

Исследовать сходимость числового ряда :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ где } u_n = \frac{n^3}{e^n}$$

Решение:

$$u_n = \frac{n^3}{e^n}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}$$

Применим признак Даламбера :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 e^4}{n^3 e^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{1}{e} * 1 = e^{-1} < 1$$

Ряд сходится.

Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$

$$a_n = \frac{n}{3^n (n+1)}$$

Решение:

$$a_n = \frac{n}{3^n (n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1} (n+2)}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n(n+2)}{3^n (n+1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 3 * \frac{1+0}{1+0+0} = 3$$

(-3;3) интервал сходимости

На концах интервала сходимости (то есть в точках $x = -3, x = 3$) члены ряда с точностью до знака имеют вид

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, то члены полученного ряда не удовлетворяют необходимому условию сходимости числового ряда. Следовательно в точках $x = -3, x = 3$ исходный ряд расходится.

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С.
Контрольная работа 10. Вариант 5. Номера 425, 435, 445, 455, 465

№445

$$f(x) = x \ln(1-x^2), \quad b = 0,5$$

$$\int_0^b f(x) dx$$

Решение:

$$f(x) = x \ln(1-x^2) = x \left(-\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} \dots \right)$$

$$\int_0^b x \ln(1-x^2) dx = \int_0^{0,5} \left(x^3 + \frac{1}{2} x^5 + \frac{1}{3} x^7 \right) dx = - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{12} + \frac{x^8}{24} \right) \Big|_0^{0,5} = -0,0156 - 0,0013 = -0,0169.$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С.
Контрольная работа 10. Вариант 5. Номера 425, 435, 445, 455, 465

№455

$$y(0) = 1$$

$$y' = \sin x + y^2$$

Решение:

$$\text{Из условия } y(0) = 1 \text{ имеем } y' = \sin 0 + 1^2 = 1$$

Дифференцируем уравнение:

$$y'' = (\sin x + y^2)' = \cos x + 2yy' \Rightarrow$$

$$y''(0) = \cos 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$$

Искомое решение:

$$y = 1 + \frac{1x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \dots = 1 + x + 1,5x^2 \dots$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С.
Контрольная работа 10. Вариант 5. Номера 425, 435, 445, 455, 465

№465

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \Rightarrow (-\pi; \pi)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos mx dx = \left[\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dV = \cos mx dx \\ V = \frac{1}{m} \sin mx \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{m} \sin mx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{m} \sin mx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} * \frac{1}{m^2} \cos mx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi m^2} ((-1)^m - 1)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx dx = \left[\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dV = \sin mx dx \\ V = -\frac{1}{m} \cos mx \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{m} \cos mx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{m} \cos mx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{m} (-1)^m + \frac{1}{m^2} \sin mx \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{(-1)^m}{m}$$

Искомое разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi m^2} ((-1)^m - 1) \cos mx - \frac{(-1)^m}{m} \sin mx \right).$$