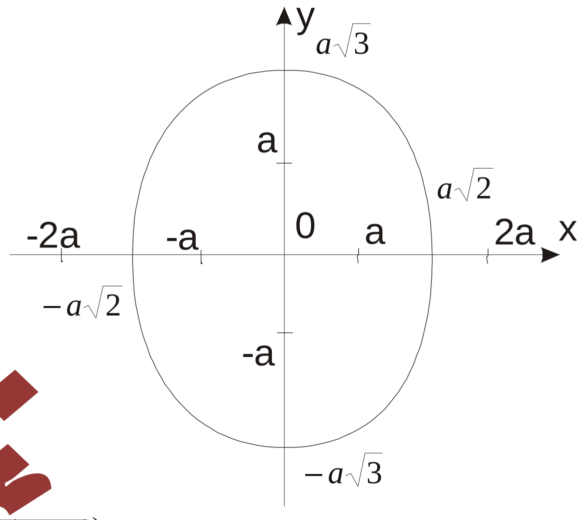
№379

$(x^2+y^2)^2 = a^2(2x^2+3y^2), \quad a>0$

Перейдем от прямоугольных декартовых координат к полярным координатам по формулам: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ x^2+y^2=\rho^2$.

Получаем уравнение:

$\rho^4 = a^2(2\rho^2+\rho^2\sin^2\varphi);\ \rho^2 = a^2(2+\sin^2\varphi)$.



Из этого уравнения видим, что угол φ изменяется (в пределах координатной плоскости) от 0 до 2π. Радиус-вектор ρ может принимать значения от $\rho=0$ до $\rho=\sqrt{a^2(2+\sin^2\varphi)}$.

Тогда искомая площадь фигуры (эллипса):

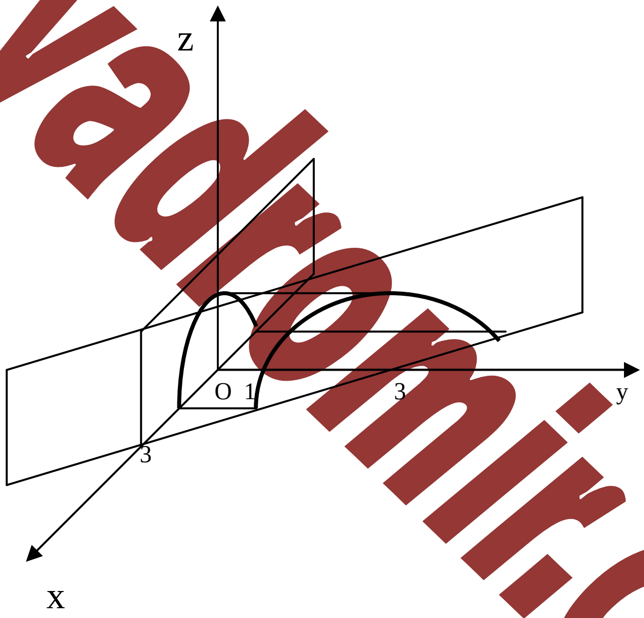
$$S=\iint_D dx\,dy=\iint_D \rho\,d\rho\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{a^2(2+\sin^2\varphi)}}\rho\,d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{\sqrt{a^2(2+\sin^2\varphi)}}\right)d\varphi=$$

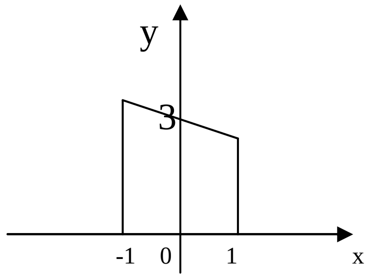
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(2+\sin^2\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{1-\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=1{,}25a^2\int_0^{2\pi}d\varphi-\frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}\cos2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{5}{4}a^2\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}-\frac{a^2}{8}\sin2\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{5}{4}a^2(2\pi-0)-\frac{a^2}{8}(0-0)=2{,}5\pi\ a^2\approx7{,}854a^2(кв.ед.)$$

№389

$z=0;\quad z=1-x^2;\quad y=0;\quad y=3-x$





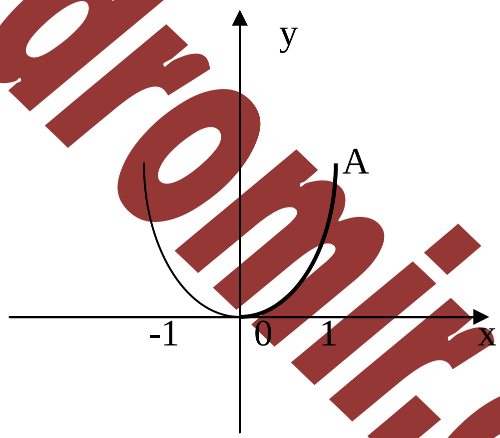
$$V=\iiint_T dxdydz=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{3-x}dy\int_{0}^{1-x^2}dz=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{3-x}(1-x^2)dy=\int_{-1}^{1}(y-x^2y)\Big|_0^{3-x}dx=\int_{-1}^{1}(3-x-x^2(3-x))dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}(3-x-3x^2+x^3)dx=\left(3x-\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=3-\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}+3+\frac{1}{2}-1=6-2=4(\text{куб.ед.}).$$

№399

$$\int_L (xy - x^2)dx + xdy$$

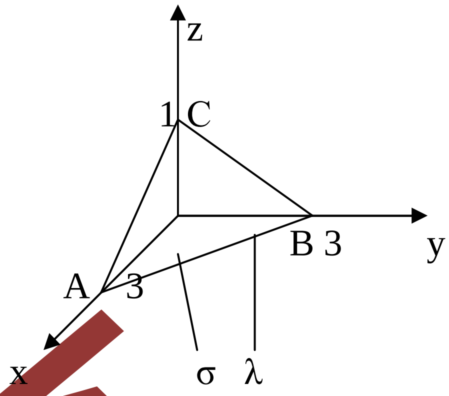
$L: y = 2x^2; \quad O(0;0); \quad d(1;2)$



$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P(x;\phi'(x)Q(x,\phi(x))\}dx$$

$$\int_L (xy - x^2)dx + xdy = \int_0^1 (x2x^2 - x^2 + 4x * x) = \int_0^1 (2x^3 - x^2 + 4x^2)dx = \left(\frac{2x^4}{4} + \frac{3x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{3} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

№409



$\overline{F}=(5x+2y+3z)\overline{k}; \quad x+y+3z-3=0$

1) Вычислим поток вектора $\overline{F}$ через поверхность σ.

$\Phi=\iint\limits_{\sigma}(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy);$

Подставляем:

$\Phi=\iint(5x+2y+3z)dxdy;$

Значение z подставляем из уравнения плоскости

$z=\frac{1}{3}(3-x-y)=1-\frac{x}{3}-\frac{y}{3}$

$$\Phi=\int_0^3 dy\int_0^{3-y}(5x+2y+3-x-y)dx=\int_0^3 dx\int_0^{3-y}(4x+y+3)dx=\int_0^3 dy\left[2(3-y)^2+(y+3)(3-y)\right]=$$

$$=\int_0^3(3-y)(6-2y+y+3)dy=\int_0^3(3-y)(9-y)dy=\int_0^3(y^2-12y+27)dy=\left(\frac{y^3}{3}-6y^2+27y\right)\Bigg|_0^3=36;$$

2) Циркуляция вектора $\overline{F}$ по замкнутому контуру λ. Непосредственное вычисление:

$C=\int\limits_{\lambda}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\lambda}(5x+2y+3z)dz;$

Контур λ состоит их трёх отрезков: AO, OB и OC.

Поскольку контур интегрирования AOB перпендикулярен оси z, dz = 0, и

$\oint\limits_{AOB}(5x+2y+3z)dz=0$

По теореме Стокса

$\oint\limits_{\lambda}Pdx+Qdy+Rdz=\oiint\limits_{\sigma}rot\overline{F}\,\overline{dS}=\oiint\limits_{\sigma}(rot\overline{F},\overline{n})dS.$

$$rot\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & 5x+2y+3z\end{vmatrix}=3\overline{j};$$

Вектор $rot\overline{F}$ не имеет z - составляющей, т.е. угол между нормалью $\overline{n}$ к поверхности S и вектором $rot\overline{F}$ равен $\pi/2$, поэтому

$\oiint\limits_{\sigma}(rot\overline{F},\overline{n})dS=0;$

3. Поток векторного поля $\overline{F}$ через поверхность пирамиды ABDC.

а) Используем теорему Остроградского - Гаусса:

$$\oiint \overline{F}\,\overline{dS} = \iiint_V div\overline{F}dV$$

$$div\overline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=3;\quad \frac{\partial}{\partial z}(5x+2y+3z)=3;$$

$$\oiint_S \overline{F}\,\overline{dS} = 3\iiint_V dV = 3\int_0^3 dx\int_0^{3-x}dy\int_0^{\frac{3-x-y}{3}}dz = -\int_0^3 dx\int_0^{3-x}(3-x-y)dy = -\int_0^3\left[(3y-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{3-x}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^3(3-x)^2dx = -\frac{1}{2}(x-3)^2 d(x-3) = -\frac{1}{2}\frac{(x-3)^3}{3}\Bigg|_0^3 = -4,5.$$

б) Непосредственным вычислением:

$$\oiint_S \overline{F}\overline{dS} = \oiint_{OAB}\overline{F}\overline{dS}+\oiint_{OAC}\overline{F}\overline{dS}+\oiint_{OCB}\overline{D}\overline{dS}+\oiint_{ABC}\overline{F}\overline{dS}.$$

Поскольку вектор силы $\overline{F}$ направлен вдоль оси z, то поток через поверхность AOC и COB равен нулю.

$$\oiint_S \overline{F}\overline{dS} = \iint_{OAB}\overline{F}\,\overline{dS} + \iint_{ABC}\overline{F}dS;$$

$$\oiint_{OAB}\overline{F}\,\overline{dS} = -\iint_{OAB}(5x+2y+3z)dxdy = -\int_0^3dx\int_0^{3-x}(5x+2y)dy = -\int_0^3\left(5xy\Big|_0^{3-x}+y^2\Big|_0^{3-x}\right)dx=$$

$$=-\int_0^3\left[5x(3-x)+(3-x)^2\right]dx=$$

Знак "-" соответствует тупому углу между векторами $\overline{n}$ и $\overline{F}$.

$$=\int_0^3(3-x)(4x+3)dx = -\int_0^3(-4x^2+9x+9)dx = -\left(-\frac{4}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2+9x\right)\Bigg|_0^3 = -\left(-36+\frac{9}{2}*9+27\right)=-31,5;$$

$$\iint_{ABC}\overline{F}\,\overline{dS} = \iiint_{ABC}(5x+2y+3z)dxdy = \int_0^3dx\int_0^{3-x}\left[5x+2y+3\left(\frac{3-x-y}{3}\right)\right]dy = \int_0^3dx\int_0^{3-x}(4x+y+3)dy=$$

$$=\int_0^3dx\left[(4x+3)y\Big|_0^{3-x}+\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{3-x}\right] = \int_0^3(3-x)\left(4x+3+\frac{3-x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^3(3-x)(7x+9)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3(-7x^2+12x+27)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{3}x^3\Big|_0^3+6x^2\Big|_0^3+27x\Big|_0^3\right)=\frac{1}{2}(-63+54+81)=36;$$

Общий поток:

$$\oiint \overline{F}\,\overline{dS} = -31,5+36=-4,5$$

что совпадает с результатом, полученным по теореме Остроградского - Гаусса.

№419

$F = (3x+4y)\bar{i} + (3y - xz)\bar{j} + (3z - xy)\bar{k}$

$$divF = \frac{\partial}{\partial x}(3x - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(3y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(3z - xy) = 3+3+3 = 9 \neq 0$$

поле не соленоидально.

$$rotF = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x - yz & 3y - xz & 3z - xy \end{vmatrix} = \bar{i}(-x+x) + \bar{j}(y-y) + \bar{k}(-z+z) = 0 -$$ поле потенциально, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x - 4z \Rightarrow u = \frac{3}{2}x^2 - xyz + \phi(y;z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -xz + \frac{\partial u}{\partial y} = -xz + 3y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 3y \Rightarrow \phi = \frac{3}{2}y^2 + f(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - xyz + f(z)\right) = -xy + \frac{\partial f}{\partial z} = 3z - xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 3z \Rightarrow f = \frac{3}{2}z^2.$$ Итак

$$u(x;y;z) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - xyz + C$$

$F = \overline{gradu}.$

$divF = 0$

$$divF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (3x+4zy)'_x + (3y - xz)'_y + (3z - xy)'_z = 3+3+3 = 9 \neq 0$$

Поле не соленоидальное.

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_9.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 9. Вариант 9. Номера 379, 389, 399, 409, 419