

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 7. Контрольная работа 1.

Задачи 7, 17, 27, 37, 47.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№7

$\bar{a}(1;-2;3), \bar{b}(4;7;2), \bar{c}(6;4;2), \bar{d}(14;18;6)$

$$\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 24 + 48 - 126 * 8 + 16 = -80 \neq 0$$

Следовательно, вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис. Найдём координаты вектора \bar{d} в этом базисе по формулам:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 e_1^1 + a_2 e_2^1 + a_3 e_3^1 \\ \alpha_2 = a_1 e_1^2 + a_2 e_2^2 + a_3 e_3^2 \\ \alpha_3 = a_1 e_1^3 + a_2 e_2^2 + a_3 e_3^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14 = a_1 + 4a_2 + 6a_3 \\ 18 = -2a_1 + 7a_2 + 4a_3 \\ 6 = 3a_1 + 2a_2 + 2a_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 48 - 24 - 126 - 8 + 16 = -80$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 4 & 6 \\ 18 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 196 + 96 + 216 - 252 - 112 - 144 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 6 \\ -2 & 18 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 36 + 168 - 72 - 324 - 24 + 562 = -160$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 14 \\ -2 & 7 & 18 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 42 + 216 - 56 - 294 - 36 + 48 = -80$$

По формуле Крамера:

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-80} = 0; \quad a_2 = \frac{-160}{-80} = 2; \quad a_3 = \frac{-80}{-80} = 1$$

Координаты вектора \bar{d} в базисе $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

(0;2;1).

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 7. Контрольная работа 1.

Задачи 7, 17, 27, 37, 47.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№17

$A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3)$

1) Длина ребра A_1A_2

$$|A_1A_2| = \sqrt{(4-6)^2 + (9-6)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,6056$$

2) Угол между A_1A_2 и A_1A_4

$$\cos \alpha = \frac{\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_4}}{|\overline{A_1A_2}| |\overline{A_1A_4}|}$$

$$\overline{A_1A_2} = (-2;3;0); \quad |\overline{A_1A_2}| = \sqrt{13}$$

$$\overline{A_1A_4} = (0;3;-2); \quad |\overline{A_1A_4}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_4} = -2 * 0 + 3 * 3 + 0 * (-2) = 9$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{9}{13}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{9}{13}\right) = \arccos 0,6923 = 51^\circ 19'$$

3) Угол между ребрами A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$. Выполним сначала пункт 7) Найдём уравнение грани $A_1A_2A_3$.

Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка этой плоскости.

$$\overline{A_1M} = (x-6, y-6, z-5)$$

$$\overline{A_1A_2} = (-2, 3, 0)$$

$$\overline{A_1A_3} = (-2, 0, 6)$$

$$\overline{AM} * \overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} x-6 & y-6 & z-5 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (x-6) * 18 - (y-6)(-12) + (z-5) * 6 =$$

$$= 18x - 108 + 12y - 72 + 6z - 30 = 0$$

$$18x + 12y + 6z - 210 = 0$$

$$6x + 4y + 2z - 70 = 0 - \text{уравнение плоскости } A_1A_2A_3.$$

$$3x + 2y + z - 35 = 0$$

$$n = (3;2;1)$$

$$\sin A_1A_4 \ A_1A_2A_3 = \frac{\overline{A_1A_4} * \vec{n}}{|\overline{A_1A_4}| * |\vec{n}|}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{18^2 + 12^2 + 6^2} = \sqrt{504}$$

$$\overline{A_1A_4} * \vec{n} = 0 * 18 + 3 * 12 + (-2) * 6 = 24$$

$$|\overline{A_1A_4}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\sin A_1A_4 \ A_1A_2A_3 = \frac{24}{\sqrt{13} \sqrt{504}} = 0,2965$$

$$A_1A_4 \quad A_1A_2A_3 = \arcsin 0,2965 = 19^\circ 9'$$

$$4) S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \left| \overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3} \right| = \frac{1}{2} |\vec{n}| = \frac{1}{2} \sqrt{504} = 11,22$$

$$5) V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6} \left| \overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3} * \overline{A_1A_4} \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |0 - 36 + 12 - 0 - 0 - 0| = \frac{1}{6} * 24 = 4 \text{ куб.ед.}$$

б) Уравнение прямой A_1A_2 :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-6}{4-6} = \frac{y-6}{9-6} = \frac{z-5}{5-5} \quad \text{или}$$

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-5}{0}$$

7) Теперь найдём уравнение прямой A_1A_4 .

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \text{ где } (x_1, y_1, z_1) - \text{ координаты } A_1$$

$(x_2, y_2, z_2) - \text{ координаты } A_4$

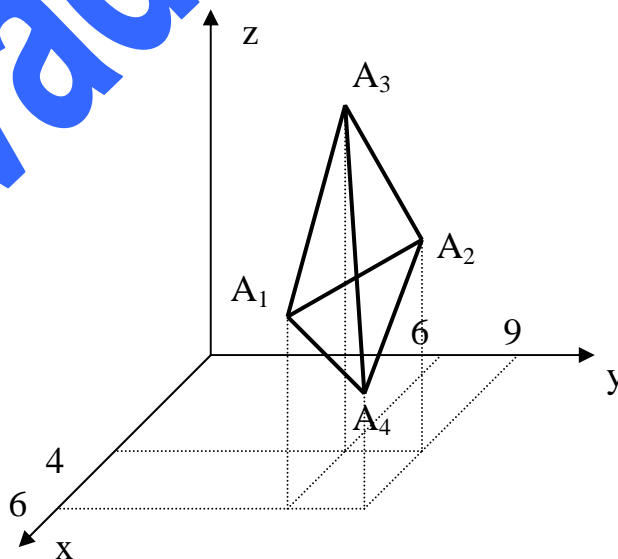
$$\frac{x-6}{3} = \frac{y-9}{2} = \frac{z-3}{1};$$

8) Уравнение высоты :

$$\frac{x-x_4}{A} = \frac{y-y_4}{B} = \frac{z-z_4}{C}$$

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y-9}{2} = \frac{z-3}{1}$$

Чертёж :

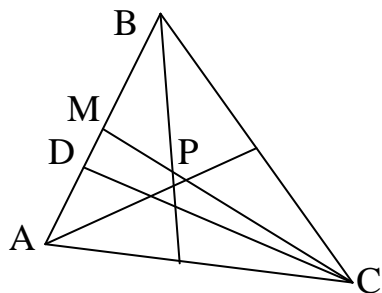


Высшая математика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 7. Контрольная работа 1.

Задачи 7, 17, 27, 37, 47.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№27



$A(2;-2)$, $B(3;-1)$, $P(1;0)$

Найдём координаты точки М

$$x_M = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}; \quad y_M = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$M\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

$$2\overline{MP} = \overline{PC}$$

$$\overline{PC} = \left(2\left(1 - \frac{5}{2}\right); 2\left(0 + \frac{3}{2}\right)\right) = (-3; 3)$$

$$C - P = (-3; 3) \Rightarrow C = (1; 0) + (-3; 3) = (-2; 3)$$

Уравнение АВ:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+2}{-1+2}$$

$$x-2 = y+2$$

$$y = x - 4 \Rightarrow k_1 = 1$$

Уравнение высоты CD будем искать в виде $y = k_2x + b$. В силу перпендикулярности:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -1. \quad \text{Т.к. } C \text{ лежит на высоте } CD, \text{ то}$$

$$3 = 2 + b \Rightarrow b = 1$$

Искомое уравнение: $y = -x + 1$.

<http://www.kvadromir.com> - физика и математика для заочников

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 7. Контрольная работа 1.

Задачи 7, 17, 27, 37, 47.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№37

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка искомой линии.

$$|AM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

$$d = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y - 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} - \text{расстояние от } M \text{ до прямой}$$

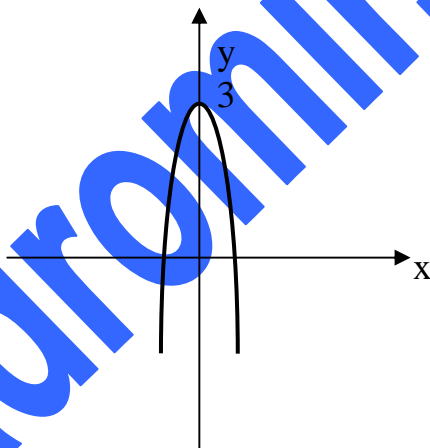
По условию задачи $|AM| = d$, т.е.

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = y - 4$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - 8y + 16$$

$$x^2 + 4y - 12 = 0 - \text{уравнение искомой линии.}$$

$$y = \frac{12 - x^2}{4} = 3 - \frac{1}{4}x^2$$



<http://www.kvadromir.com> - физика и математика для заочников

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 7. Контрольная работа 1.

Задачи 7, 17, 27, 37, 47.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№47

$$r = \frac{10}{2 + \cos \phi}$$

1)

ϕ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π	$9\pi/8$	$5\pi/4$	$11\pi/8$	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$	2π
r	3,5	3,4	3,7	4,2	5	6,2	8,7	9,1	10	9,1	8,7	6,2	5	4,2	3,7	3,4	3,5

$$2) \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \Rightarrow r = \frac{y}{\sin \phi} = \frac{y}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}} = \frac{y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}}$$

$$r^2 = \frac{y^2}{1 - \frac{x^2}{r^2}} \Rightarrow r^2 - x^2 = y^2$$

$$r = \sqrt{y^2 + x^2}$$

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

$$\text{Получаем: } \sqrt{y^2 + x^2} = \frac{10}{2 + \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}}$$

$$3) 2\sqrt{y^2 + x^2} + x = 10$$

$$2\sqrt{y^2 + x^2} = 10 - x$$

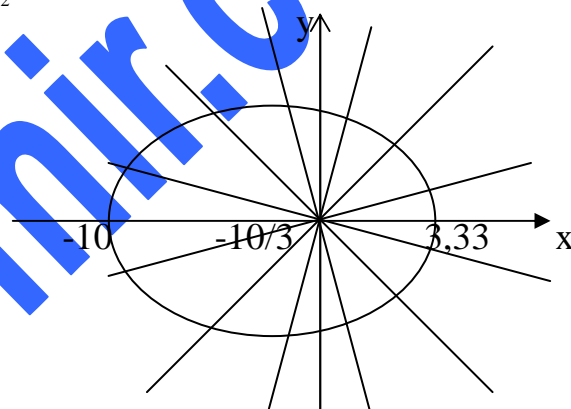
$$4y^2 + 4x^2 = 100 - 20x + x^2$$

$$4y^2 + 3x^2 + 20x - 100 = 0$$

$$4y^2 + 3\left(x^2 + \frac{20}{3}x\right) - 100 = 0$$

$$4y^2 + 3\left(x^2 + \frac{20}{3}x + \frac{100}{9} - \frac{100}{9}\right) - 100 = 0$$

$$4y^2 + 3\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{100}{3} - 100 = 0$$



$$4y^2 + 3\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{400}{3}$$

$$\text{Эллипс } \frac{y^2}{\frac{100}{3}} + \frac{\left(x + \frac{10}{3}\right)^2}{\frac{400}{9}} = 1$$

$$a = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{10}{3}; \quad b = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

<http://www.kvadromir.com> - физика и математика для заочников