№477

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad u\Big|_{t_0=0}=\sin x;\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t_0=0}=\cos x$$

$$u=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\phi(z)dz,\qquad \text{где}$$

$$\phi(x)=\sin x;\qquad \phi(x)=\cos x$$

$$u=\frac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\cos z dz=\frac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\big(\sin(x+at)-\sin(x-at)\big)=$$

$$=\sin(x-at)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}\right)+\sin(x+at)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\right)=\frac{a-1}{2a}\sin(x-at)+\frac{a+1}{2a}\sin(x+at).$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 7. Номера 477, 487, 497, 507, 517

№487

$\omega=2z^2-iz,\qquad z_0=1-i$

$z=\dot{x}+iy,\qquad$ получаем:

$\omega=2(x+iy)^2-i(x+iy)=2(x^2+2xyi-y^2)-ix+y=2x^2+4xyi-2y^2-ix+y=$

$=(2x^2-2y^2+y)+(4xy-x)i.$

Таким образом: $u=(x,y)=2x^2-2y^2+y$

$v(x,y)=4xy-x.$ Проверим условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x=\frac{\partial v}{\partial y}=4x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-4y+1=-\frac{\partial v}{\partial x}=-(4y-1)$$

Следовательно, функция $\omega=2z^2-iz$ аналитически. Найдем ее производную в точке $z_0=1-i$

$\omega'=4z-i$

$\omega'(z_0)=4(1-i)-i=4-4i-i=4-5i.$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 7. Номера 477, 487, 497, 507, 517

№497

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)};\qquad z_0=0$$

Разложим данную функцию на простейшие дроби.

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}=\frac{Az-A+Bz}{z(z-1)}$$

$$\begin{array}{l|l} z' & A+B=0 \\ z^0 & -A=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B=1 \\ A=-1 \end{array}$$

$$f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

Область сходимости этого ряда $|z|<1$, т.к. это геометрическая прогрессия.

№507

$x'''+x=1 \qquad x(0)=0 \qquad x'(0)=0 \qquad x''(0)=0$

Переходим к изображениям:

$$p^3\bar{x} - p^2x'(0)+px'(0)+x''(0)+\bar{x}=\frac{1}{p}$$

$$p^3\bar{x}+\bar{x}=\frac{1}{p}$$

$$\bar{x}(p^3+1)=\frac{1}{p}$$

$$\bar{x}=\frac{1}{p(p^3-1)}=\frac{1}{p(p+1)(p^2-p+1)}$$

Разложим эту рациональную дробь на простейшие дроби:

$B=-1-C$

$1+C+C+D=0$

$1+2C+D=0$

$D=-B$

$1+2C-B=0$

$1+2C-(-1-C)=0$

$1+2C+1+C=0$

$3C=-2$

$C=-\frac{2}{3}$

$A+B+C=0$

$-B+C+D=0 \qquad C+2D=0$

$B+D=0 \qquad D=-\frac{C}{2}$

$B=-D=\frac{C}{2}$

$1+B+C=0$

$1+\frac{C}{2}+C=0 \qquad 2+3C=0$

$C=-\frac{2}{3}; \qquad D=-\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{3}=\frac{1}{3} \qquad B=-\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{p(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$x(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$x(t)=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

№517

$$\begin{cases} x'-x+2y=3 \\ 3x'+y'-4x+2y=0 \end{cases} \qquad x(0)=0 \qquad y(0)=0$$

$$x'=x-2y+3$$

$$3x-6y+9+y'-4x+2y=0$$

$$y'-x-4y+9=0$$

$$\begin{cases} x'=x-2y+3 \\ y'=x+4y-9 \end{cases}$$

Перейдя к изображениям, получаем:

$$\begin{cases} p\overline{x}(p)=\overline{x}(p)-2\overline{y}(p)+\dfrac{3}{p} \\ p\overline{y}(p)=\overline{x}(p)+4\overline{y}(p)-\dfrac{9}{p} \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $\overline{x}(p)$ и $\overline{y}(p)$:

$$\overline{y}(p)(p-4)=\overline{x}(p)-\frac{9}{p}$$

$$\overline{y}(p)=\frac{p\overline{x}(p)-9}{p(p-4)}$$

$$\overline{x}(p)(p-1)=-2\frac{p\overline{x}(p)-9}{p(p-4)}+\frac{3}{p}$$

$$\overline{x}(p)\left(p-1+\frac{2}{p-4}\right)=\frac{18}{p(p-4)}+\frac{3}{p}=\frac{18+3p-12}{p(p-4)}=\frac{3p+6}{p(p-4)}$$

$$\overline{x}(p)\frac{p^2-4p-p+4+2}{p-4}=\frac{3(p+2)}{p(p-4)}$$

$$\overline{x}(p)=\frac{3(p+2)}{p(p^2-5p+6)}=\frac{3(p+2)}{p(p-2)(p-3)}$$

$$\overline{y}(p)(p-4)=\frac{3(p+2)}{p(p-2)(p-3)}-\frac{9}{p}=\frac{3p+6-9p^2+45p-54}{p(p-2)(p-3)}$$

$$\overline{y}(p)=\frac{-9p^2+48p-48}{p(p-2)(p-3)(p-4)}$$

$$\overline{x}(p)=\frac{3p+6}{p(p-2)(p-3)}$$

$$u(p)=3p+6; \qquad V(p)=p(p-2)(p-3)=p(p^2-5p+6)=p^3-5p^2+6p$$

$$V'(p)=3p^2-10p+6$$

Находим корни: $V(p)$ $p_1=0;$ $p_2=2;$ $p_3=3.$

Получаем: $\dfrac{u(p_1)}{V(p_1)}=\dfrac{6}{6}=1;$ $\quad \dfrac{u(p_2)}{V(p_2)}=\dfrac{12}{-2}=-6;$ $\quad \dfrac{u(p_3)}{V(p_3)}=\dfrac{15}{3}=5$

$$x(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}=\frac{A(p-2)(p-3)+Bp(p-3)+Cp(p-2)}{p(p-2)(p-3)}=$$

$$=\frac{Ap^2-5Ap+6A+Bp^2-3Bp+Cp^2-2Cp}{p(p-2)(p-3)}=\frac{p^2(A+B+C)+p(-5A-3B-2C)+6A}{p(p-2)(p-3)}$$

$$\begin{array}{l|l} p^2 & A+B+C=0 \\ p & -5A-3B-2C=3 \\ p^0 & 6A=6 \end{array} \qquad A=1 \qquad \begin{array}{l} 1+B+C=0 \,|\, *3 \\ -5-3B-2C=3 \\ -2+C=3 \end{array} \qquad C=5$$

$$1+B+5=0$$

$$B=-6$$

$$x(p)=\frac{1}{p}+\frac{-6}{p-2}+\frac{5}{p-3}$$

$$x(p)=1-6e^{2t}+5e^{3t}$$

Отсюда по формуле: $\mathrm{f(t)}=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{\mathrm{u(pj)}}{\mathrm{V'(pj)}}*e^{pjt}$ находим $\mathrm{x(t)}=1-6e^{2t}+5e^{3t}$.

Аналогично находим y(t):

$$\mathrm{u(p)}=-9p^2+48p-48; \qquad \mathrm{V(p)}=p(p-2)(p-3)(p-4)=(p^2-2p)(p^2-7p+12)=$$

$$=p^4-7p^3+12p^2-2p^3+14p^2-24p=p^4-9p^3+26p^2-24p; \quad V'(p)=4p^3-27p^2+52p-24$$

Корни $V(p): p_1=0; p_2=2; p_3=3; p_4=4$

$$\frac{u(p_1)}{V'(p_1)}=\frac{-48}{-24}=2; \quad \frac{u(p_2)}{V'(p_2)}=\frac{12}{4}=3$$

$$\frac{u(p_3)}{V'(p_3)}=\frac{15}{-3}=-5; \quad \frac{u(p_4)}{V'(p_4)}=0$$

Таким образом: $y(t)=2+3e^{2t}-5e^{3t}$;

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 7. Номера 477, 487, 497, 507, 517