Высшая метаматика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 4. Контрольная работа 1.

Задачи 4, 14, 24, 34, 44.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№4

$\overline{a}(10,3,1), \overline{b}(1,4,2), \overline{c}(3,9,2), \overline{d}(19,30,7)$

$$\overline{a}*\overline{b}*\overline{c}=\begin{vmatrix}10 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 9 & 2\end{vmatrix}=80+18+9-12-180-6=-91\neq 0$$

Следовательно $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис.

Найдём координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе:

$\alpha_1=a_1e_1^1+a_2e_2^1+a_3e_3^1$

$\alpha_2=a_1e_1^2+a_2e_2^2+a_3e_e^2$

$\alpha_3=a_1e_1^3+a_2e_2^3+a_3e_3^3$, где $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ – кооржинаты вектора $\overline{d}$ в старом базисе; $(e_1^1;e_1^2;e_1^3)$ – координаты вектора $\overline{a}$, (e_2^1,e_2^2,e_2^3) – координаты вектора $\overline{b}$, (e_3^1,e_3^2,e_3^3) – координаты вектора $\overline{c}$.

$$\begin{cases}19=10a_1+a_2+3a_3\\ 3-=3a_1+4a_2+9a_3\\ 7=a_1+2a_2+2a_3\end{cases}$$

Решаем методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}10 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 9\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=80+9+18-12-180-6=-91$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}19 & 1 & 3\\ 30 & 4 & 9\\ 7 & 2 & 2\end{vmatrix}=152+63+180-84-342-60=-91$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}10 & 19 & 3\\ 3 & 30 & 9\\ 1 & 7 & 2\end{vmatrix}=600+171+63-90-6-30-114=0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}10 & 1 & 19\\ 3 & 4 & 30\\ 1 & 2 & 7\end{vmatrix}=280+30+114-76-600-21=-273$$

$$a_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-91}{-91}=1;\quad a_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{-91}=0$$

$$a_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-273}{-91}=3$$

Координаты вектора в базисе $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$:

$\overline{d}=(1;0;3)$.

№14

$A(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8)$

1) Длина ребра A_1A_2

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(8-3)^2+(7-5)^2+(4-4)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \approx 5{,}385$$

2)Угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overline{A_1A_2};\overline{A_1A_4}\right)}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_1A_4}\right|}$$

$\overline{A_1A_2} = (8-3;7-5;4-4) = (5{,}2{,}0)$

$\overline{A_1A_4} = (4-3;7-5;8-4) = (1{,}2{,}4)$

$\left(\overline{A_1A_2};\overline{A_1A_4}\right) = 5*1+2*2+0*4 = 5+4 = 9$

$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$

$$\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{29}\sqrt{21}} \approx 0{,}3647$$

$\alpha = \arccos(0{,}36) \approx 68^o37'$

3) У Уг между рёбрами A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Найдём уравнение грани $A_1A_2A_3$

Пусть М(x, y, z) - произвольная т точ искомой плоскости.

$\overline{A_1M} = (x-3, y-5, z-4)$

$\overline{A_1A_2} = (5{,}2{,}0); \overline{A_1A_3} = (2{,}5{,}0)$

$$\overline{A_1M} * \overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (x-3)0-(y-5)0+(z-4)21 = 0$$

$$z = 4$$

Найдём уравнение стороны A_1A_4

$$\frac{x-x_1}{x_4-x_1} = \frac{y-y_1}{y_4-y_1} = \frac{z-z_1}{z_4-z_1}$$

$$\frac{x-3}{4-3} = \frac{y-5}{7-5} = \frac{z-4}{8-4} \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{4}$$

$\bar{n} = (0;0;21)$

$\overline{A_1A_4} = (1;2;4)$

$n*\overline{A_1A_4} = 0*1+0*2+21*4 = 84;$

Угол найдём по фомуле:

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \frac{84}{\sqrt{0^2+0^2+21^2}\sqrt{1^2+2^2+4^2}} = \frac{84}{21\sqrt{21}} = \frac{4}{21};$$

$$\varphi = \arcsin\frac{4}{\sqrt{21}} = \arcsin 0{,}8729 = 60^o48'$$

Задачи 4, 14, 24, 34, 44.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

$$\phi = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$$

4)Площадь грани $A_1A_2A_3$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3}\right|$$

$$\overline{A_1A_2} * \left|\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3}\right|$$

$$\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\,0 - \bar{j}0 + \bar{k}\,21$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{21^2} = \frac{21}{2}(кв.ед.)$$

$$5)V = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(100-16) = 14(кв.ед.)$$

$$6)\frac{x-3}{8-3} = \frac{y-5}{7-5} = \frac{z-4}{4-4} \Rightarrow \frac{x-3}{5} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{0}$$

$$8)\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, где$$

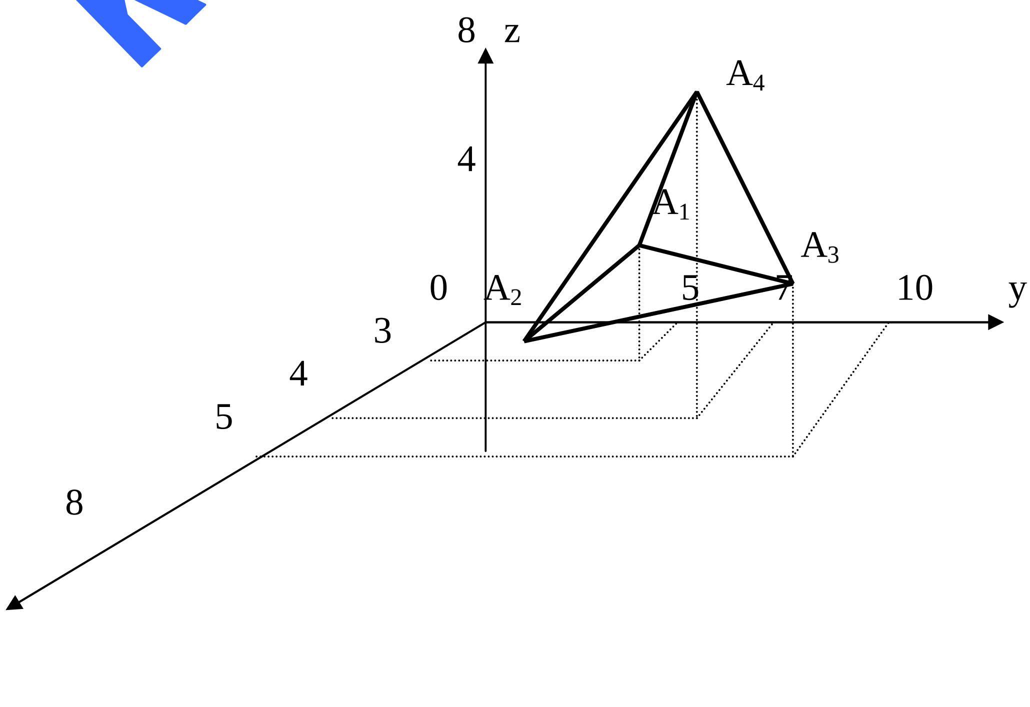
(x_0, y_0, z_0) – координаты вершины A_4

$$(l, m, n) = (A, B, C) = (0,0,21)$$

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-7}{0} = \frac{z-8}{21}$$

$$z - 8 = 21t$$

$$\begin{cases} z = 8 + 8 + 21t \\ x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$$

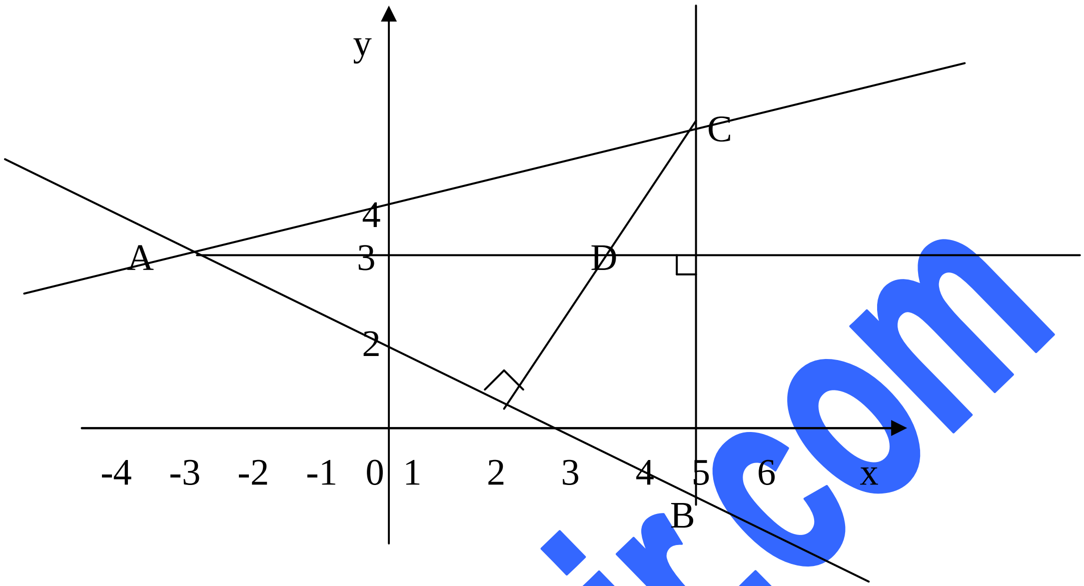


Задачи 4, 14, 24, 34, 44.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№24

Даны две вершины A(-3;3) и B(5;-1) и точка D(4;3) пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон.



Решение:

Уравнение стороны AB составим как уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки $A_1(x,y), B(x_2;y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Подставляя координаты точек:

$A(-3;3)$ и $B(5;-1)$ получим $\frac{x+3}{8}=\frac{y-3}{-4}$ или

$-4(x+3)=8(y-3)$ или

$x+2y-3=0-$ уравнеие стороны AB.

Уравнение высоты, опущенной на сторону AC найдём как уравнение прямой, проходяшей через точки B(5;-1) и D(4;3)

$\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-4}$ или $-4x+16=y-3$

$BD: 4x+y-19=0$ - уравнение высоты, опущенной на сторону AC.

Запишем это уравнение в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом $\mathrm{y}=\mathrm{kx}+\mathrm{b}$

$\mathrm{y}=-4x+19$

Из условия перпендикулярности двух прямых

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \quad k_1=-4, k_2=\frac{1}{4}$$

Так как $\mathrm{AC}\perp\mathrm{BD}$, то уравнеие AC:

$$y-3=\frac{1}{4}(x-(-3)) \text{ или } y-3=\frac{1}{4}(x+3);$$

$x-4y+15=0-$ уравнение стороны AC.

Запишем уравнение высоты на сторону BC:

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{3-3} \quad \frac{x-4}{-7}=\frac{y-3}{0} \quad \text{или}$$

$-7(y-3)=0 \quad y=3$

Угловой коэффициент этой прямой равен нулю, значит высота, опущенная на сторону BC параллельна оси X, поэтому $x-5=0$ - уравнение стороны BC.

Задачи 4, 14, 24, 34, 44.
http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№34

Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка искомой кривой.

$$|\overline{AM}|=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}$$

$$|\overline{BM}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$$

По условию задачи $|\overline{AM}|=2|\overline{BM}|$

Получаем:

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

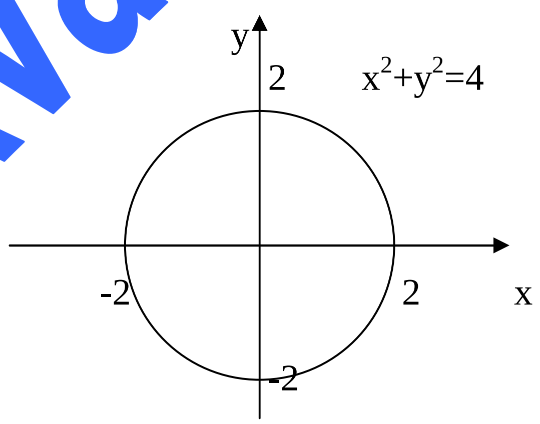
$$(x-4)^2+y^2=4(x-1)^2+4y^2$$

$$x^2-8x+16+y^2=4x^2-8x+4+4y^2$$

$$3x^2+3y^2=12$$

$x^2+y^2=4$ - искомая линия

Это окружность с центром в точке (0;0) и радиуса $R=2$



Задачи 4, 14, 24, 34, 44.

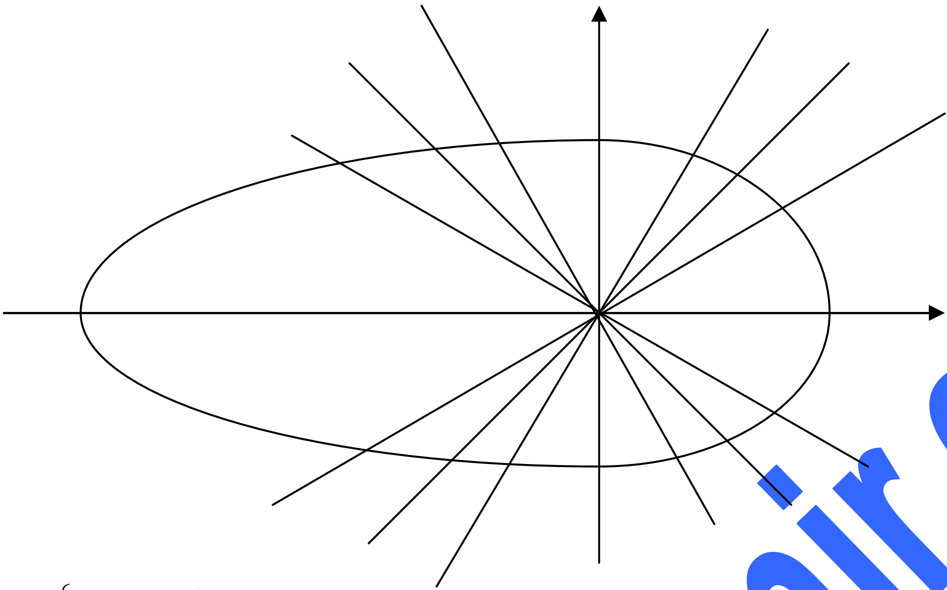
http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№44

$$r = \frac{8}{3 - \cos\phi}$$

1)

φ	0	π/8	π/4	3π/8	π/2	5π/8	3π/4	7π/8	π	9π/8	5π/4	11π/8	3π/2	13π/8	7π/4	15π/8	2π
r	4	3,9	3,5	3,1	2,7	2,6	2,2	2,04	2	2,04	2,2	2,6	2,7	3,1	3,5	3,9	4



$$2)\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \cos\phi = \frac{x}{r}$$

$$r = \frac{8}{3 - \frac{x}{r}}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{8}{3 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{8\sqrt{x^2 + y^2}}{3\sqrt{x^2 + y^2} - x};$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} - x = 8$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = 8 + x$$

$$9x^2 + 9y^2 = 64 + x^2 + 16x$$

$$8x^2 + 9y^2 - 16x = 64$$

$$8(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 = 64 + 8$$

$$8(x-1)^2 + 9y^2 = 72$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

Это элипс с центром в точке (1;0) и полуосями $a^2 = 9$ и $b^2 = 8$; $a = 3$; $b = 2\sqrt{2}$.