№234

$$z = e^{xy};\ F = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz$$

Находим производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy)$$

Подставляем в функцию F, получим:

$$x^2(y^2 e^{xy}) - 2xy(e^{xy} + xye^{xy}) + y^2(x^2 e^{xy}) + 2xye^{xy} = 0$$

$$2x^2 y^2 e^{xy} - 2xye^{xy} - 2x^2 y^2 e^{xy} + 2xye^{xy} = 0$$

$$0 \equiv 0.$$

№244

$z = x^2 - y^2 + 6x + 3y;\ \ A(2;3), B(2{,}02;2{,}97).$

$1) z_1(B) = (2{,}02)^2 - (2{,}97)^2 + 6*2{,}02 + 2*2{,}97 = 4{,}0804 - 8{,}8209 + 12{,}12 + 8{,}91 = 16{,}2895.$

$2) \bar{z}_1(B) = z_0(A) + \frac{\partial z}{\partial x}(A)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\Delta y.$

$z_0(A) = 2^2 - 9 + 6*2 + 3*3 = 4 - 9 + 12 + 9 = 16$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6;\quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = 2*2 + 6 = 10$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 3;\quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = -2*3 + 3 = -3$

$\Delta x = 2{,}02 - 2 = 0{,}02$

$\Delta y = 2{,}97 - 3 = -0{,}03.$

$\bar{z}_1(B) 16 + 10*0{,}02 - 3(-0{,}03) = 16 + 0{,}2 + 0{,}09 = 16{,}29.$

2)Оценим погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|z_1 - \bar{z}_1|}{z_1}*100\% = \frac{|16{,}2895 - 16{,}29|}{16{,}2895}*100\% = 0{,}0031\%$$

4) Уравнение касательной плоскости:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_C (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_C (y - y_0)$$

Получаем:

$z - 16 = 10(x - 2) - 3(y - 3)$ или

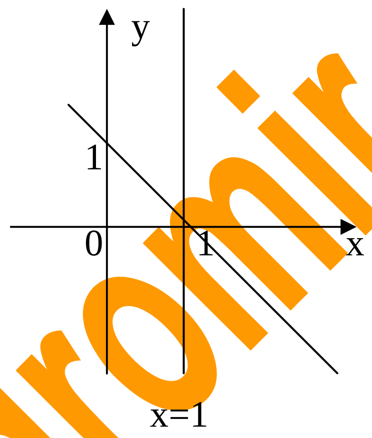
10x - 3y - z + 5 = 0.

№254

$z = x^2 + 3y^2 + x - y; \quad x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 1$

Найдём стационарные точки функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{6} - \text{данная точка не лежит в области D.}$$



Найдём значения функции на границах области.

$z(1;0) = 1 + 1 = 2$

$z(1;-1) = 1 + 3 + 1 + 1 = 6$

$z(2;-1) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$

При $x = 1$ $z = 1 + 3y^2 + 1 - y = 3y^2 + 1 - y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y - 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{6} -$ не лежит в D

При $x = 1 - y; \quad z = (1 - y)^2 + 3y^2 + 1 - y - y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2(1 - y) + 6y - 2 = 0$

$8y = 4 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}, x = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} -$ не лежит в D

При $y = -1$ $z = x^2 + 3 + x + 1; \ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 1 = 0$

$x = -\dfrac{1}{2} -$ не лежит в D

Таким образом:

$z_{наим} = z(1;0) = 2$

$z_{наиб} = z(2;-1) = 10.$

№264

$$z=\ln(5x^2+4y^2); \quad A(1,1), \bar{a}(2,-1)$$

$$1)\ \overline{grad}z(A)=\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A;\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{10x}{5x^2+4y^2}; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=\frac{10}{5+4}=\frac{10}{9}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{8y}{5x^2+4y^2}; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=\frac{8}{5+4}=\frac{8}{9}$$

$$\overline{grad}z(A)=\left(\frac{10}{9};\frac{8}{9}\right)$$

$$2)\ \left.\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\bar{a}|}=\frac{2}{\sqrt{4+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\bar{a}|}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A=\frac{2}{\sqrt{5}}*\frac{10}{9}-\frac{1}{\sqrt{5}}*\frac{8}{9}=\frac{20-8}{9\sqrt{5}}=\frac{12}{9\sqrt{5}}=\frac{4}{3\sqrt{5}}$$

№274

x	1	2	3	4	5
y	4,9	5,9	4,4	2,4	2,9

	x	y	x^2	xy
1	1	4,9	1	4,9
2	2	5,9	4	11,8
3	3	4,4	9	13,2
4	4	2,4	16	9,6
5	5	2,9	25	14,5
Σ	15	20,5	55	54

Из графика видно, что исходные данные 'группируются' вдоль некоторой прямой, т.е. имеет место линейная зависимость вида $y = ax + b$

Параметр a и b найдём из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 55a + 15b = 54 \\ 15a + 5b = 20{,}5 \end{cases}$$

$$10a = -7{,}5$$

$$a = -0{,}75$$

$$b = \frac{20{,}5 - 15(-0{,}75)}{5} = 6{,}35$$

$$y = -0{,}75x + 6{,}35.$$

x	0	6
y	6,35	1,85