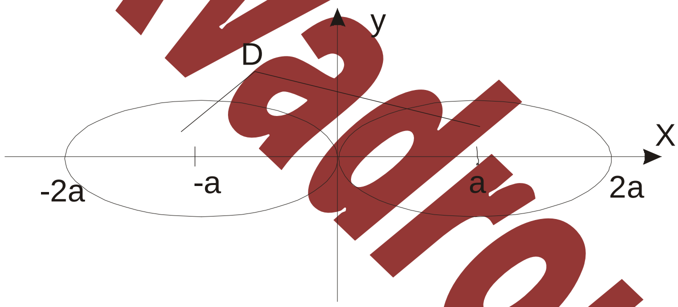
№373

Выполнить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах: $(a<0)$ $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2\left(4x^2+3y^2\right)$.



Перейдем от прямоугольных координат к полярным координатам:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\ x^2+y^2=\rho^2.$$

Тогда уравнение фигуры примет вид:

$\rho^6=a^2\rho^2\cos\varphi\left(\rho^2\cos^2\varphi+3\rho^2\right)$, т.е. $\rho^2=a^2\cos^2\varphi\left(\cos^2\varphi+3\right)$.

Из этого уравнения видно, что угол φ изменяется от $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=2\pi$.

Радиус-вектор может изменяться от $\rho=0$ до $\rho=\sqrt{a^2\cos^2\varphi\left(\cos^2\varphi+3\right)}$, тогда искомая площадь:

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{a^2\cos^2\varphi\left(\cos^2\varphi+3\right)}}\rho\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cos^2\varphi\left(\cos^2\varphi+3\right)=$$

$$\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}+\frac{6}{2}\right)d\varphi=\frac{a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\cos 2\varphi\right)\cdot\left(7+\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

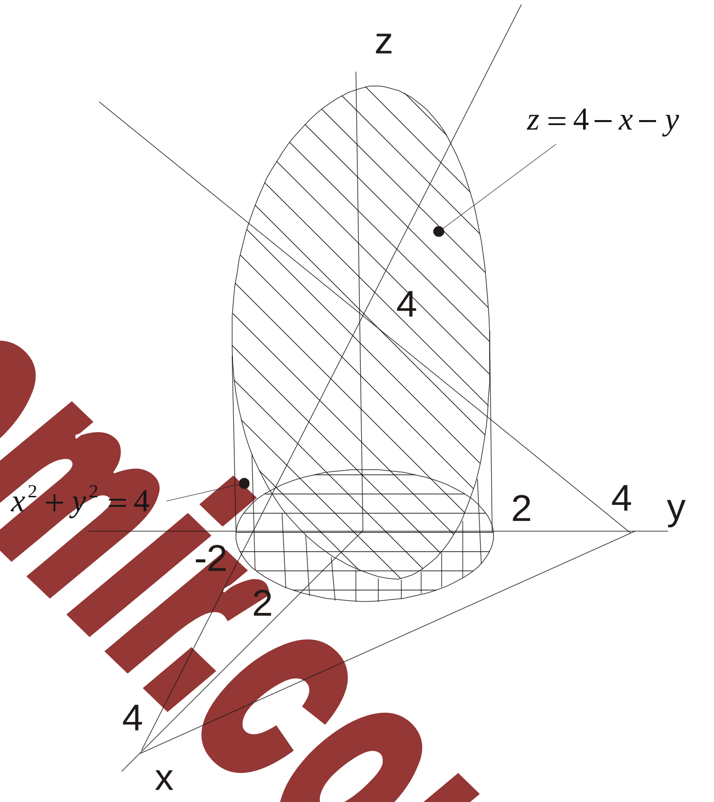
$$\frac{a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\left(7+8\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{a^2}{8}\left(\int\limits_0^{2\pi}7{,}5d\varphi+4\int\limits_0^{2\pi}\cos 2\varphi\,d(2\varphi)+\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}\cos 4\varphi\,d\varphi\right)=$$

$$\frac{a^2}{8}\left(7{,}5\varphi\Big|_0^{2\pi}+4\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{a^2}{8}\left(7{,}5(2\pi-0)+0+0\right)=\frac{15}{8}\pi a^2=5{,}89a^2(\text{кв.ед.})$$

№383

Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж данного тела и его проекции на плоскость xOy.

$z=0;\ z=4-x-y;\ x^2+y^2=4.$



Чертеж тела представлен на рисунке:

$x^2+y^2=4$ - уравнение боковой поверхности цилиндра, осью которого является ось Oz, а его радиус R=2;

$z=0$ - уравнение плоскости xOy;

$z=4-x-y$ - уравнение плоскости, отсекающей у координатных осей отрезки, равные 4.

Переходим к цилиндрическим $(x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi)$ координатам с пределами интегрирования:

$$0\le\varphi\le 2\pi;\ 0\le\rho\le 2;\ 0\le z\le 4-x-y=4-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

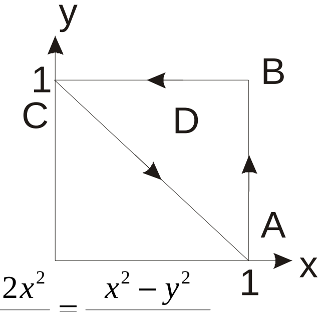
$$V=\iiint\limits_V \rho\, d\rho\, d\rho\, dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_0^{4-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(4-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)\rho\, d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(4\frac{\rho^2}{2}-(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\int_0^2\left(2\times4-(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{8}{3}\right)d\varphi=8\varphi\Big|_0^{2\pi}-\frac{8}{3}(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=8\times2\pi-\frac{8}{3}\left((0-0)-(1-1)\right)=16\pi(\text{куб.ед.})$$

№393

Вычислить криволинейный интервал $\oint\limits_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ вдоль границы L треугольника ABC, обходя ее против хода часовой стрелки если A(1,0), B(1,1), C(0,1). Выполнить чертеж.



Воспользуемся формулой Грина. Найдем частные производные от функций:

$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ и $Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$:

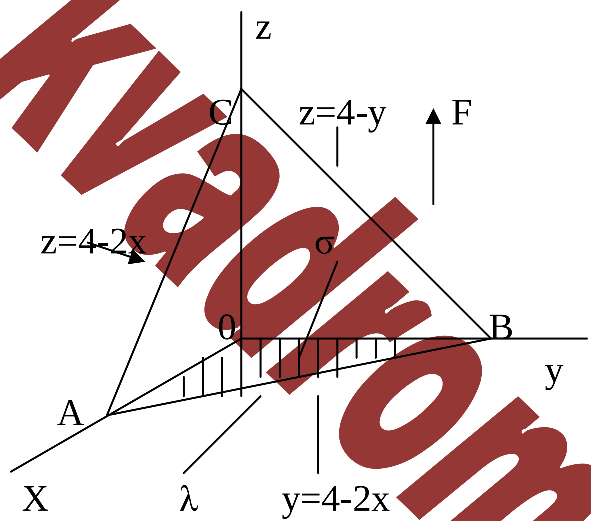
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-\left(x^2+y^2\right)+2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Тогда, т.к. по формуле Грина $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$ получим:

$\oint\limits_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \iint\limits_D \left(\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) dx\, dy = \iint\limits_D 0\cdot dx\, dy = 0$. (Здесь область D – есть треугольник ABC, ограниченный снизу прямой $y = 1 - x$, сверху – прямой $y = 1$, слева и справа – прямыми $x = 0$ и $x = 1$.)

№403

$\overline{F} = (x+7z)\overline{k} \qquad p: \quad 2x+y+z-4=0;$



Векторная функция $\overline{\mathrm{F}}$ направлена вдоль оси Z.

1. Поток вектора $\overline{\mathrm{F}}$ через поверхность σ.

$$\Phi = \iint_{\sigma} (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy);$$

$$\Phi = \iint Rdxdy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (x+7z)dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (x+7(4-3x-y))dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (x+28-14x-7y)dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (28-13x-7y)dy = \int_0^2 \left((28-13x)y - \frac{7y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{4-2x} = \int_0^2 \left((28-13x)(4-2x) - \frac{7}{2}(4-2x) \right) dx = 40\text{ед}.$$

2. Циркуляция вектора $\overline{\mathrm{F}}$ по контуру λ. Непосредственное вычисление.

$$C = \oint_{\lambda} Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{\lambda} (x+7z)dz = \int_0^4 \left(\frac{4-z}{2} + 7z \right) dz = \left(2z + \frac{13}{2} * \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^4 = 2(4-0) + \frac{13}{4}(4^2 - 0^2) = 60;$$

3. Циркуляция С. Теорема Стокса:

$$C = \oint_{\lambda} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (\overline{n}, rot\overline{F})dS;$$

Вычисляем rot $\overline{\mathrm{F}}$:

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & x+7z \end{vmatrix} = -\overline{j};$$

$C = \iint_S (rot\overline{F})_x dydz + (rot\overline{F})_y dxdz + (rot\overline{F})_z dxdy = -\iint_{D_{xz}} dxdz;$ где D_{xz} − проекция поверхности S на плоскость xz, область интегрирования.

$$C = -\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dz = -\int_0^2 (4-2x)dx = \left(-4x + \frac{2x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 = -4(2-0) + (2^2 - 0^2) = -8 + 4 = -4.$$

4. Поток векторного поля F через поверхность пирамиды. Используем теорему Остроградского - Гаусса.

$$\varPhi=\oiint_S \overline{F}\,\overline{dx}=\iiint_V div\overline{F}dV;$$

$$div\overline{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=7;$$

$$\varPhi=\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}dy\int_0^{4-2x-y}7dz=7\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}(4-2x-y)dy=7\int_0^2 dx\left[(4-2x)(4-2x)-\frac{(4-2x)^2}{2}\right]=$$

$$=\frac{7}{2}\int_0^2(4-2x)^2dx=-\frac{7}{4}\int_0^2(4-2x)^2d(4-2x)=-\frac{7}{12}(4-2x)^3\Big|_0^2=\frac{7*4^3}{12}=\frac{7*16}{3}=37{,}3.$$

5. Нахождение потока непосредственным вычислением:

$$\varPhi=\oiint(\overline{F},\overline{n})dS=\iint_{OAB}+\iint_{OAC}+\iint_{OBC}+\iint_{ABC};$$

Поток через грани AOC и COB равен нулю, поскольку вектора нормали граней $\overline{n}$ перпендикулярны $\overline{F}$;

$$\varPhi_1=\iint_{AOB}=\iint_{AOB}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=-\iint_{AOB}(x+7z)dxdy;$$

Этот инеграл с точностью до знака найден в п.1:

$\varPhi=-2{,}67$

$$\varPhi=\iint_{ABC}=\iint(x+7z)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}(x+7(4-2x-y))dy=\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}(28-13x-7y)dy$$

$$=\int_0^2\left[y\left(28-13x-\frac{7}{2}y\right)\right]_0^{4-2x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(4-2x)(56-26x-7(4-2x))dx=\frac{1}{2}\int_0^2(4-2x)(28-12x)dx=2\int_0^2(2-x)(14-6x)dx$$

$$=2\int_0^2(28-26x+6x^2)dx==4\int_0^2(14-13x+3x^2)dx=4x\left(14-\frac{13}{2}x+x^2\right)\Big|_0^2=8(14-13+4)=40;$$

$$\varPhi=\varPhi_1+\varPhi_2=-2{,}67+40=37{,}3.$$

4. Поток векторного поля F через поверхность пирамиды. Используем теорему Остроградского - Гаусса.

$$\varPhi = \oiint_S \overline{F}\,\overline{dx} = \iiint_V div\overline{F}dV;$$

$$div\overline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 7;$$

$$\varPhi = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{4-2x-y} 7dz = 7\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (4-2x-y)dy = 7\int_0^2 dx\left[(4-2x)(4-2x) - \frac{(4-2x)^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{7}{2}\int_0^2 (4-2x)^2 dx = -\frac{7}{4}\int_0^2 (4-2x)^2 d(4-2x) = -\frac{7}{12}(4-2x)^3\Big|_0^2 = \frac{7*4^3}{12} = \frac{7*16}{3} = 37{,}3.$$

5. Нахождение потока непосредственным вычислением:

$$\varPhi = \oiint(\overline{F},\overline{n})dS = \iint_{OAB} + \iint_{OAC} + \iint_{OBC} + \iint_{ABC};$$

Поток через грани AOC и COB равен нулю, поскольку вектора нормали граней $\overline{n}$ перпендикулярны $\overline{F}$;

$$\varPhi_1 = \iint_{AOB} = \iint_{AOB} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = -\iint_{AOB}(x+7z)dxdy;$$

Этот инеграл с точностью до знака найден в п.1:

$$\varPhi = -2{,}67$$

$$\varPhi = \iint_{ABC} = \iint(x+7z)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x}(x+7(4-2x-y))dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x}(28-13x-7y)dy$$

$$= \int_0^2 \left[y\left(28-13x-\frac{7}{2}y\right)\right]_0^{4-2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (4-2x)(56-26x-7(4-2x))dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4-2x)(28-12x)dx = 2\int_0^2 (2-x)(14-6x)dx$$

$$= 2\int_0^2 (28-26x+6x^2)dx == 4\int_0^2 (14-13x+3x^2)dx = 4x\left(14-\frac{13}{2}x+x^2\right)\Big|_0^2 = 8(14-13+4) = 40;$$

$$\varPhi = \varPhi_1 + \varPhi_2 = -2{,}67 + 40 = 37{,}3.$$

№413

$$\overline{F} = (10x - 3yz)\overline{i} + (10y - 3xz)\overline{j} + (10z - 3xy)\overline{k}$$

$$\overline{rot\overline{F}} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (10x - 3yz) & (10y - 3xz) & (10z - 3xy) \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial(10z - 3xy)}{\partial y} - \frac{\partial(10y - 3xz)}{\partial x}\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial(10z - 3xy)}{\partial x} - \frac{\partial(10x - 3yz)}{\partial z}\right) +$$

$$+\overline{k}\left(\frac{\partial(10y - 3xz)}{\partial x} - \frac{\partial(10x - 3yz)}{\partial y}\right) = \overline{i}(-3x + 3x) - \overline{j}(-3y + 3y) + \overline{k}(-3z + 3z) = 0$$

Следовательно, данное векторное поле $\overline{\mathrm{F}}$ вляется потенциальным. Найдём его потенциал.

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz + C., \quad \text{т.е.}$$

$$u(x,y,z) = \int_0^x 10x dx + \int_0^y 10y dy + \int_0^z (10z - 3xy)dz + C = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 3xyz + C.$$

Здесь , в качестве начальной точки взята $\mathrm{M}_0(0;0;0)$.

$$div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 10; \frac{\partial Q}{\partial y} = 10; \frac{\partial R}{\partial z} = 10$$

$div\overline{F} = 10 + 10 + 10 = 30 \neq 0$, следовательно, поле $\overline{\mathrm{F}}$ не является соленоидальным.