http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_7.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 7. Вариант 7. Задачи 287, 297, 307, 317

№287

$$a)\int\frac{(x+arctgx)dx}{1+x^2}=\int\frac{xdx}{1+x^2}+\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}+\int arctgx\,d(arctgx)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}arctg^2x+C$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}arctg^2x+C\right)'=\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}*2arctgx\frac{1}{1+x^2}=\frac{x+arctgx}{1+x^2}$$

$$б)\int x\ln(x^2+1)dx=\frac{1}{2}\int\ln(x^2+1)d(x^2+1)=\frac{1}{2}\int\ln t\,dt$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\ln(x^2+1)\\ dv=d(x^2+1)\\ v=x^2+1\\ du=\dfrac{2x}{x^2+1}dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left((x^2+1)\ln(x^2+1)-2\int xdx\right)=\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+C$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+C\right)'=\frac{1}{2}\left(2x\ln(x^2+1)+\frac{x^2+1}{x^2+1}*2x\right)-\frac{1}{2}2x=x\ln(x^2+1)+x-x=$$

$$=x\ln(x^2+1).$$

$$в)\int\frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}dx=\int\frac{x^2-3}{(x^2+3)(x^2+2)}dx$$

$$\frac{x^2-3}{(x^2+3)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2}=\frac{Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3+3Cx+Dx^2+3D}{(x^2+3)(x^2+2)}$$

$$\begin{array}{l|l}x^3 & A+C=0\\ x^2 & B+D=1\\ x' & 2A+3C=0\\ x^0 & 2B+3D=-3\end{array}$$

$A=-C$

$-2C+3C=0\Rightarrow C=0,\quad A=0$

$B=1-D$

$2(1-D)+3D=-3$

$2-2D+3D=-3$

$D=-5,\quad B=1+5=6$

$$\int\frac{x^2-3}{(x^2+3)(x^2+2)}dx=\int\frac{6dx}{x^2+3}-\int\frac{5dx}{x^2+2}=\frac{6}{\sqrt{13}}\int\frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}-\frac{5}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{5}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

$$г)\int\frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx=\left|\begin{matrix}x+5=t^6\\dx=6t^5dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t^3}{1+t^2}6t^5dt=6\int\frac{t^8}{1+t^2}dt=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+arctgt\right)+C=\frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{x+5}\right)^7-\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x+5}\right)^7+2\left(\sqrt[6]{x+5}\right)^3-$$

$$-6\sqrt[6]{x+5}+6arctg(\sqrt[6]{x+5})+C.$$

№297

$$\int_1^{11}\sqrt{x^3+3}dx$$

Определим значение подынтегральной функции для следующих значений аргумента:

$x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4,\ x_4=5,\ x_5=6,\ x_6=7,\ x_7=8,\ x_8=9,\ x_9=10,\ x_{10}=11.$

Находим соответствующие значения $f(x)=\sqrt{x^3+3}$

$y_0=2,\quad y_1=\sqrt{11}=3{,}317,\quad y_2=\sqrt{30}=5{,}477,\quad y_3=\sqrt{67}=8{,}185,\quad y_4=\sqrt{128}=11{,}314,$

$y_5=\sqrt{219}=14{,}799,\quad y_6=\sqrt{346}=18{,}601,\quad y_7=\sqrt{515}=22{,}694,\quad y_8=\sqrt{732}=27{,}055,$

$y_9=\sqrt{1003}=31{,}670,\quad y_{10}=\sqrt{1334}=36{,}524.$

Подставляем эти данные в формулу Сипсона при $h=\frac{11-1}{10}=1$

$$\int_1^{11}\sqrt{x^3+3}dx\approx\frac{h}{3}[y_0+y_{10}+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]=$$

$$=\frac{1}{3}[2+36{,}524+4(3{,}317+8{,}1815+14{,}799+22{,}694+31{,}670)+2(15{,}477+11{,}314+18{,}601+27{,}055)]=$$

$$=\frac{1}{3}[38{,}524+322{,}66+124{,}894]=162{,}026.$$

№307

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^b=\lim_{b\to\infty}(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2))=\infty$$

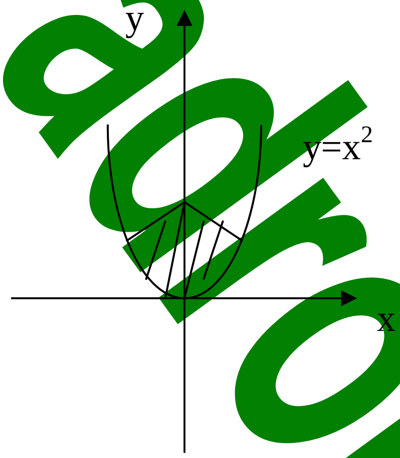
Т.е. несобственный интеграл расходится.

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_7.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 7. Вариант 7. Задачи 287, 297, 307, 317

№317

$$y=\frac{1}{1+x^2},\ y=x^2$$

$$V_y=\pi\int_a^b (x(y))^2\,dy$$



$$y=\frac{2}{1+x^2}\Rightarrow 1+x^2=\frac{2}{y}$$

$$x^2=\frac{2}{y}-1$$

$$\frac{2}{1+x^2}=x^2$$

$$2=x^2+x^4$$

$$D=1+8=9$$

$$x_1^2=\frac{-1-3}{2}=-2$$

$$x_2^2=\frac{-1+3}{2}=1\Rightarrow x_2^{(1)}=1;\ x_2^{(2)}=-1$$

$$V_y=\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^2\left(\frac{2}{y}-1\right)dy=\frac{1}{2}\pi y^2\Big|_0^1+\pi(2\ln(y)-y)\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}+\pi(2\ln 2-2-2\ln 1+1)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\pi(\ln 4-1)(\text{куб.ед.})\approx 2{,}78\,\text{куб.ед.}$$