№238

$$Z = xe^{\frac{y}{x}}; \qquad F = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}} + xe^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}} = e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\frac{y}{x}} * \frac{1}{x} - \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\frac{1}{x} = -\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x^2} = e^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\frac{y}{x^2} = \frac{y^2}{x^3}e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xe^{\frac{y}{x}} * \frac{1}{x} = e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y} = e^{\frac{y}{x}} * \frac{1}{x}$$

Подставим производные в функцию F , получим:

$$F = x^2 * \frac{y^2}{x^3}e^{\frac{y}{x}} * e^{\frac{y}{x}} + 2xy\left(-\frac{y}{x^2}\right)e^{\frac{y}{x}} + y^2 e^{\frac{y}{x}}\frac{1}{x} = \frac{y^2}{x}e^{\frac{y}{x}} - \frac{2y^2}{x}e^{\frac{y}{x}} + \frac{y^2}{x}e^{\frac{y}{x}} = 0$$

Доказано.

№248

$z = x^2 - y^2 + 5x + 4y \qquad A(3;2), B(3{,}05;1{,}98)$

$1) z_1 = (3{,}05)^2 - (1{,}98)^2 + 5*3{,}05 + 4*1{,}98 = 9{,}3025 - 3{,}9504 + 15{,}25 + 7{,}92 = 28{,}5521$

$\bar{z}_1 \approx z(A) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - y^2 + 5x + 4y)' = 2x + 5$

$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - y^2 + 5x + 4y)'_y = -2y + 4$

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = 2x + 5|_{(3;2)} = 2*3 + 5 = 11$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = (-2y + 4)|_{(3;2)} = -2*2 + 4 = 0$

$\Delta x = x_1 - x_0 = 3{,}05 - 3 = 0{,}05$

$\Delta y = y_1 - y_0 = 1{,}98 - 2 = -0{,}02$

$z(A) = 3^2 - 2^2 + 5*3 + 4*2 = 9 - 4 + 15 + 8 = 28$

$\bar{z}_1 = 28 + 11*0{,}05 + 8(0{,}02) \approx 28 + 0{,}55 + 0 = 28{,}55$

$\frac{|z_B - z_{\bar{B}}|}{z_B}*100\% = \frac{|28{,}5521 - 28{,}55|}{28{,}5521}*100\% = 0{,}0074\%$

$4) z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_C (y - y_0)$

$z - 28 = 11(x - 3) + 0(y - 2)$

$z - 28 = 11(x - 3)$

$11x - 33 - z + 28 = 0$

$11x - z - 5 = 0.$

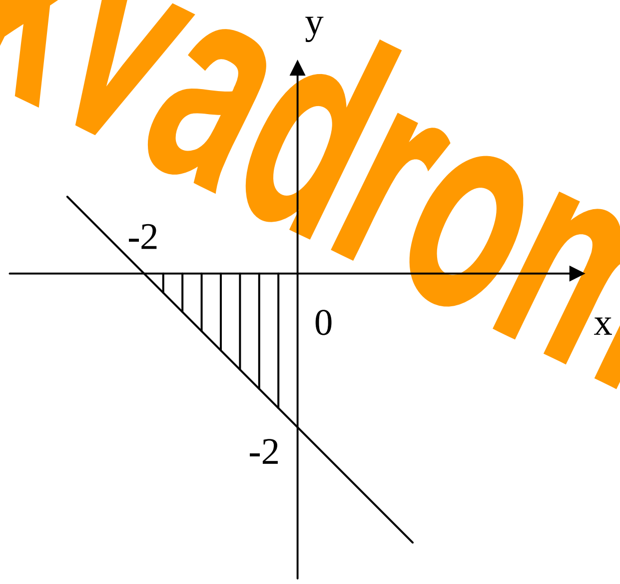
№258

$z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x; \quad x < 0 \quad y \le 0 \quad x + y + 2 \ge 0$

Находим стационарные точки функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = y \\ 4y = -4 \Rightarrow y = -1 \quad x = -1 \end{matrix}$$

$M(-1;1)$ – стационарная точка.



Эта точка (-1;-1) попала в область:

$z(-1;-1) = 1 + 2 - 1 - 4 = -2$

$A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2x + 2y + 4)'_x = 2$

$B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x + 2y + 4)'_y = 2$

$C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2x - 2y)'_y = -2$

$\Delta = AC - B^2 = 2(-2) - 2^2 = -8 < 0$

В М(-1;-1) - экстремума нет

$z(0;-2) = 0^2 + 2*0*(-2) - (-2)^2 + 4*0 = -4$

При x = 0, будем иметь:

$z = -y^2$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0$

Получаем точку (0;0)

$z(0;0) = 0^2 + 2*0*0 - 0^2 + 4*0 = 0$

При $y = 0$ $z = x^2 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x(x+4) = 0 \\ x_1 = 0 \quad x_2 = -4 \end{matrix}$

Получаем точки (0;0) и (-4;0)

z(-4;0) = 16 + 0 - 0 - 16 = 0, но точка не входит в область.

При $y = -x - 2$, имеем $z = x^2 + 2x(-x-2) - (-x-2)^2 + 4x = x^2 - 2x^2 - 4x - x^2 - 4x - 4 + 4x =$

$= -2x^2 - 4x - 4 = 0$

$z' = (-2x^2 - 4x - 4)' = -4x - 4$

$z' = -4x - 4 = 0$

$z(-1) = 1 - 2 = -1$

Таким образом:

$z_{наим} = z(-2;0) = z(0;-2) = -4$

$z_{наиб} = z(0;0) = 0.$

№268

$z=\ln(3x^2+4y^2);\ A(1;3), \bar{a}(2;-1)$

$1)\ \overline{grad z}=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{1}{3x^2+4y^2}\right)6x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{3x^2+4y^2}\right)8y$

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=\frac{6}{3+36}=\frac{6}{39}=\frac{2}{13}$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=\frac{24}{3+36}=\frac{24}{39}=\frac{8}{13}$

Таким образом, $\overline{grad z(A)}=\left(\frac{2}{13};\frac{8}{13}\right)$

$2)\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cos\beta$

$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}=\frac{2}{\sqrt{4+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

Получаем:

$\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A=\frac{2}{13}*\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{8}{13}*\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4-8}{13\sqrt{5}}=-\frac{4}{13\sqrt{5}}.$

№278

x	1	2	3	4	5
y	5,5	6,5	5,0	3,0	3,5

Будем искать функцию $y = ax + b$. Составляем выражение $S(a;b)$

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{5}(y_i - (a_{x_i} + b))^2$$

Для сставления нормальной системы уравнений (для опрделения коэффициентов a и b) предварительно вычисляем:

$$\sum_{i=1}^{5} y_i x_i = 1*5{,}5 + 2*6{,}5 + 3*5 + 4*3 + 5*3{,}5 = 5{,}5 + 13 + 15 + 12 + 17{,}5 = 63$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 5{,}5 + 6{,}5 + 5{,}0 + 3{,}0 + 3{,}5 = 23{,}5$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} 63 - 55a - 15b = 0 \\ 23{,}5 - 15a - 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 5b = 23{,}5 - 15a \\ 63 - 55a - 70{,}5 + 45a = 0 \end{matrix}$$

$$10a = -7{,}5 \Rightarrow a = -0{,}75$$

$$b = \frac{23{,}5 + 11{,}25}{5} = 6{,}95$$

Искомая прямая имеет вид: $y = -0{,}75x + 6{,}95$