№281

$$a)\int e^{\sin 2x}\sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx = \int e^{\sin^2 x} 2\sin x\cos x dx =$$

Сделаем замену

$t = \sin^2 x$

$dt = (\sin^2 x)' dx = 2\sin x(\sin x)' dx = 2\sin x\cos x dx = \sin 2x dx$

$\int e^t dt = e^t + C = e^{\sin^2 x} + C.$

Проверка: $(e^{\sin^2 x} + C)' = e^{\sin^2 x}(\sin^2 x)' + 0 = e^{\sin^2 x} * 2\sin x\cos x = e^{\sin^2 x} * \sin 2x$

$б)\ \int arctg\sqrt{x}dx$

Используем формулу интегрирования по частям

$u = arctg\sqrt{x}$

$dv = dx$

$$du = (arctg\sqrt{x})' dx = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} * (\sqrt{x})' dx = \frac{1}{1+x} * \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx \quad v = \int dx = x$$

$t = \sqrt{x}$

$$dt = (\sqrt{x})' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$2\sqrt{x}dt = dx; \quad dx = 2tdt$

$$\int arctg\sqrt{x}dx = arctg\sqrt{x} * x - \int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} * xdx = xarctg\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{t * 2tdt}{1+t^2} dt =$$

$$= xarctg\sqrt{x} - \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = xarctg\sqrt{x} - \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = xarctg\sqrt{x} - \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= xarctg\sqrt{x} - t + arctgt + C = xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C.$$

Проверка:

$$\left(xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C\right)' = 1 * arctg\sqrt{x} + x * \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} * \left(\sqrt{x}\right)' - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} * \left(\sqrt{x}\right)' + 0 =$$

$$= arctg\sqrt{x} + \frac{x}{1+x} * \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x} * \frac{1}{2\sqrt{x}} = arctg\sqrt{x} + \frac{x+1}{(1+x) * 2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = arctg\sqrt{x}$$

$$в)\int \frac{dx}{x^3+8} = \int \frac{dx}{(x+2)(x^2-2x+4)} = I$$

Разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби

$$\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} = \frac{Ax^2-2Ax+4A+Bx^2+2Bx+Cx+2C}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0 \\ x^1 & -2A+2B+C=0 \Rightarrow \\ x^0 & 4A+2C=1 \end{array} \quad \begin{array}{c} A=-B \\ -4A+C=0; \quad C=4A \end{array} \quad \begin{array}{c} 4A+2*4A=1 \\ 12A=1 \\ A=\frac{1}{12} \quad B=-\frac{1}{12} \quad C=\frac{1}{3} \end{array}$$

$$I=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}\ln(x+2)-\frac{1}{12}\int\frac{x}{(x-1)^2+3}dx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}=\frac{1}{12}\ln(x+2)-$$

$$-\frac{1}{12}\int\frac{(x-1)}{(x-1)^2+3}dx-\frac{1}{12}\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}=\frac{1}{12}\ln(x+2)-\frac{1}{24}\ln((x-1)^2+3)+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\ln|x^2-2x+4|+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$$

$$г)\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\begin{bmatrix}Замена: \\ x+1=t^3 \\ dx=3t^2dt\end{bmatrix}=\int\frac{3t^2dt}{1+t}=3\int\left(t-\frac{t}{1+t}\right)dt=3\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{3t^2}{2}-3t+3\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)+1\right)+C.$$

№291

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx$$

Найдём значение функции $f(x)=\sqrt{x^3+16}$ для значений аргумента $x_0=-2; x_1=-1;$
$x_2=0;\ x_3=1;\ x_1=-2;\ x_5=3;\ x_6=4;\ x_7=5;\ x_8=6;\ x_9=7;\ x_{10}=8;$

Получаем значение функций:

$y_0=\sqrt{-8+16}=2{,}828;\ \ y_1=\sqrt{-1+16}=3{,}873;\ \ y_2=\sqrt{16}=4;\ \ y_3=\sqrt{1+16}=4{,}123;\ y_4=\sqrt{8+16}=4{,}899;$
$y_5=\sqrt{27+16}=6{,}557;\ \ y_6=\sqrt{64+16}=8{,}944;\ \ y_7=\sqrt{125+16}=11{,}874;\ \ y_8=\sqrt{216+16}=15{,}232;$
$y_9=\sqrt{343+16}=18{,}947;\ \ y_{10}=\sqrt{512+16}=22{,}978.$

По формуле Сипсона:

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx\approx\frac{h}{3}(y_0+y_{10}+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8))\approx\frac{1}{3}(2{,}828+22{,}978+$$

$$+4(3{,}873+4{,}123+6{,}557+11{,}874+18{,}947)+2(4+4{,}899+8{,}944+15{,}232))\approx\frac{1}{3}(25{,}806+181{,}496+66{,}15)\approx$$

$$\approx 91{,}151.$$

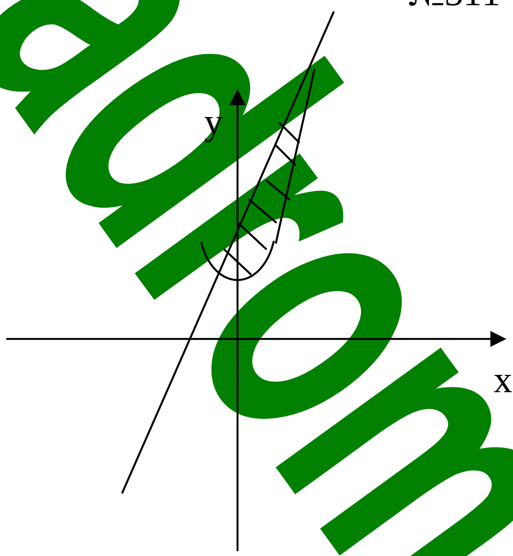
http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_7.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 7. Вариант 1. Задачи 281, 291, 301, 311

№301

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^{-x^2}\Big|_0^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2}-1\right) = -\frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится.

№311



$y = 3x^2+1, \qquad y = 3x+7$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Найдём точки пересечения $y = 3x^2+1, \quad y = 3x+7$

$3x^2+1 = 3x+7$

$3x^2-3x-6=0$

$x^2-x-2=0$

$D = 1+8 = 9;$

$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1; \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2;$

Таким образом: $a=-1; b=2$

$$S = \int_{-1}^{2}(3x+7-3x^2-1)dx = \int_{-1}^{2}(3x+6-3x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2}+6x-x^3\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 3*\frac{4}{2}+12-8-\frac{3}{2}+6-1 =$$

$$= 15-\frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5(\text{кв.ед.}).$$