№426

Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_n = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Воспользуемся интегральным признаком.
Члены данного ряда положительны и убывают. В качестве функции $f(x)$ возьмем функцию: $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$.

При $x \geq 1$ эта функция непрерывна и убывает, причем $f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

т.к. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln(n+1)}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln(b+1)} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$

Следовательно данный ряд сходится.

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 5. Номера 426, 436, 446, 456, 466

№436

Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$, $a_n = \frac{5^n}{\sqrt[n]{n}}$

Решение.

Определяем радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^n}{\sqrt[n]{n}} \times \frac{\sqrt[n+1]{n+2}}{5^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{5\sqrt[n]{n}}\right| = \frac{1}{5\times 1} = \frac{1}{5}$$

Интервал сходимости данного ряда определяется неравенством $|x| < 1/5$, или $-0,2 < x < 0,2$. Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала.

При x=0,2 получаем ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt[n]{n}} \times 0,2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Этот ряд расходится, т.к. не удовлетворяет необходимому признаку сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

При x=-0,2 получаем знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt[n]{n}} \times (-0,2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} - \dots$$

Полученный ряд также расходится, т.к.:

$$\lim_{n\to\infty} |U_n| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n \times \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right| = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

Таким образом, интервал сходимости исследуемого степенного ряда: $-0,2 < x < 0,2$.

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 5. Номера 426, 436, 446, 456, 466

№446

Вычислить определённый интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x*e^{-x}$ с точностью до 0,001, разложив подинтегральную функцию в степенной ряд и затем проинегрировать его почленно.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x*e^{-x}$$

Решение:

1) Для разложения подинтегральной функции в ряд используем формулу Тейлора:

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - ...,$ тогда

$$x*e^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!}$$

2) Инегрируя этот ряд почленно, найдём:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x*e^{-x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} xdx - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2!}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{3!}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^5}{4!}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3!}\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4!}\frac{x^6}{6}\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{2!}\frac{1}{64} - \frac{1}{3!}\frac{1}{160} + \frac{1}{4!}\frac{1}{384}$$

Для вычисления инеграла с точностью до 0,001 достаточно взять сумму первых четырёх членов, т.к. пятый

$\frac{1}{4!}*\frac{1}{384} = \frac{1}{9216} < 0,001,$ значит

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x*e^{-x} \approx 0,126 - 0,0417 + 0,0078 - 0,001 \approx 0,0901 = 0,09$$

Ответ: $\int_0^{\frac{1}{2}} x*e^{-x} = 0,09.$

№456

$$y' = e^x + y, \quad y(0) = 4$$

$$y = y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!} + x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \frac{y^n(0)}{n!}x^n$$

$$y'(0) = e^0 + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$y''(x) = e^x + y'$$

$$y''(0) = e^0 + 5 = 6$$

$$y'''(x) = e^x + y''$$

$$y'''(0) = e^0 + 6 = 7$$

$$y = y(x) = 4 + 5x + 3x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \ldots$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 5. Номера 426, 436, 446, 456, 466

№466

Разложить функцию $f(x)=\lfloor 1-x \rfloor$ в ряд Фурье в интервале $(-2,2)$.

Решение.

Для разложения функции с периодом $2l$ в ряд Фурье и вычисление его коэффициентов используем формулы:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_0^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n x}{l}+b_n\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx;$$

где $n=0,1,2\ldots$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx;$$

где $n=1,2,3\ldots$

Данная функция определяется как:

$$f(x)=|1-x|=\begin{cases}1-x,\ при\ -2<x<1\\ x-1,\ при\ 1<x<2\\ 0,\quad при\ x=1\end{cases}$$

В нашем случае $l=2$, а точка $x=1$ разбивает интервал $(-2,2)$ на две части.

Вычислим коэффициенты:

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{1}(1-x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx+\int_{1}^{2}(x-1)\cos\frac{\pi n x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{1}\cos\frac{\pi n x}{2}dx-\int_{-2}^{1}x\cos\frac{\pi n x}{2}dx+\int_{1}^{2}x\cos\frac{\pi n x}{2}dx-\int_{1}^{2}\cos\frac{\pi n x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}-\frac{2x}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2x}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}--\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{2}{\pi n}\sin(-\pi n)-\frac{4}{\pi n}\sin(-\pi n)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(-\pi n)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{\pi n}\sin\pi n+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\pi n-\frac{2}{\pi n}\sin\pi n-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\cos\pi n-\frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{\pi n}{2}=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos\pi n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)$$

При n - нечетном $\cos\pi n=-1;\quad \cos\frac{\pi n}{2}=0;\quad a_n=-\frac{8}{n^2\pi^2}=-\frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}$

при $n=4k$, т.е. $n=4,8,12\ldots\quad \cos\pi n=1,\quad \cos\frac{\pi n}{2}=-1,\quad a_n=\frac{16}{n^2\pi^2}=\frac{16}{(4k-2)^2\pi^2}$

Вычислим a_0:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(1-x)dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}(x-1)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{1}^{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+2+2+2-2-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{2}$$

Вычислим b_n:

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{1}(1-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx+\int_{1}^{2}(x-1)\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{1}\sin\frac{\pi n x}{2}dx-\int_{-2}^{1}x\sin\frac{\pi n x}{2}dx+\int_{1}^{2}x\sin\frac{\pi n x}{2}dx-\int_{1}^{2}\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}-\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}+\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi n x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{\pi n x}{2}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{2}{n\pi}\cos(-\pi n)+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin(-\pi n)+\frac{4}{n\pi}\cos(-\pi n)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\pi n-\frac{4}{\pi n}\cos\pi n+\frac{2}{\pi n}\cos\pi n-\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\cos\pi n-\frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{1\cdot 4}{2\cdot\pi n}\left(\cos\pi n-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{2}{\pi n}\left(\cos\pi n-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right)$$

При n - четном $\cos\pi n=1$, а $\sin\frac{\pi n}{2}=0$, $b_n=\frac{2}{\pi n}=\frac{2}{\pi(2k)}$

При n - нечетном возможно два случая:

- при, $n=4k-1$ где $k=1,2,3\dots$ $\cos\pi n=-1,\ \sin\frac{\pi n}{2}=-1,\quad b_n=0$;
- при $n=4k-3$, где $k=1,2,3\dots$ $\cos\pi n=-1,\ \sin\frac{\pi n}{2}=1,$ откуда

$$b_n=\frac{2}{\pi n}\left(-1-\frac{2}{\pi n}\right)=\frac{-2}{\pi n}\left(\frac{2}{\pi n}+1\right)=\frac{-2}{\pi(4k-3)}\left(\frac{2}{(4k-1)n}+1\right)$$

Подставим эти коэффициенты в разложение ряда:

$$f(x)=|1-x|=\frac{5}{2}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(4k-2)^2}\cos\frac{(4k-2)\pi x}{2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k^2}\left(\sin\frac{(2k)x}{2}\right)-\frac{1}{(4k-3)}\left(1+\frac{2}{\pi(4k-3)}\right)\sin\frac{(4k-3)x}{2}\right)$$

Упростив, получим ответ:

$$|1-x| = \frac{5}{2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(2k-1)}\cos(2k-1)\pi x - \frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\cos(2k+1)\pi x}{2}\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k^2}\sin kx - \frac{(\pi(4k-3)+2)}{(4k-3)^2\pi}\sin\frac{(4k-3)x}{2}\right)$$