№231

$$z=\frac{y}{(x^2-y^2)^5};\qquad F=\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{y}\frac{dz}{dy}-\frac{z}{y^2};$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-5y2x}{(x^2-y^2)^6}=\frac{-10xy}{(x^2-y^2)6}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{(x^2-y^2)^5-y5(x^2-y^2)^4(-2y)}{(x^2-y^2)^{10}}=\frac{(x^2-y^2)^5+10y^2(x^2-y^2)^4}{(x^2-y^2)^{10}}=\frac{x^2-y^2+10y^2}{(x^2-y^2)^6}=$$

$$=\frac{x^2+9y^2}{(x^2-y^2)^6};$$

Подставляя в функцию получим:

$$-\frac{1}{x}\frac{10xy}{(x^2-y^2)^6}+\frac{1}{y}*\frac{x^2+9y^2}{(x^2-y^2)^6}-\frac{y}{y^2(x^2-y^2)^5}=-\frac{10y}{(x^2-y^2)^6}+\frac{x^2}{y(x^2-y^2)^6}+\frac{9y}{(x^2-y^2)^6}-$$

$$-\frac{1}{y(x^2-y^2)^5}=-\frac{y^2}{y(x^2-y^2)^6}+\frac{x^2}{y(x^2-y^2)^6}-\frac{x^2-y^2}{y(x^2-y^2)^6}=0.$$

Доказано.

№ 241

Дана функция $z = f(x;y)$ и две точки A и B.

Требуется 1) Вычислить значение z в точке B; 2) вычислить приближённое z функции в т. B, исходя из значения z_0 функции в т. A и заменив приращение функции при переходе от т. A к т. B дифферинциалом; 3) оценить относительную погрешность; 4) составить уравнение касательной плоскости к поверхности.

$z = f(x;y)$ в точке $c(x_0;y_0;z_0)$

$z = x^2 + xy + y^2 \quad A(1;2); B(1{,}02;1{,}96)$

$z_1 = 1{,}02^2 + 1{,}02 * 1{,}96 + 1{,}96^2 = 1{,}0404 + 1{,}9992 + 3{,}8416 = 6{,}8812$

$z_0 = 1^2 + 1*2 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7 \quad z(A) = 7$

z_0 - значение функции в т. A (1;2)

$z'_x = 2x + y; \quad z'_y = x + 2y$

$z'_x(A) = 2*1 + 2 = 4$

$z'_y(A) = 1 + 2*2 = 5$

$dx = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$

$dy = 1{,}96 - 2 = -0{,}04$

Полное приращение функции можно заменить её полным дифферинциалом

$z(B) - z(A) \approx z'_x(t)dx + z'_y(A)dy$

$z(B) = 7 + 4*0{,}02 + 5(-0{,}04) = 7 + 0{,}08 - 0{,}2 = 7 - 0{,}12 = 6{,}88$

$\bar{z}_1 \approx 6{,}88$ - приближённое значение в т. B

$z_1 = 6{,}8812$ - точное значение функции в т. B

Найдём отнсительную погрешность замены приращения функции её дифферинциалом.

$$\sigma = \frac{|z_1 - \bar{z}_1|}{z_1} * 100\% = \frac{|6{,}8812 - 6{,}88|}{6{,}8812} = 0{,}02\%$$

Составим урвнение касательной плоскости к поверхности

$z = f(x;y)$ в точке $c(x_0;y_0;z_0)$

Уравнение касательной плоскости

$z = x^2 + xy + y^2$

$F = x^2 + xy + y^2 - z$

$F'_x = (x^2 + xy + y^2 - z)'_x = 2x + y$

$F'_y = (x^2 + xy + y^2 - z)'_y = x + 2y$

$F'_z = (x^2 + xy + y^2 - z)'_z = -1$

Подтавим в общее уравнение:

$(x - x_0)F'_x(C) + (y - y_0)F'_y(C) + (z - z_0)F'_z(C) = 0$

$z_0 = z(1;1) = 7$

$C(1;2;7)$

$F'_x(C) = 2*1 + 2 = 4$

$F'_y(C) = 1 + 2*2 = 5$

$F'_z(C) = -1$

$(x-1)*4 + (y-2)*5 + (z-7)*(-1) = 0$

$4x + 5y - z - 7 = 0.$

№251

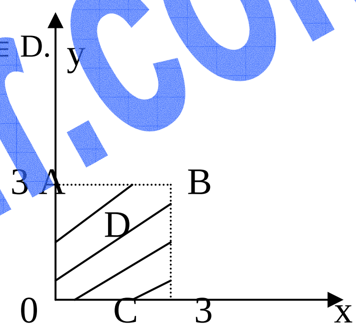
Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = f(x;y)$ в замкнутой области P, заданной системой неравенств:

$z = x^2 + y^2 - 9xy + 27 \quad 0 \le y \le 3, \quad 0 \le y \le 3.$

1) Найдём критические точки этой функции z, лежащие внутри замкнутой области и вычислим её значение в этих точках:

$z'_x = 2x - 9y; \;\; z'_y = 2y - 9x$

$\begin{cases} 2x - 9y = 0 \\ 2y - 9x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $k(0;0)$ – критическая точка. $k(0;0) \in D.$



Область заданная системой неравенств

$\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$ изображена на рисунке

Найдём наибольшее и наименьшее значение на границе области. Она состоит из 4-х участков.

а) на участке OA имеем $x = 0$.

$z_1(y) = y^2 + 27$, где $y \in [0;3]$

$z'_1 = 2y \;\; z'_1 = 0 \;\; 2y = 0$

$y = 0$ – критическая точка $\in [0;3]$

Вычислим значения z, в точках (0;3)

$z_1(0) = 27, \;\; z'_1(3) = 36$

Наибольшее значение z_1 на отрезке $[0;3] = 36$ (в т. $y = 3$)

Наименьшее значение z_1 на отрезке $[0;3] = 27$ (в т. $y = 0$)

б) участок AB $y = 3$.

$z_2(x) = x^2 - 27x + 36$, где $0 \le x \le 3$

$z'_2 = 2x - 27, \;\; z'_2 = 0; \;\; 2x - 27 = 0; \;\; x = 13{,}5$

это критическая точка $\notin [0;3]$

$z_2(0) = 36 \;\; z_2(3) = -36$

Наибольшее значение $z_2 = 36$ в т. $x = 0$ [0;3]

Наименьшее значение $z_2 = -36$ в т. $x = 3$ [0;3]

в) на участке BC имеем $x = 3$

$z_3(y) = y^2 - 27y + 36$, где $0 \le y \le 3$

$z'_3 = 2y - 27 \;\; z'_3 = 0 \quad 2y = 27; \;\; y = 13{,}5$ – это критическая точка не принадлежит [0;3]

$z_3(0) = 36$

$z_3(3) = -36$

г) на участке OC имеем $y = 0$

$z_4(x) = x^2 + 24$, где $0 \le x \le 3$

$z'_4 = 2x \;\; 2x = 0 \;\; x = 0$

$z_4(0) = 27 -$ наименьшее значение $x = 0$

$x_4(3) = 36 -$ наибольшее значение $x = 3$

Составляя значения z на учасках OA, AB, BC, OC, приходим к выводу:
На границах OABC наибольшее значение функции z равно 36 (в т. B). Сравнивая значения z во внутр. крит. точке k, где z(k) = 24 с её натибольшими и наименьшими значенниями на границе области заключаем, что наиб. значение z в данной замкнутой области равно 36 и достигается 40 в границах точек A и C, наименьшее значение равно -36 (в точке B(3;3))

$z_{наиб} = z(A) = z(C) = 36$

$z_{наим} = z(B) = -36.$

№261

Дана функция $z = f(x; y)$, точка $A(x_0; y_0)$ и вектор $a(a; a_2)$

Найти 1) grad z в точке A

2)производную а точке A по напрвлению вектора a.

$z = x^2 + xy + y^2 \quad A(1;1) \quad \bar{a}(2;-1)$

Решение:

$$\frac{dz}{da} = \left.\frac{dz}{dx}\right|_A \cos\alpha + \left.\frac{dz}{dy}\right|_A \cos\beta \quad (1)$$

Найдём $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ и вычислим их значения в т. A.

$$\frac{dz}{dx} = 2x + y \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_A = 2*1+1 = 3$$

$$\frac{dz}{dy} = 2y + z \quad \left.\frac{dz}{dy}\right|_A = 2*1+1 = 3$$

Подставим в формулу (1) и найдём производную функцию z в точке A по любому напрвлению ā(cosαccosβo

$$\frac{dz}{da} = 3\cos\alpha + 3\cos\beta;$$

Находим cosα и cosβ и производную функции z по заданному напрвлению; для вектора ā(2;-1)

α и β - углы, образованные данным направлением дифференцировагия с осями координат:

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

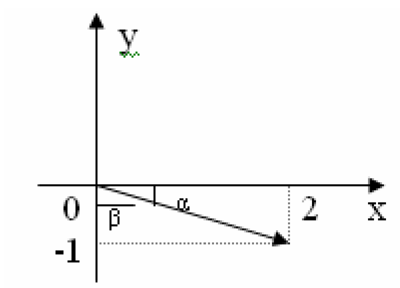
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\frac{dz}{da}\right|_A = 3*\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3*\sqrt{5}}{5};$$

$$\overline{grad z} = \frac{dz}{dx}\bar{i} + \frac{dz}{dy}\bar{j};$$

$$\left.\overline{grad z}\right|_A = \left.\frac{dz}{dx}\right|_A i + \left.\frac{dz}{dy}\right|_A j.$$

$$\overline{grad z}(A) = 3\bar{i} + 3\bar{j}.$$

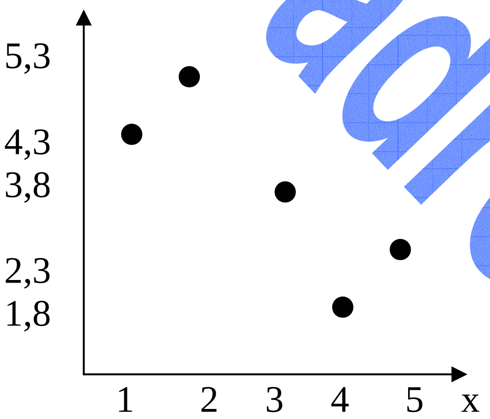


№271

y=ax+b

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

Построим точки (x_i, y_i) в системе координат



Подберём параметры a и b так, чтобы функция y=ax+b наилучшим образом описывала рассматриваемую зависимость. По методу наименьших квадратов параметры определяются так, чтобы имели наименьшее значение сумма квадратов отклонений значений y_i, задаваемых экспериментально, от значений $f(x_i,a,b)$ функции в точках x_i:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2 \to \min$$

$$\frac{dS}{da}=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)(-x_i)=2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$\frac{dS}{db}=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)(-1)=2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i+b_n\right)$$

Параметры a и b находятся из нормальной системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b_n=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$$

i	x_i	y_i	x^2_i	$x_i y_i$
1	1	4,3	1	4,3
2	2	5,3	4	10,6
3	3	3,8	9	11,4
4	4	1,8	16	7,2
5	5	2,3	25	11,5
Σ	15	17,5	55	45

$$\begin{cases} 55a + 15b = 45 \\ 15a + 5b = 17{,}5 \end{cases} \Rightarrow 5b = 17{,}5 - 15a$$

$$55a + 52{,}5 - 45a = 45$$

$$10a = -7{,}5$$

$$a = 0{,}75;\quad b = \frac{17{,}5 + 11{,}25}{5} = 5{,}75$$

Искомая линейная функция имеет вид:

$$y = -0{,}75x + 5{,}75$$