№239

$$z=\sin(x+ay);\qquad z'(x)=\cos(x+ay);\qquad z''_{xx}=-\sin(ay+x)$$

$$z'_y=a\cos(x+ay);\qquad z''_{yy}=-a^2\sin(x+ay),\quad \text{тогда}$$

$$z''_{yy}-a^2z''_{xx}=-a^2\sin(x+ay)+a^2\sin(x+ay)=0.$$

№249

$z=2xy+3y^2-5x;\qquad A(3;4);\qquad B(3{,}04;3{,}95)$

1) $z_1=z(B)=2*3{,}04*3{,}95+3(3{,}95)^2-5*3{,}04=55{,}6235$

2) $z(A)=2*3*4+3*4^2-5*3=57$

$\Delta x=3{,}04-3=0{,}04$

$\Delta y=3{,}95-4=-0{,}05;\qquad z'_x=2y-5\Rightarrow z'_x(A)=2*4-5=3$

$z'_y=2x+6y\Rightarrow z'_y(A)=2*3+6*4=30,\qquad$ тогда

$\overline{z}_1=z(A)+z'_x(A)\Delta x+z'_y(A)\Delta y=57+3+0{,}04-30*0{,}05=55{,}62$

3) $\Delta=|z_1-\overline{z}_1|=0{,}0035$

$$\delta=\frac{\Delta}{z_1}100\%=\frac{0{,}0035}{55{,}6238}*100\%=0{,}006\%$$

4) Так как $z_0=z(x_0;y_0)=2x_0y_0+3y_0^2-5x_0$, то получаем:

$z-2x_0y_0-3y_0^2+5x_0=(2y_0-5)(x-x_0)+(2x_0+6y_0)(y-y_0)\Rightarrow$

$\Rightarrow(2y_0-5)x+(2x_0+6y_0)y-z-2x_0y_0-3y_0^2$ - уравнение касательной плоскости.

$z_0=2*3*4+3*4^2-5*3=57$

$z-z_0=z'_x(x-x_0)+z'_y(y-y_0)$

$z-57=3(x-3)+30(y-4)$

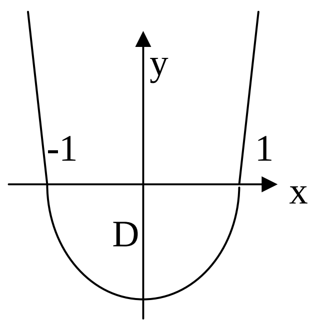
$z=57+3x-9+30y-120$

$z=3x+30y-72.$

№259

$z=x^2+xy-2;\quad 4x^2-4\le y\le 0;$ D изобразим плоскость на рисунке. Как известно, непрерывна в замкнутой области функция принимает свои наибольшие и наименьшие значения либо внутри области - в точках экстремума, либо на границе

Исследуем:



$$\begin{cases} z'x = 2x + y = 0 \\ z'y = x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z(0;0) = -2$$

$y = 0; \quad x \in [-1;1] \Rightarrow \tilde{z}(x) = x^2 - 2$

$\dfrac{d\tilde{z}}{dx} = 2x = 0$

$a) z(-1) = z(1) = -1$

$y = 4x^2 - 4; \quad x \in (-1;1) \Rightarrow$

$\tilde{z}(x) = x^2 + x(4x^2 - 4) - 2 = 4x^3 + x^2 - 4x - 2; \dfrac{d\tilde{z}}{dx} = 12x^2 + 2x - 4 = 2(6x^2 + x - 2) = 0$

$\dfrac{d\overline{z}}{dx} = 1 + 48 = 7^2 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{1-7}{12} = -\dfrac{2}{3}; \quad x_2 = \dfrac{-1+7}{12} = \dfrac{1}{2}$

$y_1 = 4\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4 = \dfrac{16}{9} - 4 = -\dfrac{20}{9}, \quad \left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{20}{9}\right) \notin D$

$y_2 = 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4 = -3, \quad \left(\dfrac{1}{2}; -3\right) \notin D$

При $y = 0, \quad z = x^2 + x * 0 - 2 = x^2 - 2$

$z' = (x^2 - 2)' = 2x, \quad z' = 0 \Rightarrow 2x = 0, \quad x = 0$

$z(0;0) = 0^2 + 0 * 0 - 2 = -2$

Ответ: $z_{\min}(0;0) = -2; \quad z_{\max}(-1;0) = z(1;0) = -1.$

№269

$z = 3x^4 + 2x^2y^3; \quad A(-1;2); \quad \bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j} = (4;-3)$

$1) z'x = 12x^3 + 4xy^3 \Rightarrow z'x(A) = -44$

$z'y = 6x^2y^2 \Rightarrow z'y(A) = 24;$ По определению градиента:

$\overline{grad} z(A) = z'x(A)\bar{i} + a / y(A)\bar{j} = -44\bar{i} + 24\bar{j} = (-44;24)$

2) Найдём удиничный вектор в направлении $\bar{a}$:

$\overline{e_a} = \dfrac{\bar{a}}{|a|} = \dfrac{(4;-3)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \left(\dfrac{4}{5}; -\dfrac{3}{5}\right)$

По определению производной в направлении:

$\dfrac{\partial z}{\partial a}(A) = \overline{grad} z(A) = \overline{e_a} = -44 * \dfrac{4}{5} - 24\dfrac{3}{5} = -\dfrac{248}{5}.$

№279

x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7	24,5
x_i^2	1	4	9	16	25	55
x_iy_i	5,7	13,4	15,6	12,8	18,5	66

Σ

Метод наименьших квадратов заключается в минимизации функции

$\Phi(a;b)=\sum_{i=1}^{5}(y_i-ax_i-b)^2$, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{5}(y_i-ax_i-b)x_i=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{5}(y_i-ax_i-b)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\sum_{i=1}^{5}x_i^2+b\sum_{i=1}^{5}=\sum_{i=1}^{5}x_iy_i\\ a\sum_{i=1}^{5}x_i+5b=\sum_{i=1}^{5}y_i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}55a+15b=16\\ 15a+5b=24{,}5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-0{,}75\\ b=7{,}15\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow y=-0{,}75x+7{,}15$

Прямая проходит через точки A(1;6,4) и B(5;3,4)