http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_9.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 9. Вариант 2. Номера 372, 382, 392, 402, 412

№372

Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах (a > 0).

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(4x^2+y^2)$$

Запишем уравнение данной кривой в системе координат:

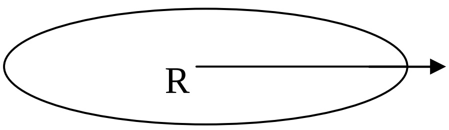
$$\begin{cases} x = p\cos\phi \\ y = p\sin\phi \end{cases} \quad \text{тогда} \quad x^2+y^2 = p^2\cos^2\phi + p^2\sin^2\phi = p^2$$

$$p^4 = a^2(4p^2\cos^2\phi + p^2\sin^2\phi) \Rightarrow$$

$$p^2 = a^2(3\cos^2\phi + 1) \quad \phi \in [0;2\pi]$$

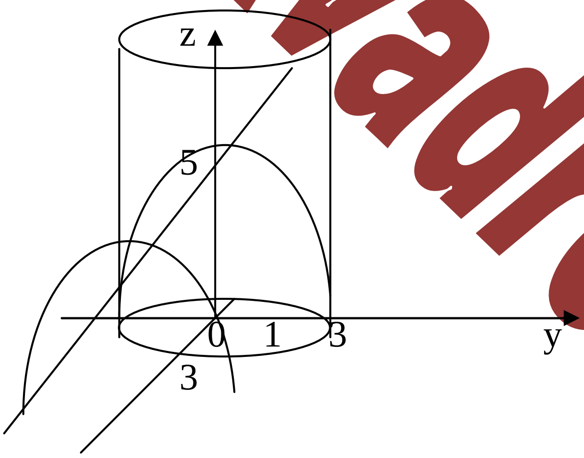
$$S = \iint_{2\pi} dxdy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{a\sqrt{(3\cos^2\phi+1)}} pdp = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi * p^2\Big|_0^{a\sqrt{(3\cos^2\phi+1)}} = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(3\cos^2+1)d\phi = \frac{3a^2}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\phi)d\phi +$$

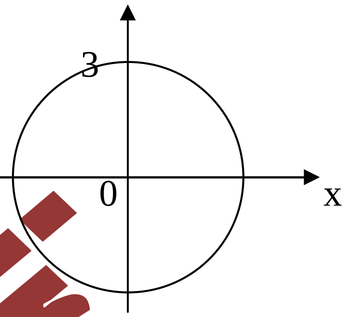
$$+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{3a^2}{4}\left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\phi\Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2}{4}(2\pi+0) + \frac{a^2}{2} * 2\pi = \frac{5a^2}{2}\pi(\text{кв.ед.}).$$



№382

z=0;   z=9-y^2;   x^2+y^2=9





$$V=\iiint dxdydz$$

$$x = p\cos\varphi \qquad 0\le p\le 3$$

$$y = p\sin\varphi \qquad 0\le \varphi\le 2\pi$$

$$z = z \qquad 0\le z\le 9-p^2\sin^2\varphi$$

$$\varphi = p$$

$$V=\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{9-p^2\sin^2\varphi} pdpd\varphi dz=\int_0^3 pdp*\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{9-p^2\sin^2\varphi}dz=\int_0^3 pdp\int_0^{2\pi}d\varphi*z\Big|_0^{9-p^2\sin^2\varphi}=\int_0^3 pdp\int_0^{2\pi}d\varphi(9-p^2\sin^2\varphi)=$$

$$=\int_0^3 pdp*\left(p\varphi\Big|_0^{2\pi}-p^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right)=\int_0^3 pdp\left(9(2\pi-0)-\frac{p}{2}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\right)=$$

$$=\int_0^3 pdp\left(18\pi-\frac{p}{2}\left(2\pi-0-\frac{1}{2}(\sin 4\pi-\sin 0)\right)\right)=\int_0^3 pdp\left(18\pi-\frac{p}{2}\left(2\pi-0-\frac{1}{2}(\sin 4\pi-\sin 0)\right)\right)=$$

$$=\int_0^3 pdp\left(18\pi-\frac{p}{2}\left(2\pi-\frac{1}{2}(0-0)\right)\right)=\int_0^3 pdp(18\pi-p\pi)=\pi\int_0^3(`18-p)pdp=\pi\int_0^3(18p-p^2)dp=$$

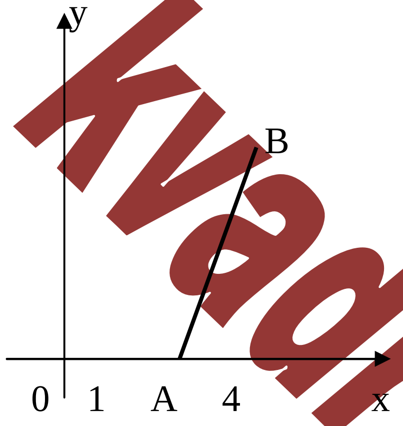
$$=\pi\left(18\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{3}\right)\Big|_0^3=\pi\left(9(3^2-0^2)-\frac{1}{3}(3^3-0^3)\right)=\pi(81-9)=72\pi(\textit{куб.ед.}).$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_9.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 9. Вариант 2. Номера 372, 382, 392, 402, 412

№392

{(x+y)dx-(x-y)dy

L=OAB, O(0;0), A(2;0), B(4;5)



Прямая OA имеет уравнение $y = 0$. Прямая AB имеет уравнение

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{5} \text{ или}$$

$$5x - 10 = 2y \quad \text{или} \quad н = \frac{5}{2}x - 5$$

$$\int_L p(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{p(x_1\phi(x)) + \phi'(x)Q(x_1\phi(x))\}dx$$

Таким образом:

$$\int_L (x+y)dx - (x-y)dy = \int_0^2 (x+0) - 0(x-0)dx + \int_2^4 \left(\left(x + \frac{5}{2}x - 5\right) - \frac{5}{2}\left(x - \frac{5}{2}x + 5\right)\right)dx =$$

$$= \int_0^2 xdx + \int_2^4 \left(x + \frac{5}{2}x - 5 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}x - \frac{25}{2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{29}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 - \frac{35}{2}x\Big|_2^4 = \frac{1}{2} * 4 + \frac{29}{8}\left((6-4) - \frac{35}{2}(4-2)\right) =$$

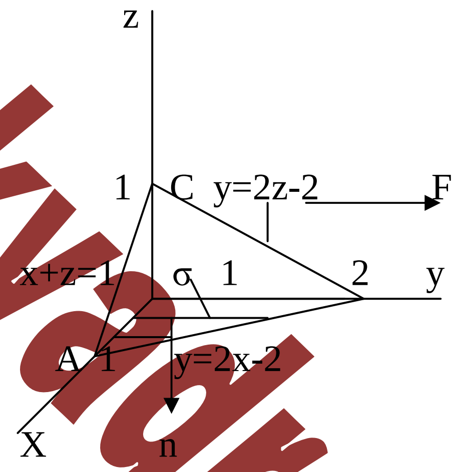
$$= 2 + \frac{87}{2} - 35 = \frac{4 + 87 - 70}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5.$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_9.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 9. Вариант 2. Номера 372, 382, 392, 402, 412

№402

Векторная функция $\overline{F} = (y - x + z)\,\overline{j}$ $\quad N(2;-1;2)$

Плочскость $P:\ 2x - y + 2z - 2 = 0$



Векторная функция $\overline{F}$ напрвления вдоль оси y.

1. Поток вектора $\overline{F}$ через поверхность σ.

Поток:

$\overline{F} = (y - x + z)\,j = (0; y - x + z; 0)$

$\varPhi = \iint\limits_S (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy) = \iint\limits_S (y - x + z)dxdz = 0;$

Поток равен нулю, поскольку вектор нормали к поверхности $\overline{n} \perp \overline{F}$:

2. Циркуляция вектора F

по контуру λ. Непосредственное интегрирование

$C = \oint\limits_\lambda Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_\lambda (y - x + z)dy.$

Контур λ состоит из трёх отрезков: OA, OB и BA, причём интеграл по AO равен нулю:

$C = \int\limits_{OB} + \int\limits_{BA};$

$\int\limits_{OB} = \int\limits_0^2 ydy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2 = 2;$

$\int\limits_B^A = \int\limits_2^0 \left[y - \left(\frac{y+2}{2} \right) \right] dy = \left(\frac{y^2}{4} - y \right) = \frac{4}{4} - \frac{0}{4} - 2 + 0 = 1 - 2 = -1$

Циркуляция $C = 2 - 1 = 1;$

3. Циркуляция вектора $\overline{F}$. Теорема Стокса.

Согласно теореме Стокса:

$C = \oint Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S (\overline{n}, rot\overline{F})ds;$

Вычисляем вектор $rot\overline{F}$:

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & y-x+z & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} - \bar{k};$$

$$C = \iint_S (rot\overline{F})_z\, dxdy = -\int_0^1 dx \int_0^{2x-2} dy = -2\int_0^1 (x-1)dx = -2\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^1 = -2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 1;$$

4. Поток вектороного поля $\overline{\mathrm{F}}$ через поверхность пирамиды. Теорема Остроградского - Гаусса.

$$\Phi = \oint\!\!\oint_S \overline{F}\,\overline{ds} = \iiint_V div\overline{F} dV;$$

$$div\overline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1;$$

$$\Phi = \int_0^1 dx \int_0^{2x-2} dy \int_0^{\frac{(2-2x+y)}{2}} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{2x-2} (2(1-x)+y)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\left[2(1-x)*2(x-1) + \frac{1}{2}(2x-2)^2\right] =$$

$$= \int_0^1 (1-x)^2(-2+1)dx = -\int_0^1 (x-1)^2 dx = -\frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3};$$

5. Нахождение потока непосредственным интегрированием:

$$\Phi = \oint\!\!\oint_S (\overline{F}, \bar{n})ds = \iint_{OAB} + \iint_{OAC} + \iint_{OBC} + \iint_{ABC};$$

Поток вектора $\overline{\mathrm{F}}$ через грани OBC и OAB равен 0, поскольку вектор нормали $\bar{\mathrm{n}} \perp \overline{\mathrm{F}}$.

$$\Phi_1 = \iint_{OAC} = \iint_{OAC} Qdxdz = -\int_0^1 dx \int_0^{-x} (z-x)dz = -\int_0^1 dx\left(\frac{z^2}{2} - zx\right)\Bigg|_0^{-x} = -\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x^2\right)dx = -\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2};$$

$$\Phi_2 = \iint_{ABC} = -\int_0^1 dx \int_0^{-x} ((2x+2z-2) - x + z)dz = -\int_0^1 dx \int_0^{-x} (x+3z-2)dz = -\int_0^1 dx\left[(x-2)z + \frac{3z^2}{2}\right]_0^{-x} =$$

$$= -\int_0^1 \left[-x(x-2) + \frac{3x^2}{2}\right]dx = -\int_0^1 \left(-x^2 - 2x + \frac{3x^2}{2}\right)dx = -\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)dx = -\left(\frac{x^3}{6} - x^2\right)\Bigg|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6};$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

№412

$$F(8x-5yz)i+(8y-5xz)j+(8z-5xy)k$$

$$rotF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 8x-5yz & 8y-5xz & 8z-5xy \end{vmatrix}=i\frac{\partial}{\partial y}(8z-5xy)+j\frac{\partial}{\partial z}(8x-5xz)+k\frac{\partial}{\partial x}(8y-5xz)-$$

$$-k\frac{\partial}{\partial y}(8x-5yz)$$

$$-j\frac{\partial}{\partial x}(8z-5xy)-i\frac{\partial}{\partial z}(8y-5xz)=-i5x-5yj-5zk+5xi+5yj+5zk=0$$

$\Rightarrow$ поле F является потенциальным, найдём его потенциал по формуле:

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}p(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C.$$

$$u(x,y,z)=\int_0^x(8x)dx+\int_0^y 8ydy+\int_0^z 8zdz-\int_0^z 5xydz+C=\left.\frac{8x^2}{2}\right|_0^x+\left.\frac{8y^2}{2}\right|_0^y+\left.\frac{8z^2}{2}\right|_0^z-5xyz\Big|_0^z=$$

$$=4x^2+4y^2+4z^2-5xyz$$

$$divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$divF=\frac{\partial(8x-5yz)}{\partial x}+\frac{\partial(8y-5xz)}{\partial y}+\frac{\partial(8z-5xy)}{\partial z}=8+8+8=24\neq 0\Rightarrow \text{поле не является соленоидальным.}$$