№235

$$z=\ln(x+e^{-y})$$

$$\frac{dz}{dx}*\frac{d^2z}{dxdy}-\frac{dz}{dy}*\frac{d^2z}{dx^2}=0$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x+e^{-y}}=(x+e^{-y})^{-1}$$

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d}{dy}\left(\left[x+e^{-y}\right]^{-1}\right)=(-1)\frac{-e^{-y}}{(x+e^{-y})^2}=\frac{e^{-y}}{(x+e^{-y})^2}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{-e^{-y}}{(x+e^{-y})}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\left[x+e^{-y}\right]^{-1}\right)=-(x+e^{-y})^{-2}=-\frac{1}{(x+e^{-y})^2}$$

$$\frac{1}{(x+e^{-y})}*\frac{e^{-y}}{(x+e^{-y})^2}-\frac{(-e^{-y})}{(x+e^{-y})}*\frac{(-1)}{(x+e^{-y})^2}=\frac{e^{-y}}{(x+e^{-y})^3}-\frac{e^{-y}}{(x+e^{-y})^3}=0$$

Что и требовалось доказать.

№245

$z = x^2 + 2xy + 3y^2; \quad A(2,1); \; B(1{,}96;1{,}04)$

$1.z_1 = 1{,}96^2 + 2*1{,}96*1{,}04 + 3*1{,}04^2 = 11{,}1632$

$2.dz = (2x + 2y)dx + (2x + 6y)dy$

dz в точке A равен $6dx + 10dy$

$z(B) = z(A) + dz = 4 + 4 + 3 + 6*0{,}04 + 10 + 0{,}04 = 11 + 0{,}16 = 11{,}1600$

$$3.\Delta^{(z)} = \frac{|11{,}1632 - 11{,}1600|}{11{,}1632}*10\% \approx 0{,}029\%$$

$$4.\frac{dz}{dx}(x_0, y_0) = 2x_0 + 2y_0 = 2*2 + 2*1 = 6;$$

$$\frac{dz}{dx}(x_0, y_0) = 2x_0 + 6y_0 = 2*2 + 6*1 = 10;$$

$z_0 = z(x_0, y_0) = 2^2 + 2*2*1 + 3*1^2 = 11$

Уравнение касательной плоскости:

$z - 11 = 6(x-2) + 10(y-1) \qquad z - 11 = 6x - 12 + 10y - 10$

$6x + 10y - z - 11 = 0 \qquad z = 6x + 10y - 11$

Ответ: 1)11,1632; 2)11,1600; 3)0,029%; 4)$6x + 10y - z - 11 = 0$.

№255

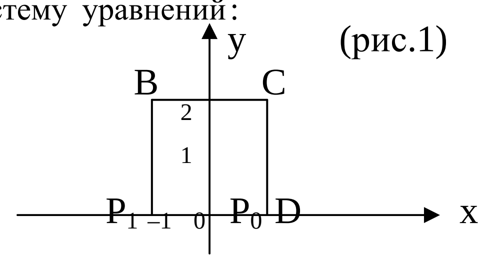
Найти наименьшее и наибольшее значение фнкции $z = f(x;y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертёж

$z = x^2 + 2xy + 2y^2; \quad -1 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le 2$

Точки в которую функция принимает наибольшее и наименьшее значение, могут находится как внутри области, так и на её границе. Если функция имеет экстремум во внутренней точке области, то в этой точке частные производные

$\frac{dz}{dx} = 2x + 2y; \quad \frac{dz}{dy} = 2x + 2y$ равные нулю. Решить систему уравнений:

(рис.1)



$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Получаем критическую точку $P_0(0;0)$,

в которой значение функции $= 0$ (рис.1).

Точка $P_0(0;0)$ принадлежит границе области.

На отрезке ОА имеет $x = 1$, следовательно на этом отрезкефункция $z = 1 - 2y + 2y^2 (0 \le y \le 2)$ представляет собой функцию одной переменной y.

Ее наибольшее и наименьшее значение находится средиее значений в критических точках и на концах отрезка.

Находим производную $z = -2 + 4y$.

Решая уравнение $z' = 0$ или $-2 + 4y = 0$ находим $y = \frac{1}{2}$.

Таким образом, критической точкой на отрезке AB являетсяточка $P_1\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Аналитично на отрезке BC имеем $y = 2, \Rightarrow$

$z = x^2 + 4x + 8 \ (-1 \le x \le 1)$.

Находим $z' = 2x + 4$. Из уравнения $2x + 4 = 0$ определяем $x = -2$.

На отрезке CD имеем $x = 1 \ (0 \le y \le 2) \Rightarrow$

$z = 1 + 2y + 2y^2$. Тогда $z' = 2 + 4y = 0$, откуда $y = -\frac{1}{2}$.

Эта точка не принадлежит отрезку $0 \le y \le 2$.

На отрезке DA имеем $y = 0$, поэтому на этом отрезке $z = x^2 (-1 \le x \le 1)$, возрастающая функция одной переменной x.

Имеем экстремум при $x = 0$, тогда критической точкой на отезке DA является точка $P_0(0;0). \Rightarrow$ наибольшее и наименьшее значение функции.

$z = x^2 + 2xy + 2y^2$ в данной области находятся среди её значений в точках P_0, A, P_1, C, D, т.е. среди значений.

$z(P_0)=z(0;0)=0$
$z(A)=z(-1;0)=1$
$z(P_1)=z\left(-1;\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}$
$z(B)=z(-1;2)=5$
$z(C)=z(1;2)=13$
$z(D)=z(1;0)=1$

Наибольшее и наименьшее из них равны соответсвенно 13 и 0. Эти значения функции принимают в точках $C(1;2)$ и $P_0(0;0)$.

№265

Даны функции $z=z(x,y)$, точка $A(x_{0=},y_0)$ и вектор a.

Найти: 1) grad z в точке A. 2) производную в точке A по направлению вектора $z=5x^2+6xy$ $A(2,1)$ $a=i+2i$.

1)Воспользуемся известной формулой графика функций, заданной в явном виде:

$$\text{grad } Z=\frac{dz}{dx}i+\frac{dz}{dy}i.$$

Находим частные производные $\frac{dz}{dx}=10x+6y;$ $\frac{dz}{dy}=6x$ их значения в точке $A(2;1)$

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_A=10*2+6*1=26;\quad \left.\frac{dz}{dy}\right|_A=6*2=12$$

Тогда $\text{grad } z=26i+12i.$

2)Формула для производной по направлению, в случае плоского скалярного поля имеет следующий вид:

$$\frac{dz}{dl}=\frac{dz}{dx}\cos x+\frac{dz}{dy}\sin\alpha$$

Находим соответствующий вектору $\bar{a}$ единичный вектор

$$l=\frac{\bar{a}}{|a|}=\frac{i+2i}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}i+\frac{2}{\sqrt{5}}i$$

Таким образом , вектор l имеет следующие косинусы:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}};\quad \cos\beta=\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Подставляя найденные значения частных производных и направляющих косинусов, получим искомую производную

$$\frac{dz}{dl}=26\frac{1}{\sqrt{5}}+12*\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{50}{\sqrt{5}}=10\sqrt{5}.$$

№275

x	1	2	3	4	5
y	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

Подберём параметры a и b так, чтобы функция $y = ax + b$ наилучшим образом описывала рассматриваемую зависимость. Параметры a и b находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Составим расчётную таблицу:

i	x_i	y_i	x^2_i	$x_i y_i$
1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	5,1 6,1 4,6 2,6 3,1	1 4 9 16 25	5,1 12,2 13,8 10,4 15,5
Σ	15	21,5	55	57

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 57 \\ 15a + 5b = 21{,}5 \end{cases}$$

$$5b = 21{,}5 - 15a$$

$$55a + 64{,}5 - 45a = 57$$

$$10a = -7{,}5 \Rightarrow a = -0{,}75, \quad b = \frac{21{,}5 + 11{,}25}{5} = 6{,}55$$

Искомая линейная функция имеет вид:

$$y = -0{,}75x + 6{,}55$$