№237

$$z = x^y$$

$$y\frac{d^2z}{dxdy} = (1 + y\ln x)\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = yx^{y-1}$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$$

$$yx^{y-1} + y^2x^{y-1}\ln x = yx^{y-1} + y^2x^{y-1}\ln x$$

№247

$$z = 3x^2 + 2y^2 - xy \qquad A(-1;3), \quad B(-0{,}98;2{,}97)$$

$1)z_1 = z(B) = 3*0{,}9604 + 2*8{,}8209 + 0{,}98*2{,}97 = 23{,}4336$

$2)z(A) = 3 + 18 + 1 = 24$

$\Delta x = -0{,}98 - (-1) = 0{,}02$

$\Delta y = 2{,}97 - 3 = -0{,}03$

$z'_x = 6x - y$

$z'_x(A) = -6 - 3 = -9$

$z'_y = 4y - x$

$z'_y(A) = 12 + 1 = 13$

$\tilde{z}_1 \approx z(A) + z'_x(A)\Delta x + z'_y(A)\Delta y = 24 - 0{,}18 - 0{,}39 = 23{,}43$

$3)\Delta = \left|z_1 - \overline{z_1}\right| = \left|23{,}4336 - 23{,}43\right| = 0{,}0036$

$$\eta = \frac{\Delta}{z_1}*100\% = \frac{0{,}0036}{23{,}4336}*100\% = 0{,}015\%$$

4) Уравнение касательной плоскости в точке $C(x_0;y_0;z_0)$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_C (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_C (y - y_0) - 1(z - z_0) = 0$$

$-9(x - (-1) + 13(y - 3) - 1(z - 24) = 0$

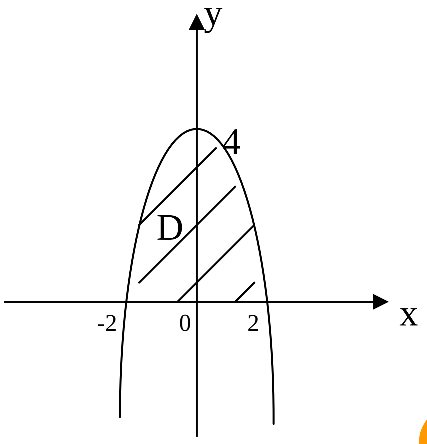
$-9x - 9 + 13y - 39 - z + 24 = 0$

$-9x + 13y - z - 24 = 0.$

№257

$z = 10 + 2xy - x^2; \quad 0 \le y \le 4 - x^2$

Построим область D:



Найдём стационарные точки данной функции, Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x$$

В силу необходимости условий экстремума:

$$\begin{cases} 2y - 2x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0$$

$z(0;0) = 10$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2y - 2x)'_x = -2$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2y - 2x)'_y = 2$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2x)'_y = 0$$

$\Delta = AC - B^2 = -2 * 0 - 2^2 = -4 < 0$

$\notin D$ в точке (0;0) экстремума нет.

При $y = 4 - x^2$

$z = 10 + 2x(4 - x^2) - x^2 = 10 + 8x - 2x^3 - x^2$

$z' = (10 + 8x - 2x^3 - x^2)' = 8 - 6x^2 - 2x$

$z' = 0; \quad 8 - 6x^2 - 2x = 0$

$3x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1^2 - 4 * 3(-4) = 1 + 48 = 49$

$$x_1 = \frac{-1 + 7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \notin D$$

$$x_2 = \frac{-1 - 7}{2} = -4 \notin D$$

Экстремума нет

При $y = 0$

$$z = 10 + 2x * 0 - x^2 = 10 - x^2$$
$$z' = (10 - x^2)' = -2x$$
$$z' = 0; \quad -2x = 0$$
$$z(0;0) = 10$$
$$z_{\min} = z(0;0) = 10$$

№267

$$z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right); \quad A(1;2) \quad \bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$$

$$1)\overline{grad}z(A) = \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A ; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{y^2}}} * \frac{2x}{y} = \frac{2x}{\sqrt{y^2 - x^4}}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = \frac{2*1}{\sqrt{4-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{y^2}}} x^2\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-x^2}{y\sqrt{y^2 - x^4}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = \frac{-1}{2\sqrt{4-1}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\overline{grad}z(A) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{i} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{j}$$

$$2)\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + ay^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{5}{13}$$

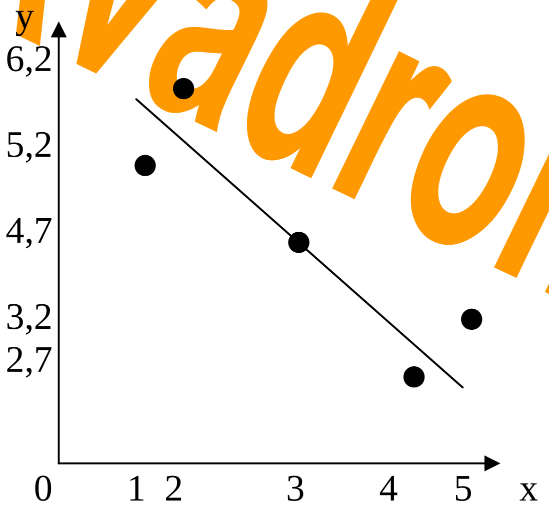
$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + ay^2}} = \frac{-12}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = -\frac{12}{13}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A = \frac{2}{\sqrt{3}} * \frac{5}{13} - \frac{1}{2\sqrt{3}} * \frac{2}{13} = \frac{10+6}{13\sqrt{3}} = \frac{16}{13\sqrt{3}}$$

№277

x	1	2	3	4	5
y	5,2	6,2	4,7	2,7	3,2

Построим точки $(x_i;y_i)$ в системе координат XOY.



Из графика видно , что исходные данные координаты "группируются" вдоль некоторой прямой y=ax+b. Подберём параметры a и b так, чтобы функция y=ax+b наилучшим образом описывала рассматриваем зависимость. По методу наименьших квадратов параметра определяется так, чтобы имела наименьше значение сумма S квадратов отклонений значений y_i , задаваемых экспериментально , от значений $f(x_i,a,b)$ функции в точках x_i:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-f(x_i,a,b))^2\to\min$$

Для определения минимума этой функции S(a,b) находятся частные производные по параметрам a и b, которые приравниваются нулю (необходимое условие экстемума).

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i(ax_i+b))^2\to\min$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)(-x_i)=2\left(z\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+b\sum_{i=1}^{b}x_i\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)(-1)=2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i+b_n\right)$$

Параметры a и b находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases}$$

Для получения суммы, входивших в эту систему, составим расчётную таблицу.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	5,2 6,2 4,7 2,7 3,2	1 4 9 16 25	5,2 12,4 14,1 10,8 16
Σ	15	22	55	58,5

Получаем:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 58{,}5 \\ 15a + 5b = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 5b = 22 - 15a \\ 55a + 66 - 45a = 58{,}5 \\ a = -0{,}75; b = 6{,}65 \end{matrix}$$

Искомая линейная функция имеет вид:

$y = -0{,}75x + 6{,}65$