№374

$(x^2+y^2)=a^2(3x^2+2y^2)$

Прейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

Уравнение кривой примет вид:

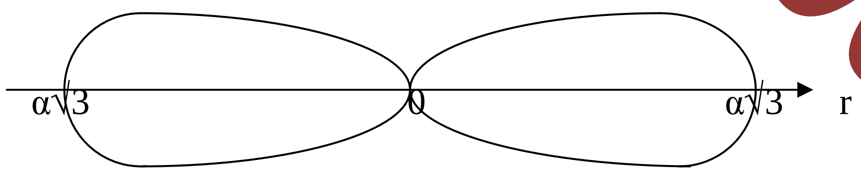
$$(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)^2 = a^2(3r^2\cos^2\phi + 2r^2\sin^2\phi)$$

$$(r^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi))^2 = a^2r^2(3\cos^2\phi + 2\sin^2\phi)$$

$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\phi + 2(\cos^2\phi+\sin^2\phi))$$

$$r^2 = a^2(\cos^2\phi+2)$$

$$r = a\sqrt{\cos^2\phi+2}$$



$$S = \iint_D dxdy \iint_D r d\phi dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{a\sqrt{\cos^2\phi+2}} r dr =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos^2\phi+2}} d\phi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\cos^2\phi+2)d\phi =$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos^2\phi}{2}+2\right)d\phi = a^2(\phi+\frac{1}{2}\sin 2\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4a^2\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) + 4a^2\frac{\pi}{2} =$$

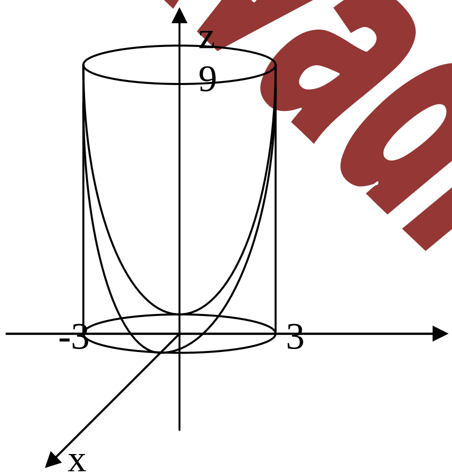
$$= a^2\frac{\pi}{2} + 2a^2\pi = \frac{5\pi a^2}{2}(\textit{кв.}\ \text{ед.})$$

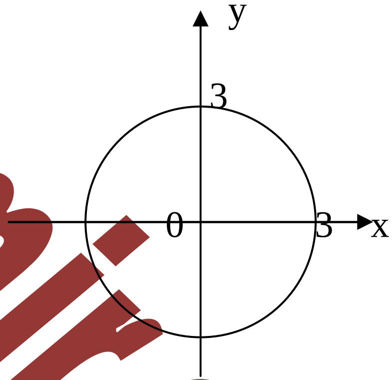
№ 384

$z=0;\quad z=y^2;\quad x^2+y^2=9$

$V=\iiint\limits_T dxdydz$

Данное тело ограничено сверху парабалическим цилиндром $z=y^2$, снизу - плоскостью $z=0$, а с боков - - цилиндром $x^2+y^2=9$





$$V=2\iiint\limits_T dxdydz=2\int_{-3}^{3}dx\int_0^{\sqrt{9-x^2}}dy\int_0^{y^2}dz=2\int_{-3}^{3}dx\int_0^{\sqrt{9-x^2}}y^2dy=2\int_{-3}^{3}\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{2}{3}\int_{-3}^{3}(9-x^2)^{3/2}dx=$$

$$=\frac{2*27*3}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^3}\,d\left(\frac{x}{3}\right)=\left[\frac{x}{3}=\sin t\right]=54\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=54\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2dt=$$

$$=54\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos^2 2t\right)dt=54\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,d(2t)+\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4t}{2}dt\right)=$$

$$=\frac{54}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{54}{4}\left(\sin 2\frac{\pi}{2}+\sin\frac{2\pi}{2}\right)+\frac{54}{8}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\left(\sin 4\frac{\pi}{2}+\sin 4\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{54\pi}{4}+\frac{54\pi}{8}=20{,}25\pi(\textit{куб.ед.}).$$

№394

$$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$$

$L: y=x^2$ A(-1;1); B(1;1)

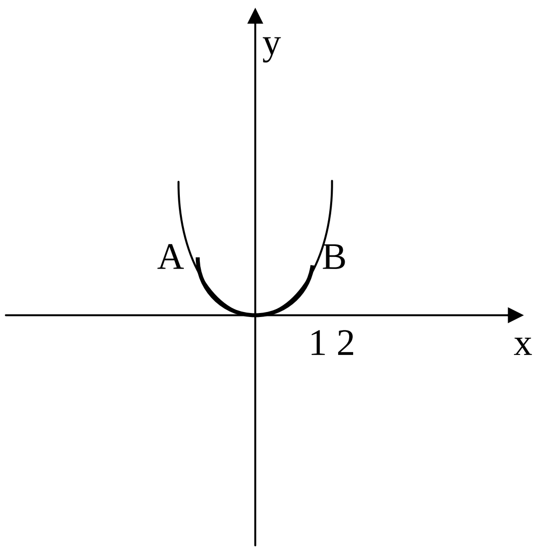
Воспользуемся формулой:

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b \{P(x,y(x))+\phi'(x)Q(x,y(x))\}dx$$

$$\int (x^2-2xy)dx+\left(y^2-2xy\right)dy=\int_{-1}^{1}(x^2-2xx^2+2x(x^4-2xx^2))dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{2}{3}-\frac{8}{5}=\frac{10-24}{15}=\frac{-4}{15}$$

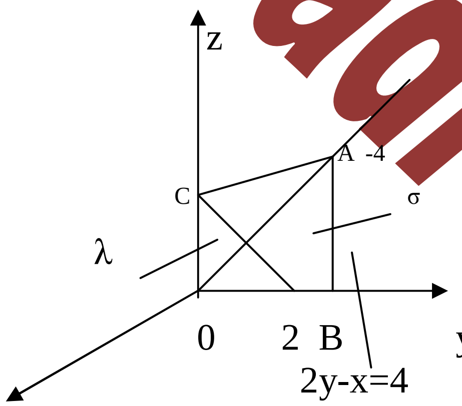


№404

Векторное поле $\overline{F} = \overline{i}x + \overline{j}y + \overline{k}z = (x + 2y - z)i$

плоскость $p: -x + 2y + 2z - 4 = 0$

1) Вычислим поток вектора $\overline{F}$ через поверхность $\Phi = \iint\limits_{\sigma}(Pdydz + Qdzdx + Rdxdy);$



Подставляем:

$$\iint\limits_{\sigma}(x+2y-z)dydz$$

Значение z подставляем из уравнения плоскости:

$$x = 2y + 2z - 4; \quad z = \frac{1}{2}(x + 4 - 2y)$$

$$\Phi = -\int_0^2 dy \int_{2y-4}^{0}\left(x + 2y - \frac{x}{2} + 2 - y\right)dx = -\int_0^2 dy \int_{2i-4}^{0}\left(\frac{x}{2} + y + 2\right)dx = -\int_0^2 dy\left(\frac{x^2}{4} + yx + 2x\right)\Bigg|_{2y-4}^{0} =$$

$$= \int_0^2\left[\frac{(2y-4)^2}{4} + y(2y-4) + 2(y-4)\right] = \int_0^2[(2y-4)(2y-4+y+2)]dy = 2\int_0^2(y-2)(3y-2)dy =$$

$$= 2\int_0^2(3y^2 - 8y + 4)dy = 2(y^3 - 4y^2 + 4y)\Big|_0^2 = 2(8 - 16 + 8) = 0$$

2)Циркуляция вектора $\overline{F}$ по замкнутому контуру λ. Непосредственное вычисление.

$$C = \int_{\lambda} Pdx + \int_{\lambda} Qdy + \int_{\lambda} Rdz = \int_{\lambda}(x + 2y - z)dx;$$

Контур состоит из трёх отрезков.

$$C = \int_0^{-4} xdx + \int_0^{-4}(x + x + 4)dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{-4} + 2\int_0^{-4}(x+2)dx = 8 + 2\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^{-4} = 8 + 16 - 4*4 = 8$$

По теореме Стокса:

$$\oint\limits_{\lambda} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\sigma} rotFdS;$$

Угол между $\overline{F}$ и нормалью $\overline{n}$ равен $\pi/2$.

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y - z & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overline{j}*1 + \overline{k}(-2) = -\overline{j} - 2\overline{k}$$

$$\iint_{\sigma} rotF dS = -\iint_{\sigma} dxdz - 2\iint_{\sigma} dxdy = -2\int_{0}^{-4} dx \int_{0}^{\frac{x+4}{2}} dy = -2\int_{0}^{-4} \frac{x+4}{2} dx = -\left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{0}^{-4} = 8.$$

№414

$$\overline{F} = (12x + yz)\overline{i} + (12y + xz)\overline{j} + (12z + xy)\overline{k}$$

$$\overline{rot\overline{F}} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 12x + yz & 12y + xz & 12z + xy \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(12z + xy)}{\partial y} - \frac{\partial(12y + xz)}{\partial z}\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial(12z + xy)}{\partial x} - \frac{\partial(12x + yz)}{\partial z}\right) +$$

$$+\overline{k}\left(\frac{\partial(12y + xz)}{\partial x} - \frac{\partial(12x + yz)}{\partial y}\right) = \overline{i}(x - x) - \overline{j}(y - y) + \overline{k}(z - z) = 0$$

Следовательно, векторное поле F является потенциальным.

Найдем его потенциал:

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz + C,$$

т.е. $U(x,y,z) = \int_{0}^{x}(12x)dx + \int_{0}^{y} 12ydy + \int_{0}^{z}(12z + xy)dz + C = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + xyz + C$

В качестве начальной точки взята точка $M_0(0;0;0)$

$$div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 12; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 12; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 12$$

$\mathrm{div}\overline{F} = 12 + 12 + 12 = 36 \neq 0$, следовательно,

векторное поле $\overline{\mathrm{F}}$ не является соленоидальным.