№479

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u\Big|_{t_0=0}=\cos x;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t_0=0}=\sin x$$

$$u=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz,\quad \text{где}$$

$$\phi(x)=\cos x;\quad \Psi(x)=\sin x;$$

$$u=\frac{\cos(x-at)+\cos(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\Big|_{x-at}^{x+at}\sin zdz=\frac{1}{2}\left(\cos(x-at)+\cos(x+at)-\frac{1}{a}\cos(x+at)+\frac{1}{a}\cos(x-at)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{a}\right)\cos(x-at)+\left(1-\frac{1}{a}\right)\cos(x+at)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{a}\cos(x-at)+\frac{a-1}{a}\cos(x+at)\right).$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 9. Номера 479, 489, 499, 509, 519

№489

$$\omega=z^3+z^2+i;\quad z_0=\frac{2i}{3}$$

$$\omega=(x+iy)^3+(x+iy)^2+i=x^3+3x^2iy-3xy^2-iy^3+x^2+2yi-y^2+i=$$

$$=(x^3-3xy^2-y^2)+(3x^2y-y^3+2xy+1)$$

$$u(x,y)=x^3-3xy^2+x^2-y^2$$

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+2xy+1$$

Проверим условия Коши - Римана :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2+2x=\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2+2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}=-(6xy+2y)$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^3+2x+i(6xy+2y)=3x^2-3y^2+i6xy+2x+2yi=3(x+yi)^2+2(x+yi)=$$

$$=3z^2+2z$$

$$f'\left(\frac{2i}{3}\right)=3\left(\frac{2i}{3}\right)^2+2\left(\frac{2i}{3}\right)=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}i=\frac{4}{3}(-1+i).$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 9. Номера 479, 489, 499, 509, 519

№499

$$f(z)=-\frac{z}{1+z^2};\quad z_0=i$$

$$\frac{z}{1+z^2}=\frac{z}{(1+iz)(1-iz)}=\frac{A}{1+iz}+\frac{B}{1-iz}=\frac{A-Aiz+B+Biz}{1+z^2}$$

$$\begin{array}{l|l} z^1 & -Ai+Bi=1 \\ z^0 & A+B=0 \end{array}\Rightarrow \begin{array}{c} A=-B \\ 2Bi=1\Rightarrow B=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2};\quad A=\frac{i}{2}\end{array}$$

$$f(z)=-\frac{i}{2}\frac{1}{1+iz}-\frac{i}{2}\frac{1}{1-iz}=\frac{i}{2}\left(\frac{1}{i-z}-\frac{1}{1+z}\right)=-\frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)$$

$$\frac{i}{z+i}=\frac{1}{2i+(z-i)}=\frac{i}{-2+i(z-i)}=\frac{i}{-2}\frac{1}{1+\frac{i(z-i)}{-2}}=-\frac{i}{2}*\frac{1}{1-\frac{i(z-i)}{2}}=-\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i}{2}(z-i)\right]^n$$

$$f(z)=-\frac{1}{2}*\frac{i}{z-i}+\frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i}{2}(z-i)\right]^n$$

509

$x''+2x'+x=\cos t;\quad x(0)=0;\ x'(0)=0$

Переходим к изображениям:

$$p^2\bar{x}-px(0)-x'(0)+2(p\bar{x}-x(0))+\bar{x}=\frac{p}{p^2+1}$$

$$p^2\bar{x}+2p\bar{x}+\bar{x}=\frac{p}{p^2+1}$$

$$\bar{x}(p^2+2p+1)=\frac{p}{p^2+1}$$

$$\bar{x}(p+1)^2=\frac{p}{p^2+1}$$

$$\bar{x}=\frac{p}{(p^2+1)(p+1)^2}$$

Разложим эту рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p+1)^2}=\frac{A}{(p+1)^2}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+1}=\frac{Ap^2+A+(Bp+B)(p^2+1)+(Cp+D)(p^2+2p+1)}{(p^2+1)(p+1)^2}$$

$$\begin{array}{l|c} p^3 & B+C=0 \\ p^2 & A+B+D+2C=0 \\ p^1 & B+C+2D=1 \\ p^0 & A+B+D=0 \end{array}\Rightarrow \begin{array}{c} B=-C \\ 2D=1\Rightarrow D=\frac{1}{2} \\ A=-B-\frac{1}{2} \\ -B-\frac{1}{2}+B+\frac{1}{2}+2C=0 \\ 2C=0\Rightarrow C=0, B=0, A=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Следовательно: $\bar{x}=\frac{-1}{2(p+1)^2}+\frac{1}{2(p^2+1)}$, откуда:

$$x=-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}\sin t.$$

519

$$\begin{cases} x'+y'=0 \\ x'-2y'+x=0 \end{cases} \quad x(0)=1;\ y(0)=-1$$

$$x'=-y'$$

$$-y'+2y'+x=0$$

$$y'+x=0$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} x'+y'=0 \,\big|\, *2 \\ x'-2y'+x=0 \end{cases}$$

$$3x'+x=0$$

$$3(px(p)-1)+x(p)=0$$

$$(3p+1)x(p)-3=0$$

$$x(p)=\frac{3}{3p+1}=\frac{3}{3\left(p+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{p+\frac{1}{3}}$$

$$x(t)=e^{-\frac{1}{3}t}$$

$$px(p)-1+py(p)+1=0$$

$$px(p)+py(p)=0$$

$$x(p)+y(p)=0$$

$$y(p)=-x(p)$$

$$y(p)=-\frac{1}{p+\frac{1}{3}}$$

$$y(t)=-e^{-\frac{1}{3}t}$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 9. Номера 479, 489, 499, 509, 519