№377

$a>0 \qquad x^4=a^2\left(x^2-3y^2\right)$. Перейдем от прямоугольных декартовых координат к полярным координатам по формулам: $x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi$. Получим уравнение фигуры:

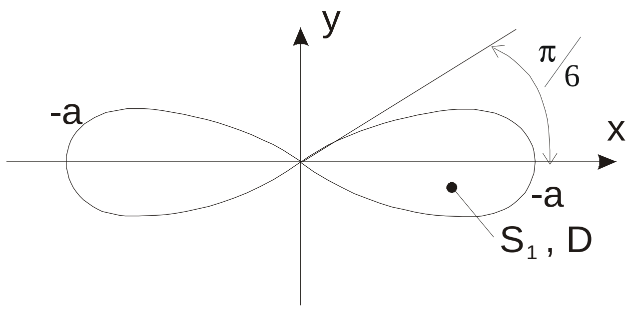
$$\rho^4\cos^4\varphi=a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi-3\rho^2\sin^2\varphi\right);$$

$$\rho^2=\frac{a^2}{\cos^2\varphi}\left(1-3tg^2\varphi\right).$$

$$\rho^2\ge 0 \Rightarrow 1-3tg^2\varphi\ge 0;$$

$$tg^2\varphi\le\frac{1}{3}; \left|tg\varphi\right|\le 1/\sqrt{3};$$

$$-\frac{\pi}{6}+\pi\cdot n\le\varphi\le\frac{\pi}{6}+\pi\cdot n, \quad n\in Z.$$



Нас интересуют значения: $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{6}\pi;\frac{7}{6}\pi\right]$.

$$S_1=\iint_D dx\,dy=\iint_D \rho\,d\rho\,d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\varphi}\left(1-3tg^2\varphi\right)}}\rho\,d\rho=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\varphi}\left(1-3tg^2\varphi\right)}}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{a^2}{\cos^2\varphi}\left(1-3tg^2\varphi\right)-0\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(1-3tg^2\varphi\right)d\left(tg\varphi\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left.\left(tg\varphi-3\frac{tg^3}{\varphi}\right)\right|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{-1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{27}}+\frac{1}{\sqrt{27}}\right)\right)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)=$$

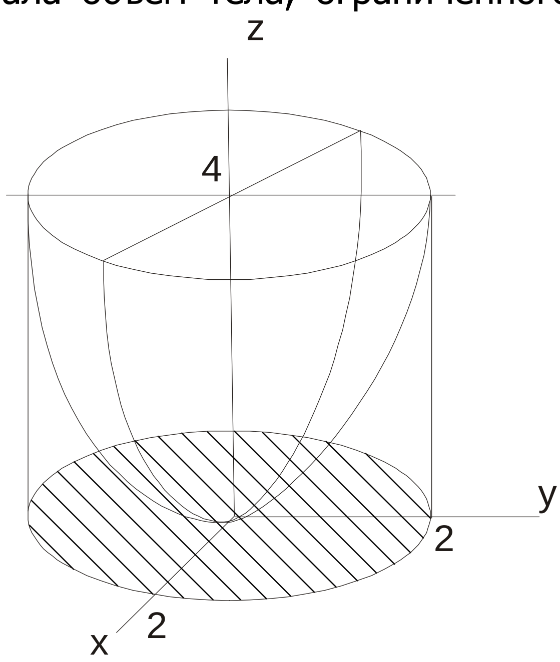
$$=a^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2\approx 0{,}385a^2$$

Так как заданное уравнение четное, то фигура симметрична о тносительно оси ординат и $S=2S_1=2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot a^2=\frac{4\sqrt{3}}{9}a^2\approx 0{,}770a^2$.

№387

Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

$z=0;\ x^2+y^2=z;\quad x^2+y^2=4$.



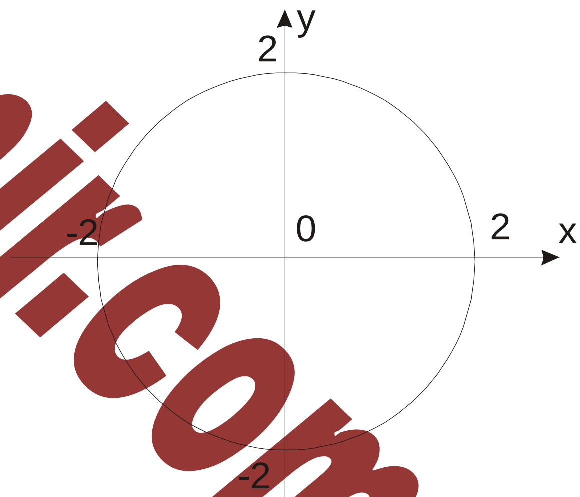
Чертеж представлен на рисунке.

$z=0$ - плоскость xOy;

$z=x^2+y^2$ - параболоид цилиндрический;

$x^2+y^2=4$ - цилиндр радиуса R=2 и осью, совпадающей с Oz.

Параболоид и цилиндр пересекаются друг с другом по окружности $x^2+y^2=2^2$ в плоскости $z=4$. Тело представляет собой часть цилиндра $x^2+y^2=4$, заключенную между плоскостями $z=0$ и $z=4$ с «вырезанной» (вынутой) частью параболоида $z=x^2+y^2$.



Для нахождения объема тела перейдем к цилиндрической системе координат с пределами интегрирования $0\le\varphi\le 2\pi;\quad 0\le\rho\le 2;$ $0\le z\le\rho^2$ (т.к. $x^2+y^2=\rho^2$).

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\iiint\limits_V \rho\,d\varphi\,d\rho\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_0^{\rho^2}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\left(z\Big|_0^{\rho^2}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\left(\rho^2-0\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^2\right)d\varphi=$$

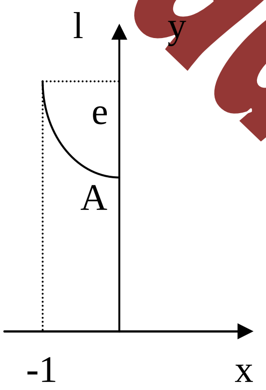
$$=\int_0^{2\pi}\frac{16-0}{4}d\varphi=4\varphi\Big|_0^{2\pi}=8\pi-0=8\pi=$$

$$=25{,}13(куб.ед.)$$

№397

Вычислить криволинейный инеграл вдоль дуги l кривой $y = e^{-x}$, от точки A(0;1) до точки B(-1;e). Сделать чертёж.

$$\int y dx + \frac{x dy}{y} \qquad y = e^{-x}$$

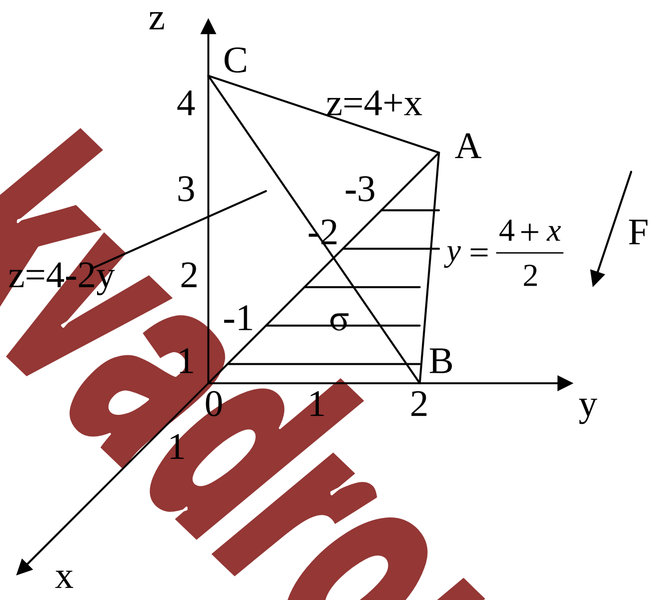


$$\int y dx + \frac{x}{y} dy = \int_0^{-1} e^{-x} dx + \int_0^1 x e^x * e^x(-dx) = \int_0^{-1} (e^{-x} - x) dx = -e^x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{-1} = -e + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e.$$

№407

Векторная функция $\overline{F} = (x - y + z)\overline{i}$;

плосость $P: -x + 2y + z - 4 = 0$;



Векторная функция направлена вдоль оси x.

1. Поток векотра $\overline{F}$ через поверхность σ.

$$\Phi = \iint_{\sigma}(Pdydz + Qdxdz + Rdxdy) = \iint_{\sigma} F_x dydz = 0;$$

Поскольку вектор $\overline{F}$ перпендикулярен нормали к поверхности $\overline{n}$: $\overline{F} \perp \overline{n}$ то поток Φ через эту поверхность равен 0.

2. Циркуляция векотра $\overline{F}$ по контуру λ. Непосредственные вычисления.

$$C = \oint_{\lambda}(Pdx + Qdy + Rdz) = \oint_{\lambda}(x - y + z)dx$$

Контур λ состоит из 3 отрезков: OA, AB и BO.

$$C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO};$$

причём $\int_{BO} = 0;$

1. отрезок OA, $z = 0,\ y = 0;\ \overline{F} = x\overline{i}$;

$$\int_{OA} = -\int_0^{-4} x dx = -\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{-4} = -8;$$

2. Отрезок AB $z = 0,\ y = \frac{4+x}{2}$;

$$\int_{AB} = -\int_{-4}^{0}\left(x - \frac{4+x}{2}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(x-4)dx = -\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2} - 4x\right)\right|_{-4}^{0} = \frac{1}{2}(8+16) = 12;$$

$C = 12 - 8 = 4;$

3.Циркуляция вектора $\overline{F}$. Теорема Стокса.

Согласно теореме Стокса

$$C=\oint Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S(\bar{n},rot\bar{F})dS;$$

Вычисляем $\mathrm{rot}\bar{\mathrm{F}}$:

$$rot\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-y+z & 0 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}+\bar{k};$$

$$C=\iint_S(rot\bar{F})_z\,dxdy=-\int_{-4}^{0}dx\int_0^{\frac{(4+x)}{2}}dy=\int_{-4}^{0}\frac{1}{2}(4+x)dx=\frac{1}{2}\left(4x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{0}=-\frac{1}{2}(-16+8)=4;$$

4. Поток векторного поля через поверхность пирамиды. Теорема Остроградского - Гаусса.

Согласно теореме Остроградского - Гаусса поток векорного поля $\overline{\mathrm{F}}$ через замкнутую поверхность S

$$\varPhi=\oiint_S\bar{F}d\bar{S}=\iiint_V div\bar{F}dV;$$

Находим дивергенцию:

$$div\bar{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=1;$$

$$\varPhi=\int_{-4}^{0}dx\int_0^{\frac{4+x}{2}}dy\int_0^{4+x-2y}dz=\int_{-4}^{0}dx\int_0^{\frac{4+x}{2}}(4+x-2y)dy=\int_{-4}^{0}y(4+x-y)\Big|_0^{\frac{4+x}{2}}dx=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}(4+x)^2dx=$$

$$=\frac{(4+x)^3}{12}\Bigg|_{-4}^{0}=\frac{64}{12}=\frac{16}{3}=5{,}33.$$

5. Нахождение потока непосредственным вычислением. Поток через поверхность пирамиды.

$$\varPhi=\oiint_S(\bar{F},\bar{n})dS=\iint_{OAB}+\iint_{OAC}+\iint_{OBC}+\iint_{ABC};$$

Поток через грани OAC и OAB равен 0, поскольку веткор нормали $\bar{n}\perp\bar{F}$;

$$\varPhi=\iint_{OBC}+\iint_{ABC}=\int_0^2dy\int_0^{4-2y}[(z-y)-((2y+z-4)-y+z)]dz=\int_0^2dy\int_0^{4-2y}(4-2y-z)dz=$$

$$=\int_0^2dy\left[\left(4-2y-\frac{4-2y}{2}\right)(4-2y)\right]=2\int_0^2(2-y)^2dy=\frac{2}{3}(2-y)^3\Big|_0^2=\frac{16}{3}=5{,}33$$

№417

$$F=(5x+4yz)i+(5y+4xz)j+(5z+4xy)k$$

$$rotF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5x+4yz & 5y+4xz & 5z+4xy \end{vmatrix}=i4x+j4y+k4z-i4x-j4y-k4z=0$$

$\Rightarrow$ поле F является потенциальным, найдем его потенциал, по формуле:

$$\mathrm{U(x,y,z)}=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C$$

$$\mathrm{U(x,y,z)}=\int_0^x 5xdx+\int_0^y 5ydy+\int_0^z 5zdz+\int_0^z 4xydz=\left.\frac{5x^2}{2}\right|_0^x+\left.\frac{5y^2}{2}\right|_0^y+\left.\frac{5z^2}{2}\right|_0^z+4xyz\Big|_0^z=$$

$$=\frac{5x^2}{2}+\frac{5y^2}{2}+\frac{5z^2}{2}+4xyz$$

$$divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial K}{\partial z}$$

$$divF=\frac{\partial(5x+4yz)}{\partial x}+\frac{\partial(5y+4xz)}{\partial y}+\frac{\partial(5z+4xy)}{\partial z}=5+5+5=15\neq 0$$

$\Rightarrow$ поле не является соленоидальным.