http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 9. Номера 429, 439, 449, 459, 469

№429

$$u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Интегральный признак

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \ln(\ln(x+1))\Big|_1^{\infty} = \infty$$

Итеграл расходится, $\Rightarrow$ данный рад расходится.



http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 9. Номера 429, 439, 449, 459, 469

№439

Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,\ a_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}$.

Имеем $a_{n+1} = \frac{3\cdot 3^n}{\sqrt{2\cdot 2^n(3n+2)}}$.

Радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot\sqrt{2\cdot 2^n(3n+2)}}{3\cdot 3^n\sqrt{2^n(3n-1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{3n+2}{3n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{3+2/n}{3-1/n}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{3+0}{3-0}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Интервал сходимости определяется неравенством $|x| < \frac{\sqrt{2}}{3}$, или $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$. Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала:

- при $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ $(1)$;
- при $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ - знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\ldots$ $(2)$.

Для рядов (1) и (2) необходимый признак сходимости выполняется: $\lim_{n\to\infty}|U_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Ряд (1) расходится по признаку сравнения в предельной форме (сравниваем с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\ b_n = \frac{1}{n},\ a_n = \frac{1}{3n-1}$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}\cdot\frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-1/n} = \frac{1}{3-0} = \frac{1}{3}.$$

Ряд (2) сходится по признаку Лейбница, т.к. этот ряд знакочередующийся, выполняется необходимый признак сходимости, и

$\frac{1}{2} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \ldots$. Так как ряд (1), составленный из абсолютных членов ряда (2) расходится, то ряд (1) сходится условно.

Ответ: $x \in \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3} \right]$, или $-\frac{\sqrt{2}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{2}}{3}$.

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 9. Номера 429, 439, 449, 459, 469

№449

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}, \quad b = 0{,}5$$

*Вычислить*

$$\int_0^b f(x)dx$$

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{\left( \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \ldots \right)}{x^2} =$$

$$= 1! - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \ldots = 1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{120} + \ldots$$

*Интегрируем почленно*

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2} dx = \int_0^{0,5} \left( 1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{120} \right) dx =$$

$$= \left( x - \frac{x^5}{30} + \frac{x^9}{1080} \right) \Bigg|_0^{0,5} = 0{,}5 - 0{,}00104 + 1{,}8 * 10^{-6} =$$

$$= 0{,}49896.$$

## №459

$y' = 2e^{y} + xy; \quad y(0) = 0$

Решение данного уравнения будем искать в виде ряда:

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

$y(0) = a_0 = 0$

$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$

*Получаем,*

$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = 2e^{\left(a_z x + a_2 x^2 +,,,\right)} + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots$

$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = 2\left(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + \frac{1}{2}(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^2 + \ldots\right) + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots$

*Имеем*

$a_1 = 2$

$2a_2 = 2a_1 = 4 \Rightarrow a_2 = 2$

$3a_3 = 2a_2 + a_1 + a_1 = 4 + 4 + 2 = 10 \Rightarrow a_3 = \frac{10}{3}.$

............

Таким образом,

$y = 2x + 2x^2 + \frac{10}{3}x^3 + \ldots$

**№469**

469) $f(x)=x^2$, $(0;2\pi)$. Найдём коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{8\pi^3}{3\pi}=\frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos kx\,dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2\\ dv=\cos kx\,dx\\ du=2x\,dx\\ v=\frac{1}{k}\sin kx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{k}\sin kx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{k}\int_0^{2\pi}x\sin kx\,dx\right]=\left|\begin{array}{l}u=x\\ dv=\sin kx\,dx\\ du=dx\\ v=-\frac{1}{k}\cos kx\,dx\end{array}\right|=-\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{x}{k}\cos kx\Big|_0^{2\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx\right]=-\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{2\pi}{k}+\frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^{2\pi}\right]=\frac{4}{k^2};$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin kx\,dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2\\ dv=\sin kx\,dx\\ du=2x\,dx\\ v=-\frac{1}{k}\cos kx\end{array}\right|=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{k}\cos kx\Big|_0^{2\pi}+\frac{2}{k}\int_0^{2\pi}x\cos kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{k}+\frac{2}{k}\left(\frac{x}{k}\sin kx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{k}+\frac{2}{k^2}\left(0+\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{k}+\frac{2}{k^2}\,\frac{1-1}{k}\right]=-\frac{4\pi}{k};$$ Поэтому ряд Фурье

$$f(x)=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{4}{3}\pi^2+4\left[\cos x+\frac{\cos 2x}{4}+\dots+\frac{\cos kx}{k^2}+\dots\right]-$$

$$-4\pi\left[\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\dots+\frac{\sin kx}{k}+\dots\right]$$