№471

$$f(x) = x(2-x), \qquad F(x) = e^{-x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u\big|_{t_0=0} = x(2-x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t_0=0} = e^{-x}$$

$$u = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} e^{-z}dz = \frac{1}{2}((x-at)(2-x+at)+(x+at)(2-x-at))$$

$$-\frac{1}{2a}e^{-z}\Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{1}{2}(2x-2at-x^2+xat+xat-a^2t^2+2x+2at-x^2-xat-axt-a^2t^2)-\frac{1}{2a}\left(e^{-x-at}-e^{-x+at}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(4x-2x^2-2a^2t^2)-\frac{1}{2a}\left(e^{-x-at}-e^{-x+at}\right) \text{или}$$

$$u = 2x - x^2 - a^2t - \frac{1}{2a}\left(e^{-x-at}-e^{-x+at}\right).$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 1. Номера 471, 481, 491, 501, 511

№481

$\chi = (iz)^3. \quad z_0 = -1 + i$

$z = x + iy$

$\omega = (i(x+iy))^3 = (ix - y)^3 = -ix^3 - 3y(-x^2) + 3ixy^2 - y^3 = -ix^3 + 3x^2y + 3xy^2 i - y^3 =$

$= (3x^2 y - y^3) + i(-x^3 + 3xy^2), где$

$u(x,y) = 3x^2 y - y^3$

$V(x,y) = -x^3 + 3xy^2$

Проверим выполнимость условий Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$

$\Rightarrow$ Функция является аналитической.

Найдём производную функции в точке $z_0 = -1 + i$ x = -1 y = 1.

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial z}\right|_{z_0} = 3(iz)^2 i\Big|_{z_0} = -3iz^2\Big|_{z_0} = -3i(-1+i)^2 = -3i(-1-2i+1) = 3i - 6 - 3i = -6.$$

№491

$$f(z)=\frac{1}{3z-5};\quad z_0=\frac{5}{3}$$

Подставим в данную функцию в виде:

$$f(z)=\frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{3z}{5}+1}$$

$$f(z)=\frac{1}{3}*\frac{1}{z-\frac{5}{3}}$$

Сделаем замену:

$$y=\frac{3z}{5};\textit{тогда}$$

$$f(y)=\frac{-\frac{1}{5}}{1-y}$$

Разложение содержит 1 член главной части.

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 1. Номера 471, 481, 491, 501, 511

501

$x'''+x''=\sin t;\quad x(0)=1;\quad x'(0)=1;\quad x''(0)=0$

Переходим к изображениям:

$$p^3\overline{x}(p)-(p^2x(0)+px'(0)+x''(0))+p^2\overline{x}(p)-(px(0)+x'(0))=\frac{1}{p^2+1}$$

$$p^3\overline{x}-p^2-p+p^2\overline{x}(p)-p-1=\frac{1}{p^2+1}$$

$$\overline{x}(p^3+p^2)=\frac{1}{p^2+1}+2p+p^2+1$$

$$\overline{x}=\frac{1+(2p+p^2+1)(p^2+1)}{(p^2+1)(p^3+p^2)}=\frac{1+2p^3+p^4+p^2+2p+p^3+1}{p^2(p^2+1)(p+1)}$$

$$\overline{x}=\frac{p^4+2p^3+2p^2+2p+2}{p^2(p^2+1)(p+1)}$$

$$\frac{p^4+2p^3+2p^2+2p+2}{p^2(p^2+1)(p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+1}+\frac{Dp+E}{p^2+1}=$$

$$=\frac{Ap(p^3+p^2+p+1)+B(p^3+p^2+p+1)+Cp^2(p^2+1)+(Dp+E)(p^3+p^2)}{p^2(p^2+1)(p+1)}$$

$$\begin{array}{l|l} p^4 & A+C+D=1 \\ p^3 & A+B+E+D=2 \\ p^2 & A+B+C+E=2; \\ p^1 & A+B=2 \\ p^0 & B=2\Rightarrow A=0; \end{array}$$

$$\mathrm{C}=1-\mathrm{D}$$
$$\mathrm{E}=-\mathrm{D}$$
$$2+1-\mathrm{D}-\mathrm{D}=2$$
$$2\mathrm{D}=1\Rightarrow \mathrm{D}=\frac{1}{2};\quad E=-\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{C}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Следовательно:

$$\overline{x}=\frac{2}{p^2}+\frac{1}{2(p+1)}+\frac{1}{2}\frac{p-1}{p^2+1},\textit{откуда}$$

$$\overline{x}=\frac{2t}{1!}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t.$$

№511

$$\begin{cases} x' = x - y & x(0) = 1 \\ y' = x + y & y(0) = 0 \end{cases}$$

Прейдя к изображениям , имеем

$$\begin{cases} p\bar{x}(p) - 1 = \bar{x}(p) - \bar{y}(p) \\ p\bar{y}(p) = \bar{x}(p) + \bar{y}(p) \end{cases}$$

$$\bar{x}(p) = p\bar{y}(p) - \bar{y}(p)$$

$$p(p\bar{y}(p) - \bar{y}(p)) - 1 = p\bar{y}(p) - \bar{y}(p) - \bar{y}(p)$$

$$p^2\bar{y}(p) - p\bar{y}(p) - 1 = p\bar{y}(p) - 2\bar{y}(p)$$

$$\bar{y}(p) - (p^2 - p - p + 2) = 1$$

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \quad \text{или} \quad \bar{y}(p) = \frac{1}{(p-1)^2 + 1}$$

$$\bar{x}(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1}, \textit{откуда}$$

$$x = e^t \cos t$$

$$y = e^t \sin t.$$