http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_7.html — решебник Арутюнова Ю.С.
Контрольная работа 7. Вариант 4. Задачи 284, 294, 304, 314

№284

а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)} = \int \frac{dtgx}{3tgx+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3tgx+1)}{3tgx+1} = \frac{1}{3} ln|3tgx+1| + c$

Проверка : $\left(\frac{1}{3}\ln|3tgx+1|+c\right)' = \frac{1}{3} * \frac{1}{3tgx+1} * \frac{3}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\frac{3}{\cos^2 x(3tgx+1)} = \frac{1}{\cos^2 x(3tgx+1)};$

б) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} u = \arcsin x \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dV = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} * dx \\ V = -\sqrt{1-x^2} \end{array}\right] = -\arcsin x\sqrt{1-x^2} +$

$+\int \sqrt{1-x^2} * \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin x * \sqrt{1-x^2} + x + C;$

Проверка :

$(-\arcsin x * \sqrt{1-x^2} + x + C)' = -1 - \frac{\arcsin x}{2} * \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} + 1 = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{x^2(x+1)+2(x+1)} = \int \frac{dx}{(x+1)*(x^2+2)}$

$\frac{1}{(x+1)*(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{Ax^2+2A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)*(x^2+2)}$

$x^2 \,|\, A+B=0$

$x^1 \,|\, B+C=0$

$x^0 \,|\, 2A+C=1$

$A=-B, \quad D=-C, \quad -2B-B=1; \qquad B=-\frac{1}{3}; \quad C=\frac{1}{3}; \quad A=\frac{1}{3}$

$\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+2}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| +$

$+\left(-\frac{1}{6}\int\frac{dx^2}{x^2+2}\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\int\frac{d\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x^2}{2}+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+2| + \frac{1}{3\sqrt{2}} arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

$\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx = \left[\begin{array}{l} 1+x=t^6 \\ x=t^6-1 \\ dx=6t^5 * dt \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)^2+t^3}{t^2} * 6t^5 * dt =$

$= 6\int (t^{12}-2t^6+1+t^3)*t^3dt = 6\left[\int t^{15}dt - 2\int t^9dt + \int t^3dt \int t^6 dt\right] =$

$= \frac{6t^{16}}{16} - 12*\frac{t^{10}}{10} + 6*\frac{t^4}{4} + 6*\frac{t^7}{7} + C = \frac{3}{8}(1+x)^{3/8} - \frac{6}{5}(1+x)^{5/3} + \frac{3}{2}(1+x)^{2/3} + \frac{6}{7}(1+x)^{7/6} + C.$

№294

$\int_0^{10}\sqrt{x^3+5}dx = I$

Нужно определить значение подинегральной функции для следующих значений аргумента:

$(h=1): \; x_0=0; x_1=1; x_2=2; x_3=3; x_4=4; x_5=5; x_6=6; x_7=7; x_8=8; x_9=9; x_{10}=10.$

$y_0=2{,}236; y_1=2{,}449; y_2=3{,}606; y_3=5{,}657; y_4=8{,}307; y_5=11{,}402; y_6=14{,}866; y_7=18{,}655;$

$y_8=22{,}738; y_9=27{,}092; y_{10}=31{,}702.$

Подставляем данныев формулу Симпсона:

$$I=\frac{1}{3}(y_0+y_{10}+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8))=\frac{1}{3}(2{,}236+31{,}702+4(2{,}449+$$

$$+5{,}658+11{,}402+18{,}655+27{,}092)+2(3{,}606+8{,}304+14{,}866+22{,}738))=$$

$$=\frac{1}{3}(33{,}938+261{,}0{,}24+99{,}034)=131{,}332.$$

№304

$$\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}=\lim_{b=1}\int_0^b\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^3}}=-\frac{1}{3}\lim_{b\to1}\int_0^b\frac{d(-x^3+1)}{\sqrt{1-x^3}}=-\frac{1}{3}\lim_{b\to1}2(1-x)^{1/2}\Big|_0^b=-\frac{2}{3}\lim_{b\to1}\left[(1-b)-(1-0)^{1/2}\right]=$$

$$=-\frac{2}{3}[0-1]=\frac{2}{3}.$$

Несобственный интеграл сходится и его значение равно $\frac{2}{3}$.

№314

$r=4\sin 2\varphi$

Площадь фигуры найдём по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2d\varphi$$

Получаем:

$$S=4\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\sin^2 2d\varphi=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4\varphi}{2}d\varphi=16\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=16\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin2\pi-0+\frac{1}{4}\sin0\right)=8\pi(\text{кв.ед}).$$