№472

В методе Даламбера решение волнового уравнения находятся в виде:

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(x)dx.$$

Отдельно находим:

$$\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}=\frac{(x-at)^2+(x+at)^2}{2}=\frac{x^2-2xat+a^2t^2+x^2+2xat+a^2t^2}{2}=x^2+a^2t^2;$$

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(x)dx-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin x dx=-\frac{1}{2a}\cos x\Big|_{x-at}^{x+at}=-\frac{1}{2a}\left[\cos(x+at)-\cos(x-at)\right]=\frac{1}{2a}*2\sin x*\sin at=$$

$=\dfrac{\sin x*\sin at}{a}$ (использованв формула $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\varphi$ в итоге, искомое решение уравнения

$$u(x,t)=x^2+a^2t^2+\frac{\sin x*\sin at}{a}.$$

482

Представить заданную функцию $\omega = e^{-z^z}$ где $z = x + iy$, в виде $\omega = u(x;y) + iV(x;y)$ проверить является ли она аналитической. Если да, то найти значеня её производной в заданной точке $z_0 = i$

Решение:

1)Находим $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$

Тогда $(y^2 - x^2) - 2ixy$

$\omega = e^{-2^2}$

$\underbrace{e^{(y^2-x^2)} * \cos 2xy}_{u(x;y)} - \underbrace{ie^{(y^2-x^2)}\sin 2xy}_{-V(x;y)}$

2)Функция $f(z) = u + iV$ аналитическая, если выполняется условие Коши - Римана.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x};$$

Находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2xe^{(y^2-x^2)} * \cos 2xy + e^{(y^2-x^2)}(-2y\sin 2xy) = -2xe^{(y^2-x^2)}[x\cos 2xy + y\sin 2xy]$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2e^{(y^2-x^2)}\sin 2xy - 2xe^{(y^2-x^2)}\cos 2xy = -2e^{(y^2-x^2)}[y\sin 2xy + x\cos 2xy] = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ye^{(y^2-x^2)}\cos 2xy - 2xe^{(y^2-x^2)}\sin 2xy = 2e^{(y^2-x^2)}(y\cos 2xy - x\sin 2xy)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2xe^{(y^2-x^2)}\sin 2xy - 2ye^{(y^2-x^2)}\cos 2xy = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Условия Коши - Римана выполнимы, функция аналитическая.

3) $\left.\frac{d\omega}{dz}\right|_{z_0} = \frac{d}{dz}\left(e^{-z^z}\right)_{z_0} = -2ze^{-z^z}\Big|_{z_0=i} = 2ie^{-1} = -\frac{2}{e}i$ - значение производной в точке $z_0 = i$

492

Разложить функцию $f(z)=\sin\frac{z}{1-z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$ и определить область сходимости этого ряда.

Решение:

Обозначим $z-1=t;\ z=t+1$

$$\sin\frac{z}{1-z}=\sin\left(1+\frac{1}{t}\right)=\sin 1*\cos\frac{1}{t}+\cos 1*\sin\frac{1}{t}$$

Используем разложение функции

$$\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\frac{u^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

Подставив $u=\frac{1}{t}$ получим $u=\frac{1}{z-1}$

$$\cos\frac{1}{t}=\cos\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(z-1)^{2n}}$$

$$\sin\frac{1}{t}=\sin\frac{1}{z-1}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

Ряд Лорана будет иметь вид, учитывая, что $\sin\frac{z}{1-z}=-\sin\frac{z}{z-1}$

Нечётность функции

$$f(z)=\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}(z-1)^{-2n}+\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}(z-1)^{-(2n+1)}$$

здесь координата $\cos 1=\cos 57{,}324^{\circ}=0{,}54;\ \ \sin 1=\sin 57{,}324\approx 0{,}84.$

Данный ряд сходится всюду, кроме точки $z=1$, т.к. функция $\frac{1}{n!}$ убывает быстрей показательной функции.

№502

Методом опрерационного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. $x''\text{-}x'= te^t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

Решение:

Пусть $\overline{x}(p)$ - изображение искомой функции.

$x(t) \to \overline{x}(p)$ тогда по теореме о дифференцировании оригинала

$x'(t) \to p\overline{x}(p) - x_0 = px(p)$

$x''(t) \to p^2\overline{x}(p) - px_0 - x'_0 = p^2\overline{x}(p)$

Изображение правой части.

$te^t \to \dfrac{1}{(p-1)^2}$ подставляем в уравнение, получаем уравнение для изображения

$(p^2 - p)\overline{x}(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2}$ отсюда

$\overline{x}(p) = \dfrac{1}{p(p-1)^3}$ изображение решения.

Разложим дробь на простейшие методом неопределённых коэффициентов.

$$\frac{1}{p(p-1)^3} = \frac{A}{P} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2} + \frac{D}{(p-1)^3}$$

Приводим к общему знаменателю.

$1 - A(p-1)^3 + Bp(p-1)^2 + Cp(p-1) + Dp$

При $p = 1$	При $p = 0$	При $p = 2$
$1 = D$	$1 = -A$	$1 = A + 2B + 2C + 2D$

$2(B + C) = 1 - A - 2D = C$

$B + C = 0 \Rightarrow B = -C$

При $p = 3$

$1 = 8A + 12B + 6C + 3D$ или

$12B + BC = 1 - 8A - 3D = 9 - 3 = 6$

$2B + c = 1 \Rightarrow B = \dfrac{1-C}{2} = -C$

$1 - C = -2C$

$C = -1$

$C = -1$

$B = 1$

В итоге

$$\frac{1}{p(p-1)^3} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}.$$

512

Методом опрерационного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z & x(0)=1 \\ y' = -2x + y - 2z & y(0)=1 \\ z' = 5x + 2y + 7z & z(0)=1 \end{cases}$$

Решение:

Пусть $\bar{x}(p), \bar{y}(p), \bar{z}(p)$ - изображение искомых функций, тогда

$x'(t) \to p\bar{x}(p) - x_0 = p\bar{x}(p) - 1$

$y'(t) \to p\bar{y}(p) - y_0 = p\bar{y}(p) - 1$

$z'(t) \to p\bar{z}(p) - z_0 = p\bar{z}(p) - 1$

Подставляем в систему уравнений:

$$\begin{cases} \bar{x}(p)(p+2) + 2\bar{y}(p) + 4\bar{z}(p) = 1 \\ 2\bar{x}(p) + \bar{y}(p)(p-1) + 2\bar{z}(p) = 1 \\ 5\bar{x}(p) + 2\bar{y}(p) + +(7-p)\bar{z}(p) = -1 \end{cases}$$

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p+2) & 2 & 4 \\ 2 & (p-1) & 2 \\ 5 & 2 & (7-p) \end{vmatrix} = (p+2)(p-1)(7-p) + 16 + 20 - 20(p-1) - 4(p+2) - 4(7-p) =$$

$$= -p^3 + 6p^2 + 9p - 14 + 36 - 29p + 20 - 4p - 8 - 28 + 4p = -p^3 + 6p^2 - 11p + 6$$

Разложим выражение Δ на множители. Находим корни уравнения

$p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = 0$ подбором находим $\mathrm{p} = 1$, делим на $\mathrm{p} - 1$

Корни уравнения $p^2 - 5p + 6 = (p-2)(p-3)$

В итоге определитель

$\Delta = -(p-1)(p-2)(p-3)$

Находим

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & p-1 & 2 \\ -1 & 2 & 7-p \end{vmatrix} = -p^2 + 8p - 7 + 8 - 4 + 4p - 4 - 4 - 14 + 2p = -p^2 + 14p - 25$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} p+2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 7-p \end{vmatrix} = -p^2 + 5p + 14 - 8 + 10 - 20 + 2p + 4 - 14 + 2p = -p^2 + 9p - 14 = -(p-2)(p-7)$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} p+2 & 2 & 1 \\ 2 & p-1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -p^2 - p + 2 + 4 + 10 - 5p + 5 - 2p - 4 + 4 = -p^2 - 8p + 21$$

$$\bar{x}(p) = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{p^2 - 14p + 25}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

Разложим дробь на простейшие

$$\frac{p^2-14p+25}{(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}$$

Приводим к общему знаменателюи упрощаем:

Это равенство выполняется при любых p.

Полагая $p=1$ имеет

$1-14+25=A(-1)(-2)=2A$

$12-2A \quad A=6$

При $p=2$

$4-28+25=B(1)(-1)=-B \quad B=-1$

При $p=3$

$9-42+25=2C \quad -8=2C \quad C=-4$

В итоге

$$\bar{x}(p)=6\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p-2}-4\frac{1}{p-3}$$

Изображение функции x(t).

Аналогично

$$\bar{y}(p)=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{p^2-9p+14}{(p-1)(p-2)(p-3)} \quad \text{или}$$

$$p^2-9p+14=A(p-2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-2)(p-1)$$

При $p=1$

$1-9+14=2A \quad A=3$

$4-18+14=-B \quad B=0$

при $p=3$ $9-27+14=2C \quad C=-2$

Тогда $\bar{y}(p)=3\frac{1}{p-1}-2\frac{1}{p-3}$

и аналогично

$$\bar{z}(p)=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{p^2+8p-21}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

$$p^2+8p-21=A(p-2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-1)(p-2)$$

при $p=1$

$1+8-21=2A \quad A=-6$

при $p=2$

$4+16-21=-B \quad B=1$

при $p=3$

$9+24-21=2C \quad C=6$

$$\bar{z}(p)=-6\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p-2}+6\frac{1}{p-3}.$$

По таблице преобразований Лапласа находим:

$\frac{1}{p-a} \to e^{at}$, тогда оригиналы искомых функций (решение системы) имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = 6e^{t} - e^{2t} - 4e^{3t} \\ y(t) = 3e^{t} - 2e^{3t} \\ z(t) = -6e^{t} + e^{2t} + 6e^{3t} \end{cases}$$

Решение системы дифференциальных уравнений.