Высшая метаматика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 5. Контрольная работа 1.

Задачи 5, 15, 25, 35, 45.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№5

a(2;4;1); b(1;3;6); c(5;3;1); d(24;20;6)

$$\overline{a}*\overline{b}*\overline{c}=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 6\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=6+3+120-15-4-36=74\neq 0$$

Следовательно, $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис.

Координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе

$$\alpha_1=a_1e_1^1+a_2e_2^1+a_3e_3^1$$

$$\alpha_2=a_1e_1^2+a_2e_2^2+a_3e_3^2$$

$$\alpha_3=a_1e_1^3+a_2e_2^3+a_3e_3^3$$

$$\begin{cases}24=2a_1+a_2+5a_3\\ 20=4a_1+3a_2+3a_3\\ 6=a_1+6a_2+a_3\end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ 4 & 3 & 3\\ 1 & 6 & 1\end{vmatrix}=6+3+120-15-4-36=74$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}24 & 1 & 5\\ 20 & 3 & 3\\ 6 & 6 & 1\end{vmatrix}=72+600+18-19-20-432=148$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 24 & 5\\ 4 & 20 & 3\\ 1 & 6 & 1\end{vmatrix}=40+120+72-100-96-36=0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 24\\ 4 & 3 & 20\\ 1 & 6 & 6\end{vmatrix}=36+576+20-72-24-240=296$$

$$a_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{148}{74}=2;\quad a_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{74}=0;\quad a_3=\frac{296}{74}=4$$

Координаты вектора $\overline{d}$ в базисе $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ $\overline{d}(2;0;4)$

№15

Даны координаты вершин пирамиды A(1;6;6), A_2(-2;8;2), A_3(6;8;9), A_4(7;10;3)

Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4; 3)угол между рёбрами A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

4) Площадь грани $A_1A_2A_3$;

5) Объём пирамиды;

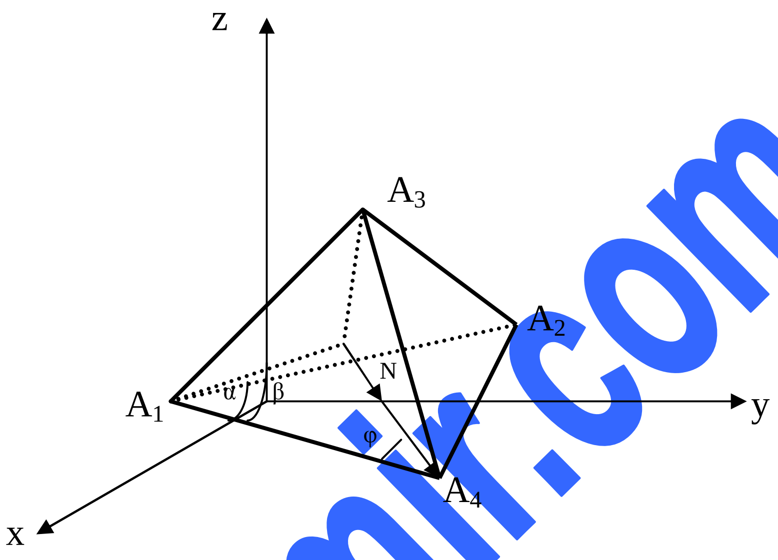
6) Уравнение прямой A_1A_2;

7) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

8) Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$

Сделать чертёж.

Решение:



1) Вектор $\overline{A_1A_2}$ лежит на ребре пирамиды A_1A_2, тогда его координаты будут равны

$\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

Длину вектора A_1A_2 вычисляют по формуле $\overline{A_1A_2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (-2-10; 8-6; 2-6) = (-12; 2; -4)$ координаты вектора $\overline{A_1A_2}$.

Находим длину $\left|\overline{A_1A_2}\right|$:

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$$

Длина ребра $A_1A_2 = 2\sqrt{41}$ ед. длины.

2) Вектор $\overline{A_1A_4}$ пренадлежит отрезку A_1A_4, тогда по определению скалярного произведения:

$\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_4} = \left|\overline{A_1A_2}\right| * \left|\overline{A_1A_4}\right| * \cos\alpha$, где α - угол между векторами $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_4}$

$\overline{A_1A_2}(-12;2;-4)$. Найдём координаты вектора:

$\overline{A_1A_4} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (7-10;10-6;3-6) = (-3;4;-3)$

$\overline{A_1A_4}(-3;4;-3)$

$\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_4} = (-12)(-3) + 2*4 + (-4)(-3) = 36 + 8 + 12 = 56.$

$\left|\overline{A_1A_2}\right| = 2\sqrt{41}(см.п.1)$ $\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$

Итак $56 = 2\sqrt{41} * \sqrt{34} * \cos\alpha,$

$$\cos\alpha = \frac{56}{2\sqrt{41} * \sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{41} * \sqrt{34}} \approx 0,75$$

Отсюда $\alpha = \arccos 0,75 = 41,41^o = 41^o 25'$

Угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4 равен $41,41^o$

3) Возмём вектор A_1A_3 принадлежащий отрезку A_1A_3 и найдём его координаты

$\overline{A_1A_3} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (6-10;8-6;9-6) = (-4;2;3)$

$\overline{A_1A_3}(-4;2;3)$

Результатом вектороного произведения $\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3}$ является вектор $\overline{N}$, перпендикулрный одновременно и плоскости, проходящей через точки $A_1A_2A_3$, т.е. грани $A_1A_2A_3$

$$\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 14\overline{i} + 52\overline{j} - 16\overline{k},$

т.е.

$\overline{N}(14;52;-16)$

Из определения скалярного произведения векторов:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A_1A_4} * \overline{N}}{\left|\overline{A_1A_4}\right| * \left|\overline{N}\right|}, где$$

φ угол между векторами $\overline{A_1A_4}$ и $\overline{N}$.

С учётом того, что $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}$ и $\overline{N}$ образуют правую тройку векторов будет равен $\beta = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, тогда с учётом, что

$$\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \sin\beta$$

Находим

$$\sin\beta = \frac{\overline{A_1A_4} * \overline{N}}{\left|\overline{A_1A_4}\right| * \left|\overline{N}\right|} = \frac{(-3;4;-3)(14;52;-16)}{\sqrt{34} * \sqrt{14^2+52^2+16^2}} =$$

$$= \frac{(-42+208+48)}{\sqrt{34} * \sqrt{14^2+52^2+16^2}} = \frac{214}{\sqrt{34} * \sqrt{3156}} \approx 0,65$$

Отсюда $\beta = \left(\frac{\pi}{2} - \arccos 0,65\right) = 40,79^o$

4) Площадь грани $A_1A_2A_3$ находим по как площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{N}\right|$$

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\sqrt{14^2+52^2+16^2} = \sqrt{789}\,ед.пл.$$

5)Объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3}\right) * \overline{A_1A_4}\right|$$

$$V = \frac{1}{6}\left|(14;52;-16) * (-3;4;-3)\right| = \frac{1}{6} * 214 = 35,7\,ед.объёма$$

$$V = 35,7\,ед.объёма$$

6)Уравнение прямой, проходящей через точки A_1 и A_2 имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

где x_1, y_1, z_1 – координаты точки A_1,

а x_2, y_2, z_2 – координаты точки A_2

$$\frac{x-10}{-2-10} = \frac{y-6}{8-6} = \frac{z-6}{2-6}$$

$$\frac{x-10}{-12} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-6}{-4}$$

$$\frac{x-10}{-6} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-6}{-2}$$

$\frac{x-10}{6} = \frac{6-y}{1} = \frac{z-6}{2}$ – это каноническое уравнение прямой A_1A_2.

7) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид:

$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

где A,B,C - координаты нормального к плоскости вектора $\overline{N}(14;52;-16)$

$14x + 52y - 16z + D = 0$

Из условия принадлежности точки $A_1(10;6;6)$ этой плоскости находим D.

$14*10 + 52*6\text{-}16*6*D = 0$, отсюда

$\text{-}D = 140 + 312\text{-}96 = 356.$

Уравнение плоскости имеет вид:

$14x + 52y - 16z - 356 = 0$

Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$ имеет вид:

$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{l}$, где x_0, y_0, z_0 коэффициенты точки A_4 лежащей на этой прямой.

Имеем $\overline{N}(14;62;-16)$ и $A_4(7;10;3)$

Тогда $\frac{x-7}{14} = \frac{y-10}{52} = \frac{z-3}{-16}$

Искомое уравнение высоты.

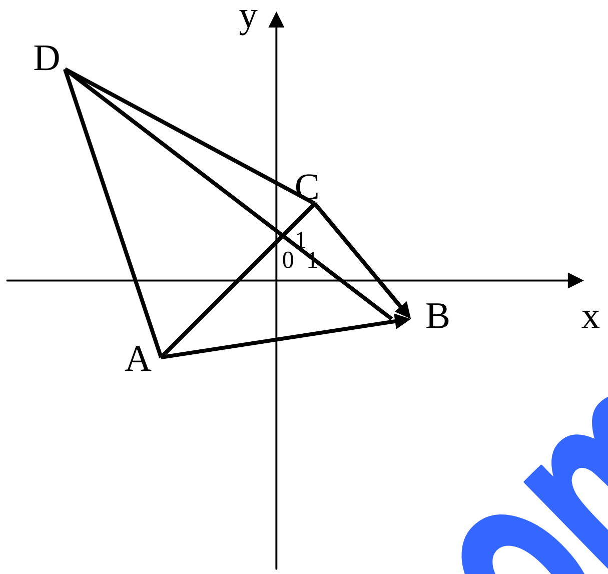
Задачи 5, 15, 25, 35, 45.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№25

Даны вершины A(-3;-2), B(4;-1), C(1;3) трапеции ABCD (AD ∥ BC). Известно, что диагонали трапеции взаино перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции. Сделать рисунок.

Решение:



$$BC: \quad \frac{x-x_2}{x_3-x_2}=\frac{y-y_2}{y_3-y_2}$$

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+1}{3+1}$$

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}$$

$$-4(x-2)=y+1$$

$$-4x+8=y+1$$

$$BC: \quad y=-4x+7$$

$$k_{BC}=(-4x+7)'=-4$$

$$BC \parallel AD \Rightarrow k_{AD}=k_{BC}=-4$$

$$AD: \quad y=y_1+k_{AD}(x-x_1)$$

$$y=-2-4(x+3)$$

$$y=-4x-2-12$$

$$AD: \; y=-4x-14$$

$$AC \perp BD \Rightarrow k_{BD}=-\frac{1}{k_{AC}}$$

$$AC: \frac{x+3}{1+3}=\frac{y+2}{3+2}$$

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y+2}{5}$$

$$y+2=\frac{5}{4}(x+3) \qquad y=-2+\frac{5}{4}x+\frac{15}{4}$$

$$y=\frac{5}{4}x+\frac{7}{4} \qquad k_{AC}=\left(\frac{5}{4}x+\frac{7}{4}\right)'=\frac{5}{4}$$

$$k_{BD}=-\frac{1}{\frac{5}{4}}=-\frac{4}{5} \qquad BD: y=y_2+k_{BD}(x-x_2)$$

$$BD: y=-1+\left(-\frac{4}{5}\right)(x-1)=-\frac{4}{5}x+\frac{11}{5} \qquad BD: 4x+5y-11=0$$

$$\begin{cases}4x+5y-11=0\\ 4x+y+14=0\end{cases} \qquad 4y-25=0 \qquad y=\frac{25}{4} \qquad 4x+\frac{25}{4}+14=0, \quad x=-\frac{81}{16}.$$

№35

Пусть M(x, y) - произвольная точка искомой линии.

$$|\overline{AM}|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2x+5|}{2}$$

По условию задачи:

$$\frac{|\overline{AM}|}{d}=\frac{4}{5}$$

$$5\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2(2x+5)$$

$$25(x^2-4x+4+y^2)=4(4x^2+20x+25)$$

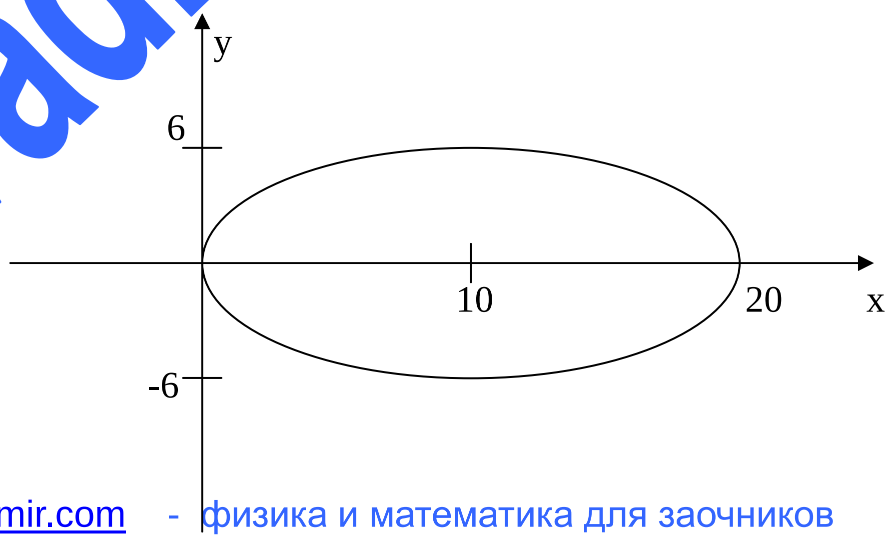
$$25x^2-100x+100-25y^2=16x^2+80x+100$$

$$9x^2-180x+25y^2=0$$

$$9(x^2-20x+100)+25y^2=900$$

$$\frac{(x-10)^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1 - \text{элипс.}$$

a = 10 b = 6.

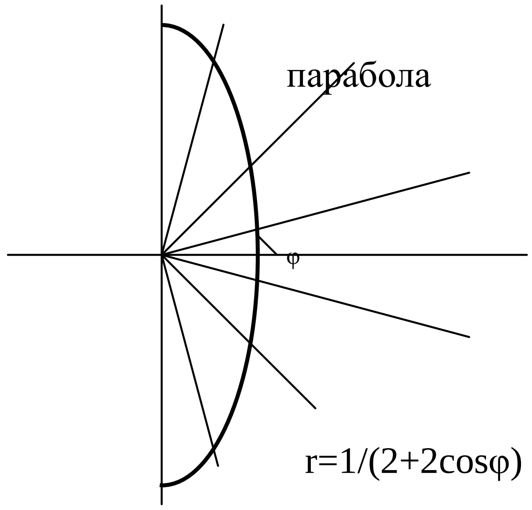


Задачи 5, 15, 25, 35, 45.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№45

1)



φ	0	22,5	45	67,5	90	112,5	135	157,5
r	¼	0,26	0,29	0,36	0,5	0,81	1,71	6,57

φ	180	202,5	225	247	270	292,5	315	337,5	360
r	∞	6,57	1,71	0,81	0,5	0,36	0,29	0,26	0,25

2) Связь между полярными и декартовыми координатами задаётся соотношениями:

$$\begin{cases} x = r * \cos\varphi \\ y = r * \sin\varphi \end{cases}$$

отсюда $x^2 + y^2 = r^2$, т.е.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

После деления уравнения на $\sqrt{x^2 + y^2}$ получим:

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2} + 2x} \quad \text{или} \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - 2x$$

Возводим в квадрат:

$4x^2 + 4y^2 = 1 - 4x + 4x^2$, отсюда

$x = \frac{1}{4} - y^2$ – уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат.

3) $x = \frac{1}{4} - y^2$ – парабола, симметричная относительно оси x, сдвинутая вправо

по оси x на $\frac{1}{4}$ обращённая ветвями влево.