http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_7.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 7. Вариант 8. Задачи 288, 298, 308, 318

Kvadromir.com

№288

$$a)\quad \int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx;$$

$$\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int zdz = z^2 + c = (arctg\sqrt{x})^2 + c$$

$$arctg\sqrt{x};\quad dz = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\sqrt{x}\right)' dx$$

$$dz = \frac{dx}{(1+x)2\sqrt{x}};\quad \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2dz$$

Провека :

$$(arctg^2\sqrt{x}+C)' = 2*arctg\sqrt{x}(\sqrt{x})'*(arctg\sqrt{x})' = 2arctg\sqrt{x}*\frac{1}{2\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2)} = \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$б)\int x\sin x\cos xdx$$

$$\int x\sin x\cos xdx = \frac{1}{2}\int x\sin 2xdx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}x*\int\cos 2xdx\right) = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C.$$

$$\int udv = uv - \int vdu;$$

$$u = x;\qquad du = dx$$

$$dv = \sin 2x;\quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\left(-\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C\right)' = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{x*2}{4}*\sin 2x + \frac{1}{8}*2\cos 2x = \frac{x\sin 2x}{2} = x*\sin x\cos x$$

$$в)\int \frac{x^2dx}{x^4-81};$$

$$I = \int \frac{x^2dx}{x^4-81};$$

$$\frac{x^2}{x^4-81} = \frac{x^2}{(x^2-9)(x^2+9)} = \frac{(x^2-9)+(x^2+9)}{2(x^2-9)(x^2+9)} = \frac{1}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2(x^2-9)}$$

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+9} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{2}*\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2*2*3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \frac{1}{6}arctg\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

$$г)\int\frac{dx}{3\cos x + 4\sin x};\qquad I = \int\frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$$

$$tg\frac{x}{2} = t;\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2arctg;\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$I = \int\frac{2dt}{\left(\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{8t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int\frac{2dt}{3-3t^2+8t} = -\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2-\frac{8}{3}x-1} = -\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{25}{3}} =$$

$$= -\frac{2}{3} * \frac{1}{2*\frac{5}{3}} \ln\left|\frac{t-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}}{t-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}\right| + C = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-3}{t+\frac{1}{3}}\right| + C = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3t-9}{3t+1}\right| + C = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3tg\frac{x}{2}-9}{3tg\frac{x}{2}+1}\right| + C.$$

№298

Вычислить приближенные значения определенного интеграла: $\int_a^b f(x)dx$

с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

$$\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3 + 36}\,dx.$$

$I = \int_{-3}^{7} \sqrt{x^3 + 36}\,dx.$ $\quad n = 10 : h = \frac{7+3}{10} = 1;$ $\quad x_i = -3 + ih,\ \ i = 0,1...10;\ \ y_i = f(x_i)$

$f(x) = \sqrt{x^3 + 36}$

	0	1	2	3	4
x_i	-3	-2	-1	0	1
y_i	3	5,292	5,916	6	6,083

	5	6	7	8	9	10
x_i	2	3	4	5	6	7
y_i	6,633	7,937	10	12,689	15,875	19,468

$$I = \frac{n}{3}(y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)) =$$

$$= \frac{1}{3}(3 + 19,468 + 2(5,916 + 6,083 + 7,937 + 12,689) + 4(5,292 + 6 + 6,633 + 10 + 15,875)) = 87,638.$$

Kvadromir.com

Kvadromir.com

№308

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}; \quad I=\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0+}\int_{2+\varepsilon_1}^3 \frac{dx}{(x-2)^2}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_0^{2-\varepsilon_2} \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$\frac{1}{(x-2)^2}$ неограничена b(*) $x=2$

$$\lim_{x\to 2\pm}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty; \quad \int\frac{dx}{(x-2)^2}=\int (x-2)^{-2}d(x-2)=-(x-2)^{-1}=-\frac{1}{x-2}$$

$$I=\lim_{\varepsilon_1\to 0+}\left(-\frac{1}{x-2}\right)\Bigg|_{2+\varepsilon_1}^{3}+\lim_{\varepsilon_{21}\to 0}\left(-\frac{1}{x-2}\right)\Bigg|_{0}^{2-\varepsilon_2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{2}\right)=\infty$$

Интеграл расходится.

№318

Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(6;8)$,

$$L=\int_A^B\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx.$$

$$y'=\left((x-2)^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(y')^2=\frac{9}{4}(x-2); \qquad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{\frac{9}{4}(x-2)+1}=\left(\frac{9}{4}x-\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$L=\int_2^6\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x-2}\right)^2}\,dx=\int_2^6\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-2)dx}=\int_2^6\sqrt{\frac{4+9x-18}{4}}dx=\int_2^6\sqrt{\frac{9x-14}{4}}dx=$$

$$=\int_2^6\sqrt{\frac{9}{4}\left(x-\frac{14}{9}\right)}dx=\frac{3}{2}\int_2^6\sqrt{x-\frac{14}{9}}dx=\frac{3}{2}\left.\frac{\sqrt{\left(x-\frac{14}{9}\right)^3}}{\frac{3}{2}}\right|_2^6=\sqrt{\left(6-\frac{14}{9}\right)^3}-\sqrt{\left(2-\frac{14}{9}\right)^3}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{40}{9}\right)^3}-\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3}=\sqrt{\frac{4^3*10^3}{9^3}}-\sqrt{\frac{4^3}{9^3}}=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\approx 9{,}673.$$