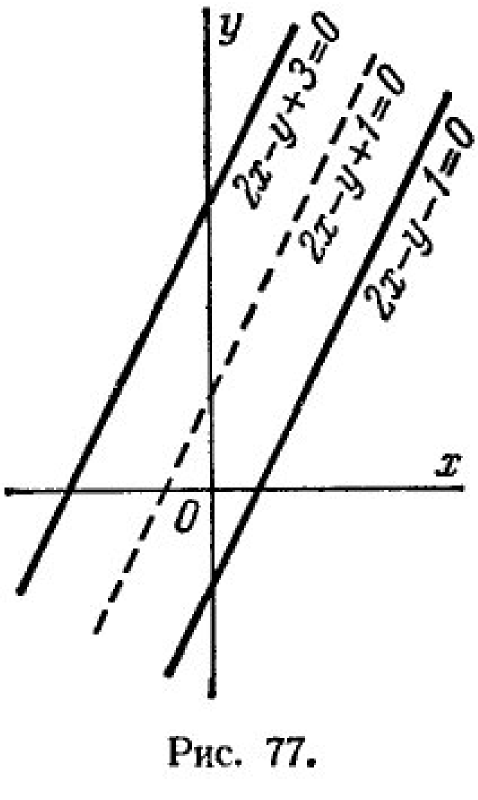

Рис. 77.

Чтобы упростить данное уравнение (*), можно действовать как в п° 116. Произведя преобразование левой части уравнения аналогично тому, как сделано в равенстве (13), и повторяя дальнейшие соображения и выкладки, найдем $\operatorname{tg}\alpha=2$. Повернув оси на угол α ($\operatorname{tg}\alpha=2$), приведем данное уравнение к виду

$$5y'^2-2\sqrt{5}\,y'-3=0;$$

отсюда

$$5\left(y'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-4=0.$$

Полагая $x'=x''$, $y'=y''+\frac{\sqrt{5}}{5}$, что соответствует параллельному перемещению осей Ox', Oy' на величину $\frac{\sqrt{5}}{5}$ в направлении оси Oy', получим, наконец:

$$5y''^2-4=0.$$

Мы снова видим, что заданное уравнение определяет пару параллельных прямых ($\sqrt{5}\,y''-2=0$ и $\sqrt{5}\,y''+2=0$ в последней координатной системе).

В том случае, когда уравнение второй степени определяет линию второго порядка с бесконечным множеством центров (как в последнем примере), принято говорить, что оно является уравнением *вырожденной параболы.*

118. Рассмотренные примеры убедительно показывают, что общее уравнение кривой второго порядка всегда можно привести к каноническому виду. Точное доказательство этого утверждения см., например, в нашей книге «Квадратичные формы и матрицы».

§ 42. Гипербола как график обратной пропорциональности. Парабола как график квадратного трехчлена

119. В математике и ее приложениях часто встречается уравнение вида $xy=m$, или $y=\frac{m}{x}$ ($m=\text{const}\neq 0$); оно называется *уравнением обратной пропорциональности величин x и y*. Нетрудно показать, что в декартовых прямоугольных координатах x, y *такое уравнение определяет равностороннюю гиперболу, асимптотами которой служат оси координат.*

В самом деле, повернем оси Ox и Oy на угол $\alpha=45°$. Тогда координаты всех точек плоскости преобразуются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Преобразуя уравнение $xy=m$ по формулам (1), получаем в новых координатах

$$\frac{x'^2}{2m}-\frac{y'^2}{2m}=1.$$

Мы видим, что это есть каноническое уравнение равносторонней гиперболы с полуосями $a=b=\sqrt{2|m|}$; асимптоты ее наклонены под углом 45° к новым координатным осям, следовательно, совпадают со старыми осями; если число m

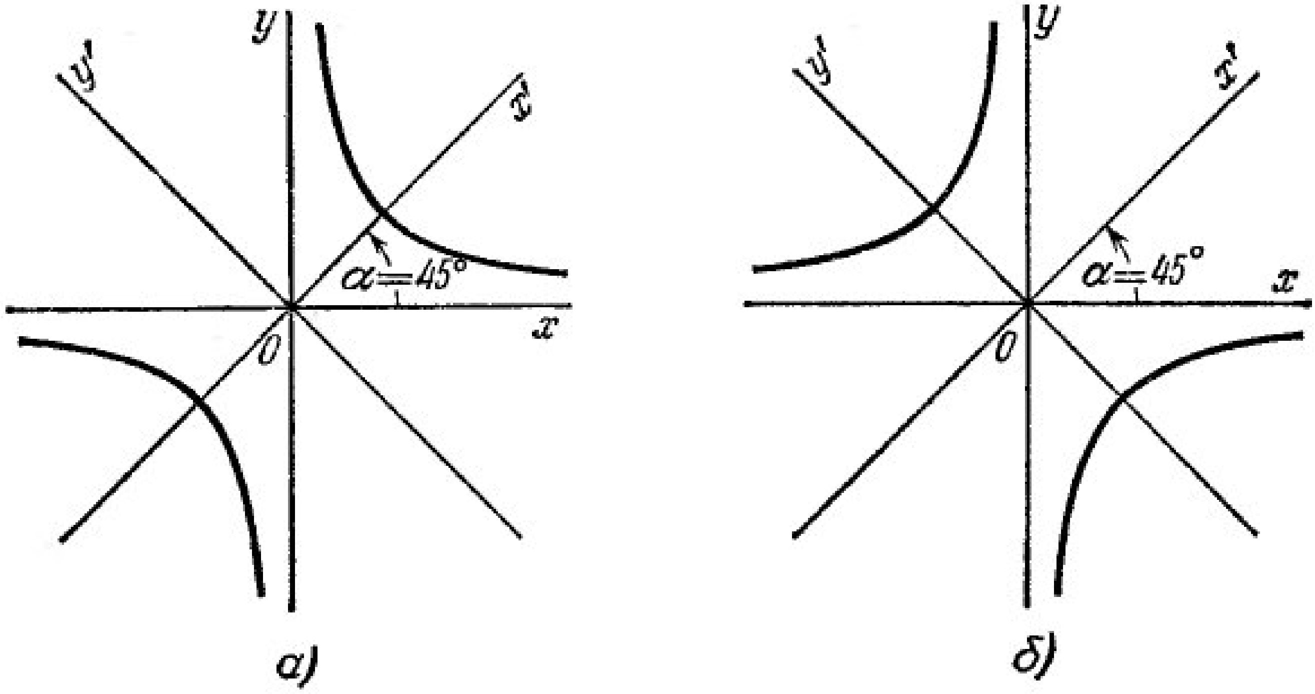

Рис. 78.

положительно, то рассматриваемая гипербола пересекает новую ось абсцисс, если m отрицательно, она пересекает новую ось ординат. Отсюда заключаем, что, как мы и утверждали, уравнение $xy=m$ определяет равностороннюю гиперболу, асимптоты которой совпадают с координатными осями; гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях, если $m>0$ (рис. 78, *а*), во второй и четвертой четвертях, если $m<0$ (рис. 78, *б*).

На основании изложенного мы можем также сказать, что *равносторонняя гипербола есть график обратной пропорциональности.*

120. Уравнение

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0) \tag{2}$$

определяет параболу, ось симметрии которой перпендикулярна к оси абсцисс; эта парабола будет восходящей, если $a>0$, нисходящей, если $a<0$.

Чтобы доказать сказанное, достаточно привести уравнение (2) к каноническому виду. С этой целью переделаем его запись следующим образом:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c,$$

или

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}, \quad (3)$$

или

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

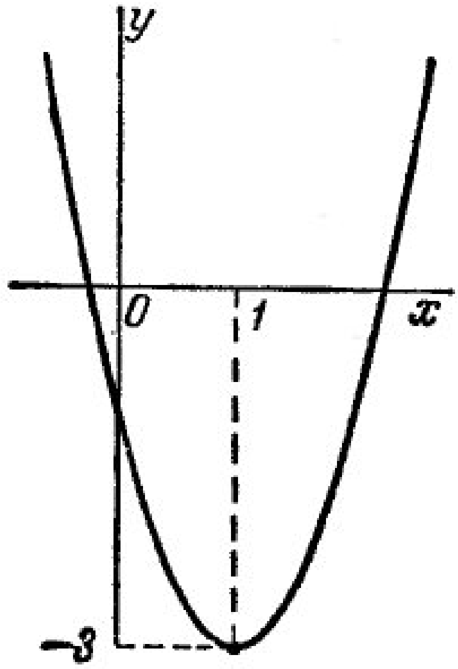

Рис. 79.

Перенесем теперь начало координат в точку $\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Тогда координаты всех точек плоскости преобразуются по формулам

$$x = \tilde{x} - \frac{b}{2a},$$
$$y = \tilde{y} + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

а уравнение (3) в новых координатах примет вид

$$\tilde{y} = a\tilde{x}^2,$$

или

$$\tilde{x}^2 = \pm 2p\tilde{y}, \quad (4)$$

где p есть положительное число, определяемое равенством $\pm p = \frac{1}{2a}$.

Мы получили каноническое уравнение параболы с вершиной в новом начале координат и расположенной симметрично относительно новой оси ординат. Эта парабола является восходящей или нисходящей в зависимости от того, будет ли число $a = \frac{1}{\pm 2p}$ положительно или отрицательно. Так как новая ось ординат перпендикулярна к старой оси абсцисс, то рассматриваемая парабола расположена именно так, как мы указали. Тем самым наше утверждение доказано.

121. Выражение ax^2+bx+c называется *квадратным трехчленом* от аргумента x. Соответственно этому мы можем сказать, что *парабола* (с вертикальной осью) *есть график квадратного трехчлена*.

Пример. Уравнение $y=2x^2-4x-1$ определяет восходящую параболу, так как $a=2>0$. Чтобы определить ее вершину, перепишем данное уравнение так: $y+3=2(x-1)^2$. Для приведения этого уравнения к каноническому виду нужно перенести начало координат в точку $(1; -3)$. Эта точка есть вершина рассматриваемой параболы (рис. 79).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА 7

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 43. Декартовы прямоугольные координаты в пространстве

122. Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек пространства заданием чисел, то говорят, что в пространстве введена система координат. Мы рассмотрим сейчас простейшую и наиболее употребительную систему координат, которая называется декартовой прямоугольной.

Декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-нибудь порядке (т. е. указано, какая из них считается первой, какая второй и какая третьей).

Точка пересечения осей называется *началом координат*, а сами оси — *координатными осями*, причем первую из них называют также *осью абсцисс*, вторую — *осью ординат*, третью — *осью аппликат*.

Обозначим начало координат буквой O, ось абсцисс — буквами Ox, ось ординат — буквами Oy и ось аппликат — буквами Oz. На чертежах буквы x, y, z ставятся около соответственных осей в положительном направлении от точки O в том месте, где изображения осей обрываются; таким образом, само расположение букв указывает, куда направлена каждая ось.

Пусть M — произвольная точка пространства; спроектируем точку M на координатные оси, т. е. опустим из M

перпендикуляры на прямые Ox, Oy и Oz. Основания этих перпендикуляров обозначим соответственно M_x M_y и M_z.

Координатами точки M в заданной системе называются числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z,$$

где OM_x *означает величину отрезка* $\overline{OM_x}$ *оси абсцисс,* OM_y — *величину отрезка* $\overline{OM_y}$ *оси ординат,* OM_z — *величину отрезка* $\overline{OM_z}$ *оси аппликат* (что такое величина отрезка оси, изложено в n° 2). *Число x называется первой координатой или абсциссой точки M, число y называется второй координатой или ординатой точки M, число z называется третьей координатой или аппликатой точки M.* В тексте координаты записываются в круглых скобках рядом с той буквой, которой помечена сама точка: $M(x; y; z)$.

Проекцию точки M на ось Ox можно получить также, если опустить из M перпендикуляр на плоскость Oxy, а затем из его основания, которое мы обозначим M_{xy}, опустить перпендикуляр на ось Ox; этот последний перпендикуляр и будет иметь своим основанием M_x; иначе говоря, M_x есть проекция на ось Ox точки M_{xy}. Проекция точки M_{xy} на ось Oy есть, очевидно, точка M_y.

Аналогично, если M_{xz} и M_{yz} — основания перпендикуляров, опущенных из M соответственно на плоскости Oxz и Oyz, то, проектируя M_{xz} и M_{yz} на координатные оси, мы получим точки M_x, M_y и M_z (каждая из точек M_x, M_y, M_z получается при этом двояким способом; например, точка M_x есть проекция на ось Ox как точки M_{xy}, так и точки M_{xz}).

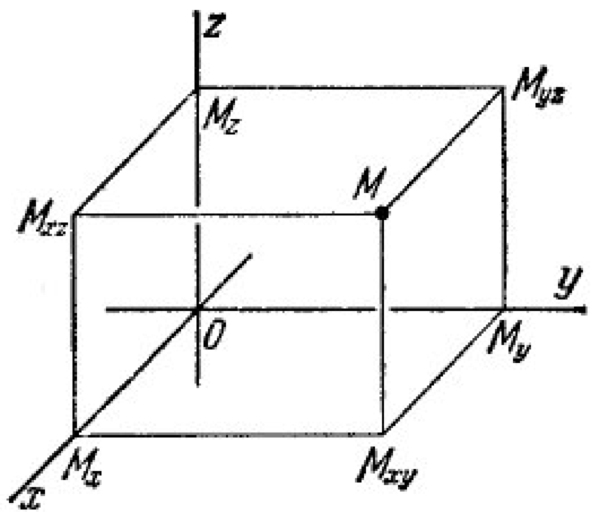

Рис. 80.

Точки M_x, M_y, M_z, M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} и O являются вершинами прямоугольного параллелепипеда, стороны которого, взятые с надлежащими знаками, суть координаты точки M. Этот параллелепипед изображен на рис. 80.

123. Если задана система декартовых прямоугольных координат, то каждая точка пространства в этой системе имеет одну вполне определенную тройку координат x, y, z. Обратно, каковы бы ни были три (вещественных) числа x, y, z, в пространстве найдется одна вполне определенная точка, абсцисса которой есть x, ордината есть y и аппликата есть z. Чтобы построить точку по ее координатам x, y, z, нужно на оси абсцисс отложить от начала координат отрезок $\overline{OM_x}$, величина которого равна x, на оси ординат — отрезок $\overline{OM_y}$, величина которого равна y, и на оси аппликат — отрезок $\overline{OM_z}$, величина которого равна z. После этого, проводя через M_x плоскость, перпендикулярную к оси Ox, через M_y — плоскость, перпендикулярную к оси Oy, и через M_z — плоскость, перпендикулярную к оси Oz, мы найдем искомую точку как точку пересечения проведенных плоскостей.

124. Условимся насчет некоторых терминов (считая, что оси даны как на рис. 80).

Плоскость Oyz разделяет все пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси Ox, мы назовем *ближним*, другое — *дальним*.

Точно так же плоскость Oxz разделяет пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси Oy, назовем *правым*, другое — *левым*.

Наконец, и плоскость Oxy разделяет все пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси Oz, назовем *верхним*, другое — *нижним*.

125. Пусть M — произвольная точка ближнего полупространства; тогда отрезок $\overline{OM_x}$ имеет на оси Ox положительное направление и, следовательно, абсцисса $x = OM_x$ точки M положительна. Если же M находится в дальнем полупространстве, то отрезок $\overline{OM_x}$ имеет на оси Ox отрицательное направление и число $x = OM_x$ отрицательно. Наконец, в том случае, когда точка M лежит на плоскости Oyz, ее проекция M_x на ось Ox совпадает с точкой O и $x = OM_x$ есть нуль.

Таким образом, *все точки ближнего полупространства имеют положительные абсциссы* ($x > 0$), *все точки дальнего полупространства имеют отрицательные абсциссы* ($x < 0$); *абсциссы точек, лежащих на плоскости Oyz, равны нулю* ($x = 0$).

Аналогично рассуждая, легко установить, что *все точки правого полупространства имеют положительные ординаты* ($y > 0$), *все точки левого полупространства имеют отрицательные ординаты* ($y < 0$); *ординаты точек, лежащих в плоскости* Oxz, *равны нулю* ($y = 0$).

Наконец, *все точки верхнего полупространства имеют положительные аппликаты* ($z > 0$), *все точки нижнего полупространства имеют отрицательные аппликаты* ($z < 0$); *аппликаты точек, лежащих в плоскости* Oxy, *равны нулю* ($z = 0$).

Принимая во внимание, что точки плоскости Oxz характеризуются равенством $y = 0$, а точки плоскости Oxy — равенством $z = 0$, заключаем, что *точки оси* Ox *характеризуются двумя равенствами*

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Аналогично, *точки оси* Oy *характеризуются двумя равенствами*

$$x = 0, \quad z = 0,$$

и *точки оси* Oz *характеризуются двумя равенствами*

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Заметим, что начало координат O как точка пересечения осей имеет все три координаты равными нулю: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и этим характеризуется (т. е. все три координаты равны нулю только для точки O).

126. Три плоскости Oxy, Oxz и Oyz вместе разделяют пространство на восемь частей: их называют *координатными октантами* и нумеруют по определенному правилу. Именно, первым октантом называют тот, который лежит одновременно в ближнем, правом и верхнем полупространствах, вторым — лежащий в дальнем, правом и верхнем полупространствах, третьим — лежащий в дальнем, левом и верхнем полупространствах, четвертым — лежащий в ближнем, левом и верхнем полупространствах; пятый, шестой, седьмой и восьмой октанты суть те, которые находятся в нижнем полупространстве соответственно под первым, вторым, третьим и четвертым.

Пусть M — некоторая точка с координатами x, y, z. Из предыдущего следует, что

если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то M лежит в первом октанте,
если $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$, то M лежит во втором октанте,
если $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$, то M лежит в третьем октанте,
если $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$, то M лежит в четвертом октанте,
если $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$, то M лежит в пятом октанте,
если $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$, то M лежит в шестом октанте,
если $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$, то M лежит в седьмом октанте,
если $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$, то M лежит в восьмом октанте.

Рассмотрение координатных полупространств и октантов полезно тем, что помогает легко ориентироваться в расположении заданных точек по знакам их координат.

§ 44. Понятие свободного вектора. Проекции вектора на ось

127. Из курса элементарной физики читателю известно, что некоторые физические величины, как, например, температура, масса, плотность, называют скалярными. Некоторые другие величины, как, например, сила, перемещение точки, скорость, ускорение, называют векторными.

Каждая скалярная величина может быть охарактеризована одним числом, которое выражает отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Напротив, для характеристики векторной величины одного числа недостаточно; это объясняется тем, что векторные величины, кроме размерности, обладают еще и направленностью.

Для отвлеченного выражения конкретных (физических) векторных величин служат геометрические векторы.

Геометрическими векторами, или просто *векторами,* называются направленные отрезки.

Геометрические векторы являются предметом так называемого векторного исчисления подобно тому, как числа являются предметом арифметики. В векторном исчислении над векторами производятся некоторые операции; они суть математические абстракции некоторых единообразных операций, производимых с различными конкретными векторными величинами в физике.

Возникшее для удовлетворения потребностей физики векторное исчисление оказалось плодотворным и внутри самой математики. В этой книге векторы используются как один из удобных инструментов аналитической геометрии.

Начальным сведениям из векторного исчисления посвящена следующая глава. В ближайших пунктах сообщаются только простейшие, чисто геометрические предложения о направленных отрезках в пространстве.

Однако представляется целесообразным уже здесь ввести некоторые понятия, обозначения и термины, принятые в векторном исчислении.

128. Вектор, как направленный отрезок, мы будем попрежнему записывать в тексте двумя большими латинскими буквами с общей чертой наверху, при условии, что первая буква обозначает начало, вторая — конец вектора. Но, кроме того, мы очень часто будем употреблять запись вектора одной малой латинской буквой жирного шрифта (например, $\boldsymbol{a}$). На чертеже вектор всегда будем изображать в виде стрелки; если вектор обозначен одной буквой, то на чертеже эту букву мы будем ставить около конца стрелки. Начало вектора мы часто будем называть также его *точкой*

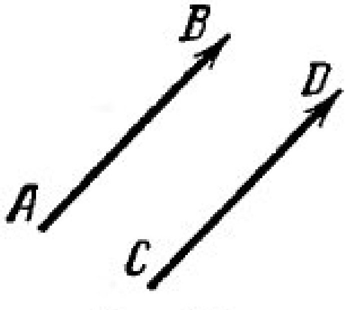

Рис. 81.

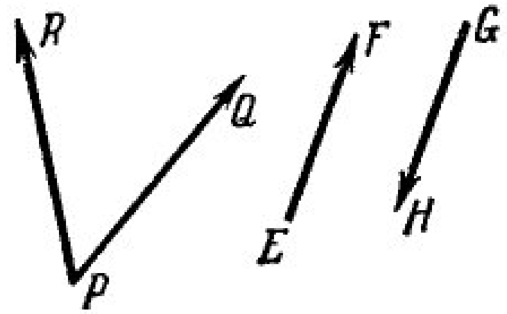

Рис. 82.

приложения. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым*. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

129. Определение равенства векторов. *Векторы называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковые направления.*

На рис. 81 изображены равные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ ($\overline{AB} = \overline{CD}$) *), на рис. 82 — неравные векторы $\overline{PQ}$ и $\overline{PR}$ ($\overline{PQ} \neq \overline{PR}$), $\overline{EF}$ и $\overline{GH}$ ($\overline{EF} \neq \overline{GH}$).

*) Мы предполагаем, что эти векторы лежат в плоскости чертежа.

Очевидно, *два вектора, порознь равные третьему, равны между собой.*

Из определения равенства векторов следует, что каковы бы ни были вектор $\boldsymbol{a}$ и точка P, существует, и притом только один, вектор $\overline{PQ}$ с началом в P, равный вектору $\boldsymbol{a}$; иначе говоря, для каждого вектора точка приложения может быть выбрана где угодно. Соответственно этому в геометрии векторы рассматривают с точностью до их положения (т. е. не различая равных векторов, получающихся друг из друга параллельным переносом). В этом смысле векторы называют *свободными.*

130. *Длина вектора* (при заданном масштабе) *называется его модулем.* Модуль нулевого вектора равен нулю. Для модуля вектора $\boldsymbol{a}$ пользуются обозначением $|\boldsymbol{a}|$ или a. Очевидно, если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, то $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$; обратное заключение, конечно, недопустимо.

131. Пусть даны произвольная ось u и некоторый вектор $\overline{AB}$.

Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось u и обозначим их основания соответственно через A' и B'. *Число $A'B'$, т. е. величина направленного отрезка $\overline{A'B'}$ оси u, есть проекция вектора AB на ось u*:

$$\text{пр}_u \overline{AB} = A'B'.$$

Построение проекции вектора $\overline{AB}$ на ось u показано на рис. 83, где для наглядности через точки A и B проведены плоскости α и β, перпендикулярные к оси u. Пересечением этих плоскостей с осью u определяются точки A' и B' (так как плоскости α и β перпендикулярны к оси u, то и прямые AA' и BB' перпендикулярны к этой оси).

132. Возьмем в пространстве произвольную точку S и проведем через нее два луча: один в направлении вектора $\overline{AB}$, другой — в направлении оси u (рис. 83). Угол φ, составленный этими лучами, называется *углом наклона* вектора $\overline{AB}$ к оси u. Очевидно, выбор точки S для построения угла φ безразличен. Очевидно также, что если мы заменим ось u другой осью, имеющей то же направление, то угол φ останется прежним. Обозначим через v ось, которая направлена так же, как ось u, и проходит через точку A. Согласно сказанному, угол наклона вектора AB к оси v

равен φ. Пусть C — точка, в которой ось v пересекает плоскость β. Так как ось v параллельна оси u, а эта последняя перпендикулярна к плоскости β, то и ось v перпендикулярна к плоскости β. Следовательно, AC есть проекция вектора $\overline{AB}$ на ось v. Далее, поскольку оси u и v

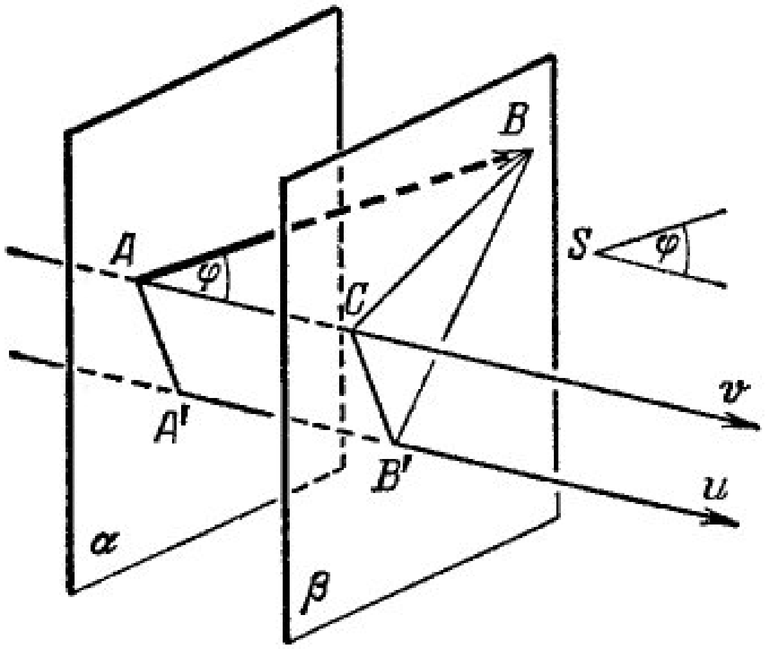

Рис. 83.

параллельны и одинаково направлены, их отрезки, заключенные между параллельными плоскостями α и β, имеют одинаковые величины: $A'B' = AC$. Отсюда

$$\text{пр}_u\overline{AB} = \text{пр}_v\overline{AB}. \qquad (1)$$

С другой стороны, так как вектор $\overline{AB}$ и ось v расположены в одной плоскости, мы вправе применить к ним формулу (7) n° 20; таким образом,

$$\text{пр}_v\overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi. \qquad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), находим:

$$\text{пр}_u\overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi. \qquad (3)$$

Если, ради краткости, обозначить вектор $\overline{AB}$ одной буквой $\boldsymbol{a}$, то формула (3) примет вид:

$$\text{пр}_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi. \qquad (4)$$

Итак, *проекция вектора на ось равна его модулю, умноженному на косинус угла наклона вектора к этой оси.*

133. Рассмотрим два равных вектора $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ и какую-нибудь ось u. Так как равные векторы имеют одинаковые модули и одинаковые углы наклона к оси u, то, применяя к каждому из них формулу (3), мы получим одинаковые результаты:

$$\text{пр}_u\overline{A_1B_1} = \text{пр}_u\overline{A_2B_2}.$$

Таким образом, *равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же ось.*

§ 45. Проекции вектора на оси координат

134. Мы предполагаем, что в пространстве задана некоторая система декартовых прямоугольных координат.

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{a}$. Пусть X обозначает проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ось Ox, Y — проекцию этого вектора на ось Oy и Z — проекцию его на ось Oz.

Согласно n° 133 каждый вектор, равный $\boldsymbol{a}$, имеет в качестве проекций на оси координат те же числа X, Y, Z.

Обратно, если некоторый вектор $\boldsymbol{b}$ имеет проекции на оси координат такие же, что и вектор $\boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$. Чтобы убедиться в этом, приложим оба вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ к началу координат; концы этих векторов при таком их расположении обозначим соответственно буквами A и B. Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют одну и ту же проекцию X на ось Ox, то ясно, что точки A и B должны лежать на одной плоскости, перпендикулярной к оси Ox, именно, на плоскости, которая отсекает на оси Ox отрезок величины X (считая от начала координат). По аналогичной причине точки A и B должны лежать на одной плоскости, перпендикулярной к оси Oy, именно на той, которая отсекает на оси Oy отрезок величины Y, а также на одной плоскости, перпендикулярной к оси Oz, именно на той, которая отсекает на оси Oz отрезок величины Z. Но в таком случае точки A и B необходимо совпадают, поскольку три указанные плоскости пересекаются в единственной точке. Следовательно,

$$\boldsymbol{b} = \overline{OB} = \overline{OA} = \boldsymbol{a}.$$

Сказанное сейчас означает, что *проекции вектора на оси координат, будучи заданы, вполне определяют его как* *свободный вектор*, т. е. с точностью до положения в пространстве. Поэтому проекции X, Y, Z вектора $\boldsymbol{a}$ называют его (декартовыми) *координатами*.

В дальнейшем, желая выразить, что вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты X, Y, Z, мы будем писать:

$$\boldsymbol{a}=\{X;\ Y;\ Z\},$$

рассматривая правую часть этого равенства как новый символ для обозначения вектора.

135. В аналитической геометрии часто приходится вычислять координаты вектора, т. е. проекции вектора на координатные оси, зная координаты его конца и начала. Эта задача решается следующей теоремой:

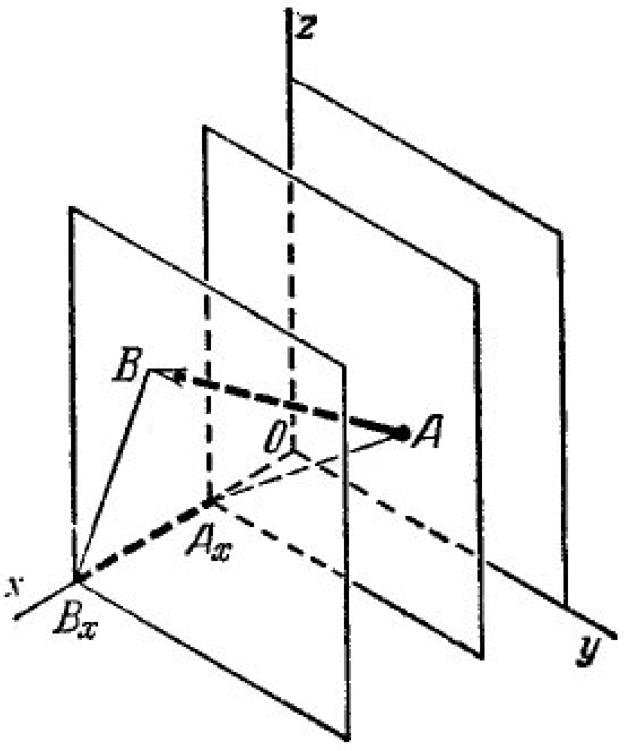

Рис. 84.

Теорема 15. *Каковы бы ни были две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, координаты вектора $\overline{AB}$ определяются формулами*

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1. \tag{1}$$

Доказательство. Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось Ox и обозначим их основания через A_x, B_x (см. рис. 84, где для наглядности через точки A и B проведены плоскости, перпендикулярные к оси Ox). Точки A_x и B_x имеют на оси Ox соответственно координаты x_1, x_2. Отсюда в силу теоремы 1 (n° 5)

$$A_xB_x=x_2-x_1.$$

Но $A_xB_x=X$, следовательно, $X=x_2-x_1$. Аналогично устанавливаются равенства: $Y=y_2-y_1$ и $Z=z_2-z_1$.

Таким образом, *чтобы получить координаты вектора, нужно от координат его конца отнять соответствующие координаты начала.*

136. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка пространства. Вектор $\boldsymbol{r}=\overline{OM}$, т. е. *вектор, идущий из начала координат в точку M, называется радиус-вектором этой точки.*

Вычисляя координаты вектора $\overline{OM}$ по формулам (1), именно, полагая в указанных формулах $x_2=x$, $y_2=y$, $z_2=z$, $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$, мы получим:

$$X=x,\ Y=y,\ Z=z,$$

т. е. *координаты точки M и координаты ее радиус-вектора $\overline{OM}$ суть одни и те же числа.* Заметим, однако, что последнее утверждение помимо формул (1) сразу вытекает из определения декартовых координат точки M (см. n° 122).

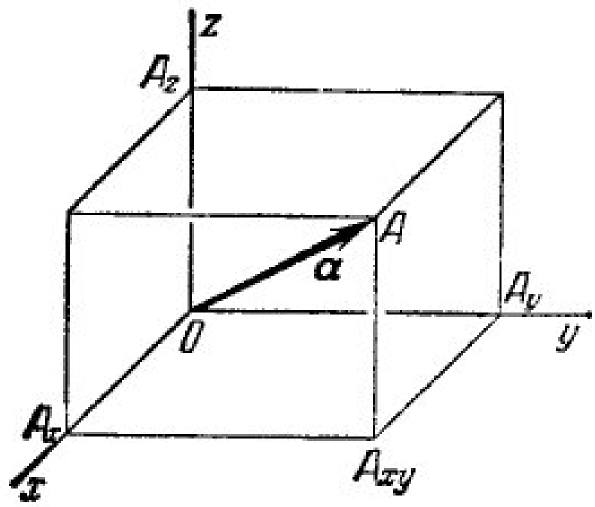

Рис. 85.

137. Пусть дан произвольный вектор $\boldsymbol{a}=\{X;\ Y;\ Z\}$. Мы установим сейчас формулу, которая позволит вычислять модуль вектора $\boldsymbol{a}$, зная координаты X, Y, Z этого вектора. Будем считать для простоты, что вектор $\boldsymbol{a}$ приложен к началу координат. Проведем через конец A вектора $\boldsymbol{a}$ плоскости, перпендикулярные к координатным осям; точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно A_x, A_y, A_z. Проведенные плоскости вместе с координатными плоскостями образуют прямоугольный параллелепипед, диагональю которого служит отрезок OA (рис. 85). Как известно из элементарной геометрии, квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его смежных сторон. Следовательно,

$$OA^2=OA_x^2+OA_y^2+OA_z^2.$$

Но $OA=|\boldsymbol{a}|$, $OA_x=X$, $OA_y=Y$, $OA_z=Z$; таким образом, из предыдущего равенства получаем:

$$|\boldsymbol{a}|^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

или

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{2}$$

Это и есть искомое выражение модуля произвольного вектора через его координаты.

§ 46. Направляющие косинусы

138. Обозначим через α, β, γ углы, которые составляет вектор $\boldsymbol{a}$ с осями координат; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$. Они называются направляющими косинусами вектора потому, что, будучи заданы, определяют его направление.

Если заданы не только направляющие косинусы, но и модуль вектора, то тем самым вектор определен вполне (как свободный вектор). В этом случае *координаты вектора могут быть вычислены по формулам:*

$$\left.\begin{aligned} X &= |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \\ Y &= |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \\ Z &= |\boldsymbol{a}|\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

которые имеют место согласно n° 132.

139. Изложенное в предыдущих двух пунктах мы резюмируем в виде следующей теоремы:

Теорема 16. *Каким бы ни был вектор* $\boldsymbol{a}$, *его модуль* $|\boldsymbol{a}|$, *направляющие косинусы* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *и координаты* X, Y, Z *связаны соотношениями:*

$$X = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \quad Z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma, \qquad (1)$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \qquad (2)$$

Замечание. *Последние четыре формулы позволяют вычислить направляющие косинусы вектора, зная координаты этого вектора.* В самом деле, из этих формул следует, что

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь корни понимаются арифметически (как всегда, когда перед корнем не указаны знаки).

140. Возводя в квадрат левую и правую части каждого из равенств (3) и суммируя полученные результаты, найдем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2};$$

отсюда

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (4)$$

При помощи соотношения (4) *можно вычислить любой из углов* α, β, γ, *зная два других и, кроме того, зная, является ли искомый угол острым или тупым.*

§ 47. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

141. В аналитической геометрии пространства, как и в аналитической геометрии плоскости, каждая задача, какой бы сложной она ни была, сводится к некоторым простейшим задачам. Таковыми являются: задача определения расстояния между двумя данными точками, задача о делении отрезка в данном отношении, задача вычисления угла между двумя векторами и т. п. В этом параграфе мы рассмотрим первые две из перечисленных задач.

142. Пусть даны две произвольные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и требуется вычислить расстояние d между ними.

Искомый результат получается сразу при помощи теоремы 15 (n° 135) и формулы (2) предыдущего параграфа.

В самом деле, мы имеем:

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\};$$

далее, d есть модуль вектора $\overline{M_1M_2}$, следовательно,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1)$$

Эта формула и дает решение задачи.

143. Пусть даны две произвольные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и требуется на прямой M_1M_2 найти точку M, делящую отрезок $\overline{M_1M_2}$ в заданном отношении λ.

Эта задача решается аналогично тому, как соответствующая задача в аналитической геометрии плоскости (см. п° 24). Поэтому мы сразу приведем готовый результат: *если x, y, z — координаты искомой точки M, то*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, *координаты середины данного отрезка получаются отсюда при $\lambda = 1$*:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

144. Для решения других простейших задач пространственной аналитической геометрии удобно применять некоторые особые операции над векторами, которые называются сложением векторов, умножением вектора на число, скалярным умножением векторов и векторным умножением векторов. Определение и основные свойства этих операций будут изложены в ближайших трех главах.

ГЛАВА 8

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

§ 48. Определение линейных операций

145. Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения векторов на числа.

Определение суммы двух векторов. *Пусть даны два вектора* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$. *Суммой* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *называется вектор, который идет из начала вектора* $\boldsymbol{a}$ *в конец вектора* $\boldsymbol{b}$, *при условии, что вектор* $\boldsymbol{b}$ *приложен к концу вектора* $\boldsymbol{a}$.

Построение суммы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ изображено на рис. 86. Правило сложения векторов, которое содержится в этом определении, обычно называют «правилом треугольника».

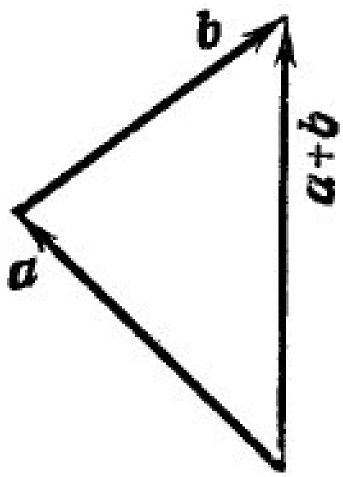

Рис. 86.

Замечание. Может случиться, что при построении суммы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ по правилу треугольника конец вектора $\boldsymbol{b}$ окажется совпавшим с началом вектора $\boldsymbol{a}$; тогда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ есть нулевой вектор: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$.

Определение произведения вектора на число. *Пусть даны вектор* $\boldsymbol{a}$ *и число* α. *Обозначим их модули соответственно через* $|\boldsymbol{a}|$ *и* $|\alpha|$. *Произведением* $\alpha\boldsymbol{a}$ *(или* $\boldsymbol{a}\alpha$*) называется вектор, который коллинеарен вектору* $\boldsymbol{a}$, *имеет длину, равную* $|\boldsymbol{a}|\cdot|\alpha|$, *и направление такое же, как у вектора* $\boldsymbol{a}$, *если* $\alpha>0$, *и противоположное, если* $\alpha<0$.

Операция построения вектора $\alpha\boldsymbol{a}$ называется *умножением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* α.

Замечание 1. Если $\boldsymbol{a}=0$ или $\alpha=0$, то произведение имеет модуль, равный нулю, и, следовательно, представляет собой нулевой вектор. В этом случае направление произведения $\alpha\boldsymbol{a}$ является неопределенным.

Замечание 2. Смысл операции умножения вектора на число можно выразить наглядно следующим образом: *при умножении вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* α *вектор* $\boldsymbol{a}$ *«растягивается» в* α *«раз».* Конечно, это выражение условно; например, если $\alpha=\frac{1}{2}$, то «растяжение» в α «раз» по существу означает уменьшение длины $\boldsymbol{a}$ в два раза; если α — число отрицательное, то «растяжение» в α «раз» следует понимать как такое изменение вектора, при котором этот вектор удлиняется в $|\alpha|$ раз («модуль α раз») и меняет свое направление на противоположное.

§ 49. Основные свойства линейных операций

146. Мы установим сейчас основные свойства линейных операций, которыми приходится пользоваться в векторном исчислении.

Прежде всего мы покажем, что *сумма любых двух векторов не зависит от порядка слагаемых.*

С этой целью рассмотрим два произвольных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Так как геометрические векторы суть свободные векторы, то мы можем $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ приложить к одной точке O, выбрав ее произвольно. Обозначим концы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ при таком их расположении буквами A и B (рис. 87). Приложим теперь вектор $\boldsymbol{b}$ к точке A, обозначим конец его (при новом расположении) буквой C и соединим точку B с точкой C отрезком. Очевидно, вектор $\overline{BC}$ имеет такую же длину и так же направлен, как вектор $\overline{OA}$; следовательно, $\overline{BC}=\boldsymbol{a}$.

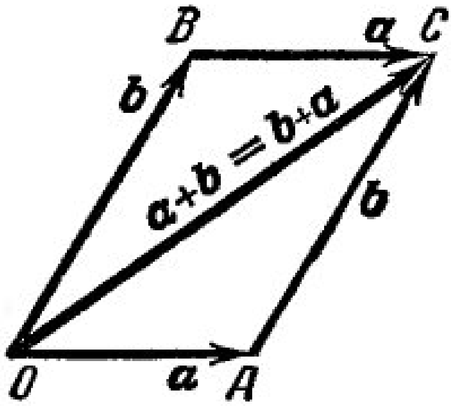

Рис. 87.

Рассматривая фигуру OAC и вспоминая правило сложения векторов («правило треугольника»), найдем, что $\overline{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. С другой стороны, рассматривая фигуру OBC, согласно тому же правилу найдем, что $\overline{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. Отсюда

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

и утверждение доказано.

Свойство векторного сложения, выраженное тождеством (1), называется *переместительным*.

Замечание. Фигуру $OABC$ называют *параллелограммом, построенным на векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ с общим началом O, вектор $\overline{OC}$ — его диагональю (так говорят даже и в том случае, когда $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$ лежат на одной прямой, т. е. когда $OABC$ не является параллелограммом в собственном смысле слова). На основании изложенного правило сложения векторов можно высказать в новой формулировке:

Если векторы $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *(или* $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$*) есть диагональ этого параллелограмма, идущая из общего начала* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

Высказанное в таком виде правило сложения векторов называется «правилом параллелограмма».

147. После того, как определена сумма двух векторов, естественным образом можно определить сумму любого числа векторных слагаемых.

Пусть, например, нам даны три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Сложив $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, мы получим вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Прибавим теперь к нему вектор $\boldsymbol{c}$; у нас получится вектор $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$. Наряду с этим мы можем построить также вектор $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, т. е. к вектору $\boldsymbol{a}$ прибавить сумму $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

Нетрудно убедиться в том, что, *каковы бы ни были три вектора* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *всегда имеет место равенство*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{2}$$

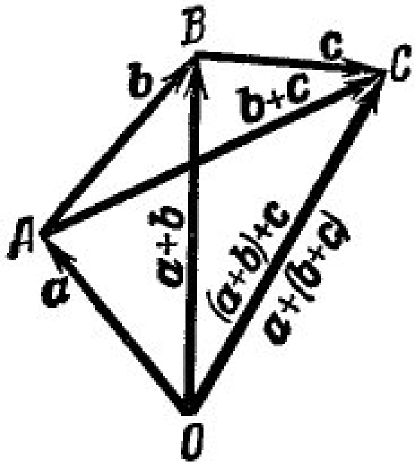

Рис. 88.

Свойство векторного сложения, выраженное тождеством (2), называется *сочетательным*.

Чтобы доказать сочетательное свойство, расположим рассматриваемые векторы так, чтобы вектор $\boldsymbol{b}$ был приложен к концу вектора $\boldsymbol{a}$, а вектор $\boldsymbol{c}$ — к концу вектора $\boldsymbol{b}$. При этом их расположении обозначим буквой O начало вектора $\boldsymbol{a}$, буквой A — его конец, буквой B — конец вектора $\boldsymbol{b}$ и буквой C — конец вектора $\boldsymbol{c}$ (рис. 88). Тогда

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}.$$

Следовательно,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

что и требовалось доказать.

На основании сочетательного свойства сложения векторов мы имеем право говорить о сумме трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и записывать ее в виде $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, не указывая при этом, считаем ли мы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ или $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Аналогичным образом может быть определена сумма четырех, пяти, вообще, любого числа векторных слагаемых.

Практически построение суммы нескольких векторов нет надобности выполнять последовательно, фиксируя каждый промежуточный результат; сумма любого числа векторов может быть построена сразу при помощи следующего правила.

Общее правило сложения векторов. *Чтобы построить сумму векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, *нужно к концу вектора* $\boldsymbol{a}_1$ *приложить вектор* $\boldsymbol{a}_2$, *затем к концу вектора* $\boldsymbol{a}_2$ *приложить вектор* $\boldsymbol{a}_3$, *затем к концу вектора* $\boldsymbol{a}_3$ *приложить вектор* $\boldsymbol{a}_4$ *и т. д., пока не дойдем до вектора* $\boldsymbol{a}_n$. *Тогда суммой* $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n$ *будет вектор, идущий из начала вектора* $\boldsymbol{a}_1$ *в конец вектора* $\boldsymbol{a}_n$.

Обозначим буквой O начало вектора $\boldsymbol{a}_1$, буквами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — соответственно концы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, расположенных согласно только что сформулированному правилу. Фигура $OA_1A_2\ldots A_n$ называется ломаной с векторными звеньями $\overline{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$, $\overline{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$, $\ldots$, $\overline{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$; вектор $\overline{OA_n}$ называется замыкающим ломаную $OA_1A_2\ldots A_n$. Так как

$$\overline{OA_n}=\overline{OA_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\ldots$$
$$\ldots+\overline{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n,$$

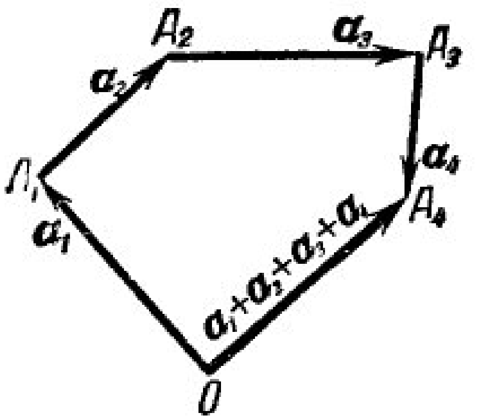

Рис. 89.

то в соответствии с этим говорят, что *построение суммы нескольких векторов производится при помощи замыкания ломаной* (на рис. 89 изображено построение суммы четырех слагаемых).

Замечание. В n° 146 мы установили, что сумма двух векторов не зависит от порядка слагаемых. Отсюда и из сочетательности сложения векторов следует, что *сумма лю-*