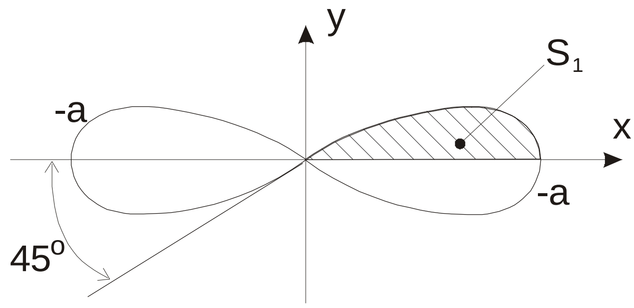
№376

Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в декартовых координатах: $(a>0)\quad x^6 = a^2\left(x^4 - y^4\right)$.



Перейдем от прямоугольных декартовых координат к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$.

Тогда уравнение фигуры примет вид:

$$\rho^6\cos^6\varphi = a^2\left(\rho^4\cos^4\varphi - \rho^4\sin^4\varphi\right) \Rightarrow$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi}\left(1 - tg^4\varphi\right)$$

Найдем пределы измерения угла φ: $\rho^2 \ge 0 \Rightarrow 1 - tg^4\varphi \ge 0;\quad tg^4\varphi \le 1;\ |tg\varphi| \le 1;$ $-1 \le tg\varphi \le 1;\quad -\frac{\pi}{4} + \pi\cdot n \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + \pi\cdot n,\ n \in Z$. Или в пределах координатной плоскости $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi;\frac{5}{4}\pi\right]$. В силу симметрии фигуры:

$$S = 4S_1 = 4\iint_D dx\,dy = 4\iint_D \rho\,d\rho\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\left(1-tg^4\varphi\right)\frac{a^2}{\cos^2\varphi}}} \rho\,d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{\sqrt{\left(1-tg^4\varphi\right)\frac{a^2}{\cos^2\varphi}}}\right] d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-tg^4\varphi\right)\frac{a^2}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-tg^4\varphi\right)d\left(tg\varphi\right) = 2a^2\left.\left[tg\varphi - \frac{tg^5\varphi}{5}\right]\right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

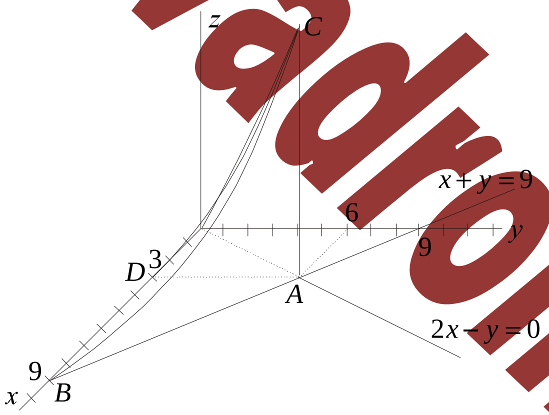
$$= 2a^2\left[1 - 0 - \frac{1}{5}\left(1-0\right)\right] = 2a^2\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1{,}6a^2$$

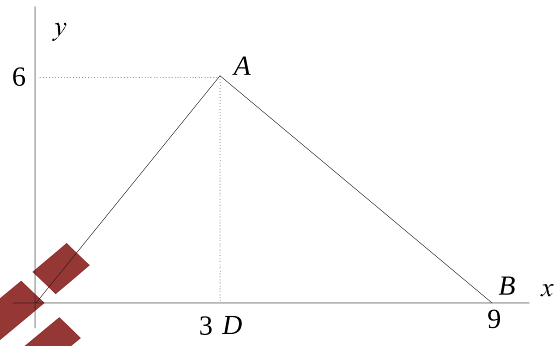
386

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=0; 4z=y^2; 2x-y=0; x+y=9$

Сделаем чертеж. Это будет: параболический цилиндр $z=\frac{y^2}{4}$, ограниченный плоскостями, параллельными оси Oz: $2x-y=0$; $x+y=9$.

Проекциями этих плоскостей на плоскость xOy будут прямые: $y=2x$; $y=9-x$, которые пересекаются в точке $A(3,6)$, так как $\begin{cases} y=2x \\ y=9-x \end{cases} \Rightarrow 2x=9-x;\ x=3;\ y=6$





Для простоты вычислений разобьем тело на две части: CDOA и CDBA и вычислим объем отдельно для каждой части.

Объем тела CDOA:

$$V_1=\int_0^3\left(\int_0^{2x}\left(\int_0^{\frac{y^2}{4}}dz\right)dy\right)dx=\int_0^3\left[\int_0^{2x}\left(z\Big|_0^{\frac{y^2}{4}}\right)dy\right]dx=\int_0^3\left(\int_0^{2x}\frac{y^2}{4}dy\right)dx=\int_0^3\left(\frac{y^3}{12}\Big|_0^{2x}\right)dx=\int_0^3\frac{8x^3}{12}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}\Big|_0^3=\frac{81}{6}=13{,}5(\hat{e}\acute{o}\acute{a}.\mathring{a}\ddot{a}.)$$

Вычислим объем второй части:

$$V_2=\int_3^9\left[\int_0^{9-x}\left(\int_0^{\frac{y^2}{4}}dz\right)dy\right]dx=\int_3^9\left[\int_0^{9-x}\left(\frac{y^2}{4}\right)dy\right]dx=\int_3^9\left(\frac{y^3}{12}\Big|_0^{9-x}\right)dx=\int_3^9\frac{(9-x)^3}{12}dx=\left(-\frac{(9-x)^4}{48}\right)\Big|_3^9=$$

$$=-\frac{(9-x)^4}{48}\Big|_3^9=0+\frac{(9-x)^4}{48}=\frac{6^4}{48}=\frac{36\times36}{48}=27(\hat{e}\acute{o}\acute{a}.\mathring{a}\ddot{a}.)$$

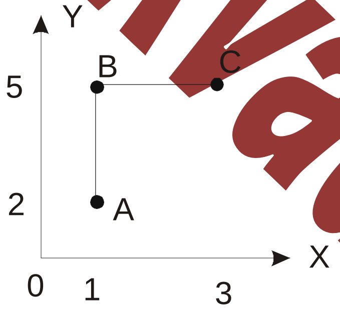
Объем всего тела:

$$V=V_1+V_2=13{,}5+27=40{,}5(\hat{e}\acute{o}\acute{a}.\mathring{a}\ddot{a}.)$$

№396

Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L (x^2+y)dx-(y^2+x)dy$ вдоль ломаной L=ABC, где A(1;2), B(1;5), C(3;5).

Решение



Разбиваем путь на два участка AB и BC.

Сначала вычислим на AB.

Уравнение AB:

$$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-2}{5-2} \quad или \quad \frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{5} \quad или \quad x=1,\ dx=0$$

Уравнение BC:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-5}{5-5} \quad или \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{0} \quad или \quad y=5,\ dy=0$$

Отсюда:

$$\int\limits_{AB}(x^2+y)dx-(y^2+x)dy=0-\int\limits_2^5(y^2+1)dy=-\left(\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_2^5=-\frac{125}{5}-5+\frac{8}{3}+2=-42$$

$$\int\limits_{BC}(x^2+y)dx-(y^2+x)dy=\int\limits_1^3(x^2+5)dx-0=-\left(\frac{x^3}{3}+5x\right)\Bigg|_1^3=\frac{27}{5}+15-\frac{1}{3}-5=18\frac{2}{3}$$

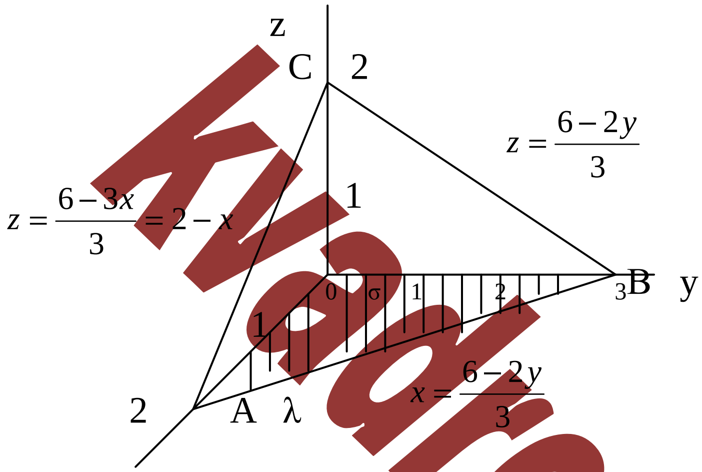
Тогда:

$$\int\limits_L(x^2+y)dx-(y^2+x)dy=-42+18\frac{2}{3}=-\frac{70}{3}=-23\frac{1}{3}$$

№406

$\overline{F}(2x+4y+3z)\overline{k}$; Плоскость

$P:\quad 3x+2y+3z-6=0$



Векторная функция направлена вдоль оси z;

1. Поток вектора $\overline{\mathrm{F}}$ через поверхность σ.

$$\Phi=\iint\limits_{\sigma}(Pdydz+Qdxdz+Rdxdy);$$

Подставляем:

$$\Phi=\iint\limits_{\sigma}F_Z\,dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{(6-3x)}{2}}(2x+4y)dy=\int_0^2 dx\left(2xy\Big|_0^{\frac{6-3x}{2}}+2y^2\Big|_0^{\frac{6-3x}{2}}\right)=\frac{1}{2}\int_0^2(6-3x)(2x+6-3x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(6-3x)(6-x)dx=\frac{3}{2}\int_0^2(2-x)(6-x)dx=\frac{3}{2}\int_0^2(12-8x+x^2)dx=\frac{3}{2}x\left(12-4x+\frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=3\left(12-8+\frac{4}{3}\right)=8;$$

2. Циркуляция вектора $\overline{\mathrm{F}}$ по контуру λ.. Непосредственное вычисление.

$$\mathrm{C}=\oint\limits_{\lambda}\mathrm{Pdx}+\mathrm{Qdy}+\mathrm{Rdz}=\oint\limits_{\lambda}(2\mathrm{x}+4\mathrm{y}+3\mathrm{z})\mathrm{dz},$$

Поскольку вектор $\overline{\mathrm{F}}$ перпендикулярен контуру λ то циркуляция С равна нулю;

$\mathrm{C}=0;$

3. Циркуляция С. Теорема Стокса.

Согласно теореме Стокса:

$$\mathrm{C}=\oint\limits_{\lambda}\mathrm{Pdx}+\mathrm{Qdy}+\mathrm{Rdz}=\iint\limits_{\mathrm{S}}(\overline{\mathrm{n}},rot\overline{F})ds;$$

Вычисляем $\mathrm{rot}\overline{\mathrm{F}}$.

$$\mathrm{rot}\overline{\mathrm{F}}\begin{vmatrix}\overline{\mathrm{i}} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & 2x+4y+3z\end{vmatrix}=4\overline{i}-2\overline{j};$$

Поскольку вектор $\mathrm{rot}\overline{\mathrm{F}}$ перпендикулярен нормали к поверхности S, то поток $\mathrm{rot}\overline{\mathrm{F}}$, а значит и циркуляция $\overline{\mathrm{F}}$ равны нулю.

4. Поток векторного поля $\overline{\mathrm{F}}$ через поверхность пирамиды. Теорема Остроградского Гаусса.

$$\varPhi=\oiint\limits_{S}\overline{\mathrm{F}}d\overline{\mathrm{S}}=\iiint\limits_{V}div\overline{F}dV$$

Находим:

$$div\overline{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=3;$$

$$\varPhi=3\int_0^2dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}dy\int_0^{\frac{6-3x-2y}{3}}dz=\int_0^2dx\int_0^{\frac{2(2-x)}{2}}dy(6-3x-2y)=\int_0^2dx\left[(6-3x)-\frac{3(2-x)}{2}\right]\frac{3}{2}(2-x)=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2(12-6x-6+3x)(2-x)dx=\frac{3}{4}\int_0^2(6-3x)(2-x)dx=\frac{9}{4}\int_0^2(2-x)^2dx=\frac{3}{4}(x-2)^3\Big|_0^2=6;$$

5. Нахождение потока непосредственным вычислением.

$$\varPhi=\oiint(\overline{F},\overline{n})dS=\iint\limits_{OAB}+\iint\limits_{OAC}+\iint\limits_{OBC}+\iint\limits_{ABC};$$

Поток через грани AOC и COB равен нулю, поскольку вектора нормали граней $\overline{\mathrm{n}}$ перпендикулярны $\overline{\mathrm{F}}$.

$$\varPhi_1=\iint\limits_{AOB}=-\iint(2x+4y)dxdy=-\int_0^2dx\int_0^{\frac{3(2-x)}{2}}(2x+4y)dy=-6;$$

Этот интеграл с обратным знаком вычислен в п.1

$$\varPhi_2=\iint\limits_{ABC}=\int_0^2dx\int_0^{\frac{2(2-x)}{2}}\left(2x+4y+3\left(\frac{6-3x-2y}{3}\right)\right)dy=\int_0^2dx\int_0^{\frac{3(2-x)}{2}}(2x+4y+6-3x-2y)dy=$$

$$=\int_0^2dx\int_0^{\frac{3(2-x)}{2}}(2y+6-x)dy=\int_0^2dx\left[(6-x)+\frac{3(2-x)}{2}\right]\frac{3(2-x)}{2}=\frac{3}{4}\int_0^2(2-x)(12-2x+6-3x)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2(2-x)(18-5x)dx=\frac{3}{4}\int_0^2(36-28x+5x^2)dx=\frac{3}{4}x\left(36-14x+\frac{5}{3}x^2\right)\Big|_0^2=\frac{6}{4}\left(36-28+\frac{20}{3}\right)=22.$$

$$\varPhi=\varPhi_1+\varPhi_2=-16+22=6.$$

№416

$F=(x+2yz)i+(y+2xz)j+(z+2xy)k$

Решение:

1) Находим

$$rot\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (x+2yz) & (y+2xz) & (z+2xy)\end{vmatrix}=(2x-2x)\bar{i}+(2y-2y)\bar{j}+(2z-2z)\bar{k}=0$$

Поле является потенциальным.

2) По формуле находим потенциал.

$$u(x;y;z)=\int_{x_0}^{x}(x+2y_0z_0)dx+\int_{y_0}^{y}(y+2xz_0)dy+\int_{z_0}^{z}(z+2xy_0)dz=\left(\frac{x^2}{2}+2xy_0z_0\right)\Big|_{x_0}^{x}+\left(\frac{y^2}{2}+2yxz_0\right)\Big|_{y_0}^{y}+$$

$$+\left(\frac{z^2}{2}+2zxy\right)\Big|_{z_0}^{z}=\frac{x^2}{2}+2xy_0z_0-\frac{x_0^2}{2}-2x_0y_0z_0+\frac{y^2}{2}+2yxz_0-\frac{y_0^2}{2}-2y_0xz_0+\frac{z^2}{2}+2xzy-\frac{z_0^2}{2}-2z_0xy=$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+\left(-\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{2}-2x_0y_0z_0\right)+2zxy=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+2zxy+C,\text{где}$$

$$C=\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{2}-2x_0y_0z_0$$

$$divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=(x+2yz)'_x=1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=(y+2xz)'_y=1$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=(z+2xy)'_z=1$$

$$divF=1+1+1=3\neq 0$$

поле не является соленоидальным.