№236

Дана функция $z=\frac{x}{y}$. Показать, что $F=x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Решение:

$z=\frac{x}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2},.$

Подставляя в F, получаем: $x\left(-\frac{1}{y^2}\right)-\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2}+-\frac{x}{y^2}=0.$

Что и требовалось показать.

№246

Дана функция $z=f(x,y)$ и две точки $A(x_0,y_0)$ и $B(x_1,y_1)$. Требуется:
1) вычислить значение z_1 в точке B; 2) вычислить приближенное значение $\overline{z}_1$ функции в точке B, исходя из значения z_0 функции в точке A, и заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом; 3) оценить в процентах относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции ее дифференциалом; 4) составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x;y)$ в точке $C(x_0,y_0,z_0)$.

$z=x^2+y^2+2x+y-1 \qquad A(2;4), \quad B(1,98;3,91)$

Решение:

1) $z_1=z(1,98;3,91)=1,98^2+3,91^2+2*1,98+3,91-1=26,0785$

$z_0=z(2;4)=2^2+4^2+2*2+4-1=27$

2) Для вычисления $\overline{z_1}$ воспользуемся формулой $\overline{z_1}=z(x_1,y_1)\approx z(x_0,y_0)+dz(x_0,y_0)$, где

$$dz(x_0,y_0)=\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(x_0;y_0)}*\Delta x+\left.\frac{dz}{dy}\right|_{(x_0;y_0)}*\Delta y;$$

$\Delta x=x_1-x_0$

$\Delta y=y_1-y_0$

$$\frac{dz}{dx}=2x+2; \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(2,4)}=2*2+2=6$$

$$\frac{dz}{dy}=2y+1; \quad \left.\frac{dz}{dy}\right|_{(2,4)}=2*4+1=9$$

$\Delta x=1,98-2=-0,02$

$\Delta y=3,91-4=-0,09$

Откуда $\overline{z_1}\approx 27+6*(-0,02)+9*(-0,09)=26,07.$

3) Относительная погрешность вычисляется по формуле:

$$\frac{\overline{z_1}-z_1}{z_1}*100\%=\frac{|26,07-26,0785|}{26,0785}\approx 0,0326\%$$

4) Так как $x_0=2,\ y_0=4,\ z_0=27$, то координаты точки $C(2,4,27)$. Уравнение касательной плоскости будем искать по формуле:

$$z-z_0=\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}*(x-x_0)+\left.\frac{dz}{dy}\right|_{(x_0,y_0)}*(y-y_0)$$

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}=6 \qquad \left.\frac{dz}{dy}\right|_{(x_0,y_0)}=9$$

Откуда:

$z-27=6(x-2)+9(y-4)$

$z=6x-12+9y-36+27$

$z=6x+9y-21$

или $6x+9y-21-z=0$

№256

Найти наименьшее и наиболшее значение функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертёж.

$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad x \ge -1, y \ge -1, x + y \le 1$

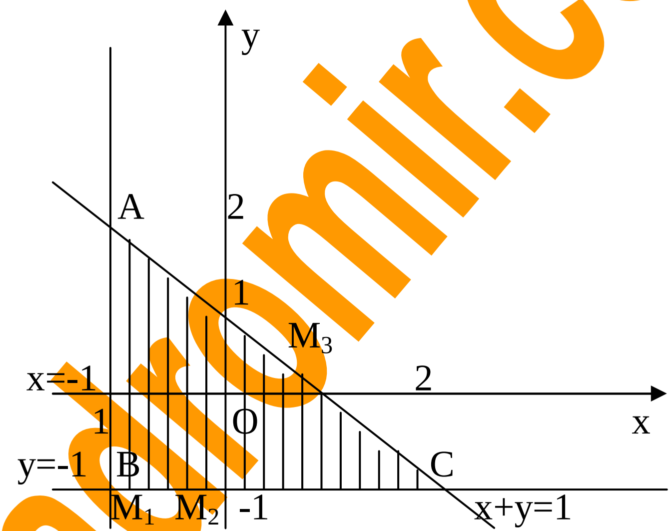
Решение:

1. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 10x - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 11x + 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

Решение системы - точка

$O(0;0) \quad z_0(0;0) = 4$



2. Найдём критические точки на границах:

а) граница AB: $x = -1 \; -1 \le y \le 2$

$z = 5(-1)^2 - 3(-1)y + y^2 + 4 = y^2 + 3y + 9$

$z' = 2y + 3$

$z' = 0 \Rightarrow 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}$ Получилась точка $M_1\left(-1; -\dfrac{3}{2}\right)$, но эта точка не принадлежит отрезку AB.

б) отрезок BC: $y = -1 \; -1 \le x \le 2$

$z = 5x^2 - 3x(-1) + (-1)^2 + 4 = 5x^2 + 3x + 5$

$z' = 10x + 3; \qquad z' = 0; \qquad 10x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{10}$

$z\left(-\frac{3}{10}; -1\right) = 4{,}55$

$z = 5x^2 - 3x*(1-x) + (1-x)^2 + 4 = 5x^2 - 3x + 3x^2 + 1 - 2x + x^2 + 4 = 9x^2 - 5x + 5$

$z' = 18x - 5$

$z' = 0 \Rightarrow 18x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{18}$

$y = 1 - \dfrac{15}{18} = \dfrac{13}{18}.$

Получилась точка $M_3\left(\frac{5}{18};\frac{13}{18}\right)$

$$z_3\left(\frac{5}{18};\frac{13}{18}\right)=\frac{155}{36}\approx 4{,}31$$

3. Найдём значение функции в вершинах треугольника:

$A(-1{,}2)\quad z_A(-1{,}2)=19$

$B(2{,}-1)\quad z_C(2{,}-1)=31$

Сравнивая все полученные значения, z заключаем, что $z_{наиб}=31$, достигается C(2,-1), а $z_{наим}=4$ в точке O(0,0).

№266

$$z=arctg(xy^2),\quad A(2;3),\quad \bar{a}=(4;-3)$$

$$1)\,\overline{grad}z(A)=\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A;\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2y^4}*y^2;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=\frac{9}{1+4*81}=\frac{9}{325}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+x^2y^4}*2xy;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=\frac{2*2*3}{1+4*81}=\frac{12}{325}$$

$$\overline{grad}z(A)=\left(\frac{9}{325};\frac{12}{325}\right)$$

$$2)\,\frac{\partial z}{\partial a}(A)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}=\frac{4}{\sqrt{16+9}}=\frac{4}{5}$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}=-\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}(A)=\frac{4}{5}*\frac{9}{325}-\frac{3}{5}*\frac{12}{325}=\frac{36-36}{5*325}=0$$

№276

Эксперементально получены пять значений функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице:

x	1	2	3	4	5
y	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $Y = aX + b$, выражающую приближенно (апроксимирующую) функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующий функции $Y = aX + b$.

Решение:

Коэффициенты a и b определим из системы:

$$\begin{cases} a*\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a*\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

В нашем примере n = 5,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{5} x_i = 1+2+3+4+55 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{5} y_i = 3{,}9+4{,}9+3{,}4+1{,}4+1{,}9 = 15{,}5$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{5} 1*3{,}9+2*4{,}9+3*3{,}4+4*1{,}4+5*1{,}9 = 3{,}9+9{,}8+10{,}2+5{,}6+9{,}5 = 39$$

Значит получаем систему:

$$\begin{cases} 55a+15b = 39 \\ 15a+5b = 15{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a = -7{,}5 \\ 15a+5b = 15{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0{,}75 \\ b = 3{,}1-3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0{,}75 \\ b = 5{,}35 \end{cases}$$

Искомое уравнение аппроксимирующей прямой $I = -0{,}75x + 5{,}35$

x	0	2
y	5,35	3,85


y
4,9
3,9
3,4
1,9
1,4
0
1
2
3
4
5
y=-0,75x+5,35