

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 3. Контрольная работа 1.

Задачи 3, 13, 23, 33, 43.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№3

$$\bar{a}(8,2,3), \bar{b}(4,6,10), \bar{c}(3,-2,1), \bar{d}(7,4,11)$$

$$\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 48 + 60 - 24 - 54 + 160 - 8 = 182 \neq 0$$

⇒ вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис. Найдём координаты вектора в этом базисе:

$$\begin{cases} a_1 e_1^1 + a_2 e_2^1 + a_3 e_3^1 = \alpha_1 \\ a_1 e_1^2 + a_2 e_2^2 + a_3 e_3^2 = \alpha_2 \\ a_1 e_1^3 + a_2 e_2^3 + a_3 e_3^3 = \alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a_1 + 4a_2 + 3a_3 = 7 \\ 2a_1 + 6a_2 - 2a_3 = 4 \\ 3a_1 + 10a_2 + a_3 = 11 \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 48 - 24 + 60 - 54 + 160 - 8 = 182.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -2 \\ 11 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 42 - 88 + 120 - 198 + 140 - 16 = 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 32 - 142 + 66 - 36 + 176 - 14 = 182.$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{182} = 0, \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{182}{182} = 1; \quad a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{182}{182} = 1;$$

Координаты вектора \bar{d} в базис $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$: (0;1;1).

<http://www.kvadromir.com> - физика и математика для заочников

Задачи 3, 13, 23, 33, 43.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№13

$$A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9)$$

$$1) \overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (2;3;-1)$$

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$2) \overline{A_1A_4} = (3;-1;4)$$

$$|\overline{A_1A_4}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

$$\cos \alpha = \frac{(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4})}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_4}|} = \frac{6 - 3 - 4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} = -\frac{1}{\sqrt{364}} \approx -0,05.$$

$$\alpha = \arccos(-0,05) \approx 1,62$$

$$3) \overline{A_1A_3} = (-2;4;5)$$

$$\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 19i - 8j + 14k.$$

Вектор нормали к плоскости $A_1A_2A_3$: $\overline{N} = (19; -8; 14)$

$$\sin \beta = \frac{|\overline{A_1A_4}, \overline{N}|}{|\overline{A_1A_4}| \cdot |\overline{N}|} = \frac{57 + 8 + 56}{\sqrt{26} * \sqrt{621}} = \frac{121}{\sqrt{16146}} \approx 0,95$$

$$\beta = \arcsin(0,95) \approx 1,25$$

$$4) S_{A_1A_2A_3} = \frac{|N|}{2} = \frac{\sqrt{19^2 + (-8)^2 + 14^2}}{2} = \frac{\sqrt{621}}{2} \approx 12,46$$

$$V_{\text{нуп}} = \frac{1}{6} \text{нар} - \text{еда}.$$

$$a = A_1A_2; b = A_1A_3; c = A_1A_4;$$

$$V_{\text{нєр-нєд}} = abc = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 2 + 45 + 12 + 24 + 10 = 121.$$

$$V_{\text{нуп}} = \frac{121}{6} = 20 \frac{1}{6}$$

$$6) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

$$\frac{x - 4}{2} = \frac{y - 6}{3} = \frac{z - 5}{-1}$$

$$7) \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x - 4 & y - 6 & z - 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - 4) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - (y - 6) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (z - 5) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 19x - 76 - 8y + 48 + 14z - 70 = 0$$

$19x - 8y + 14z - 98 = 0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

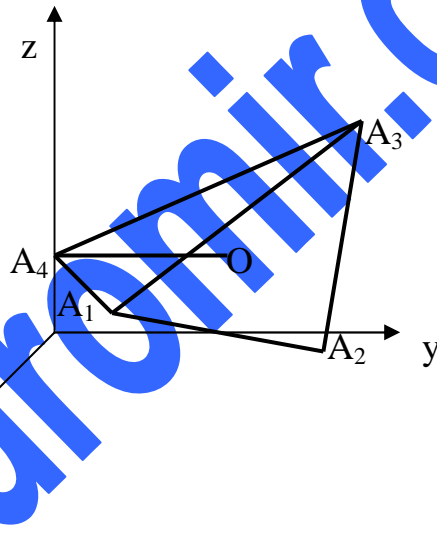
http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

8) A_4O – высота

$$\text{Уравнение } A_4O: \frac{x-7e}{e} = \frac{y-5}{m} = \frac{z-9}{n}$$

$$\text{Т.к. } A_4O \perp A_1A_2A_3 \Rightarrow \frac{19}{e} = \frac{-8}{m} = \frac{14}{n}$$

$$\text{Уравнение } A_4O: \frac{x-7}{19} = -\frac{y-5}{8} = \frac{z-9}{14}.$$



<http://www.kvadromir.com> - физика и математика для заочников

Задачи 3, 13, 23, 33, 43.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№23

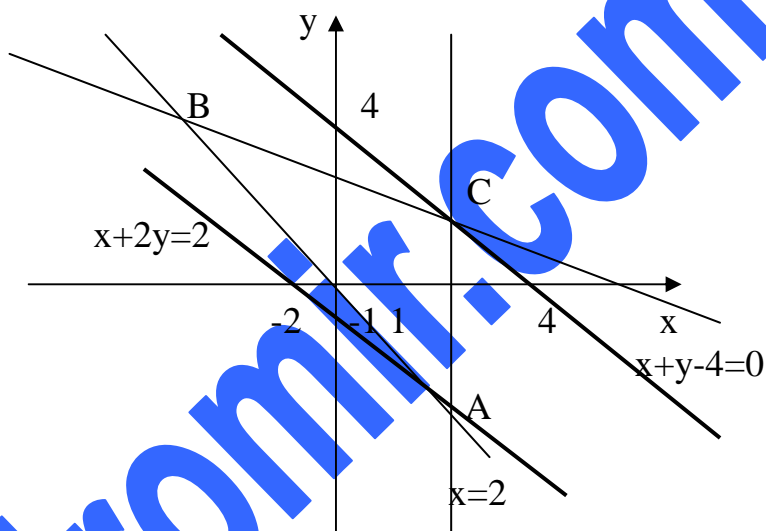
$$AB: x + 2y + 2 = 0$$

$$BC: x + y - 4 = 0$$

$$AC: x - 2 = 0$$

Найдём координаты точки А из системы уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ 2y = -4 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(2; -2) \end{matrix}$$



Координаты точки С найдём из системы:

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2; \\ y = 4 - 2 = 2; \end{matrix} C(2; 2)$$

Точку В найдём из системы:

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4 - y + 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -6 \\ x = 4 + 6 = 10 \Rightarrow B(10; -6) \end{matrix}$$

Т.к. ABCD - параллелограмм, то:

$$|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$$

$$2 - x_0 = 10 - 2 \Rightarrow x_0 = 2 + 2 - 10 = -6$$

$$2 - y_D = -6 + 2 \Rightarrow y_D = 6$$

Координаты точки D(-6; 6).

Задачи 3, 13, 23, 33, 43.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

№33

$$A(2;0); \quad 5x+8=0 \quad 5:4$$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка искомой кривой:

$$|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

Расположение от M до прямой:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{5x+8}{5}$$

По условию задачи:

$$\frac{|AM|}{d} = \frac{5}{4}$$

$$4\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 5 \frac{5x+8}{5}$$

$$16(x^2 - 4x + 4 + y^2) = 25x^2 + 80x + 64$$

$$9(x^2 + 16x) - 16y^2 = 0$$

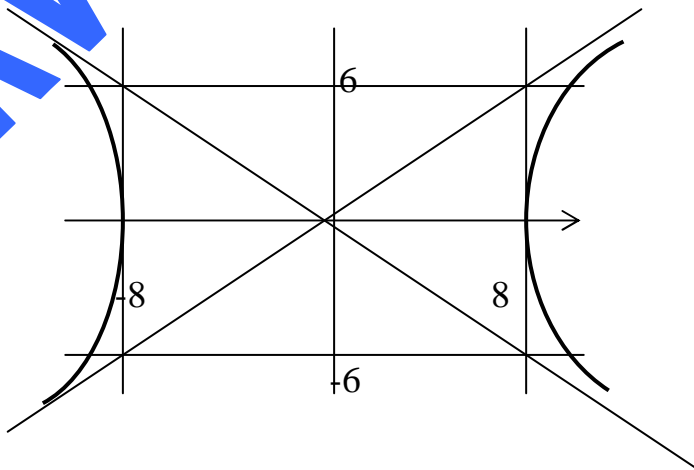
$$9(x^2 + 16x + 64 - 64) - 16y^2 = 0$$

$$9(x+8)^2 - 576 - 16y^2 = 0$$

$$9(x+8)^2 - 16y^2 = 576$$

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a = \sqrt{64} = 8; \quad b = \sqrt{36} = 6.$$



Задачи 3, 13, 23, 33, 43.

http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html

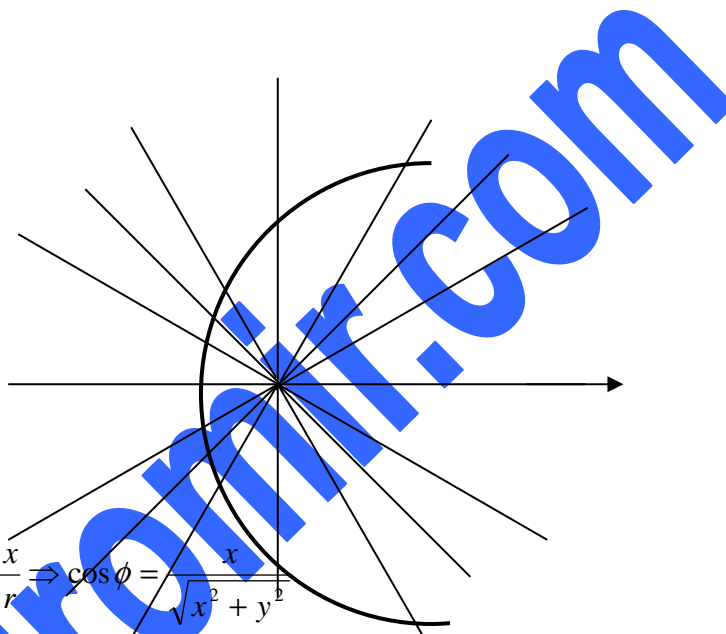
№43

$$r = \frac{4}{2 - 3\cos\phi}$$

1)

ϕ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π	$9\pi/8$	$5\pi/4$	$11\pi/8$	$3\pi/2$	$13\pi/8$
r	-4	-5,19	-33	4,7	2	1,3	1	1,7	0,8	0,83	1	1,3	2	4,6

ϕ	$7\pi/4$	$15\pi/8$	2π
r	-33	-5	-4



$$2) \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \cos \phi = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{2 - \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = 4 + 3x$$

$$4x^2 + 4y^2 = 16 + 9x^2 + 24x$$

$$5x^2 + 24x - 4y^2 + 16 = 0$$

$$5(x + 2,4)^2 - 4y^2 + 16 = 28,8$$

$$5(x + 2,4)^2 - 4y^2 = 12,8$$

$$\frac{(x + 2,4)^2}{2,56} - \frac{y^2}{3,2} = 1$$

3) Это уравнение гиперболы.

<http://www.kvadromir.com> - физика и математика для заочников