№422

$$U_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

Воспользуемся интегральным признаком:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}}d(\sqrt{x}) = -2\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x}) = -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^\infty = -2(e^{-\infty} - e^{-\sqrt{1}}) = -2(0 - e^{-1}) =$$

$$= -2(0-e) = \frac{2}{e}$$ - конечное число.

Интеграл сходится, следовательно и данный ряд сходится.

№432

$$a_n = \frac{2^n}{n(n+1)}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n(n+1)} * \frac{(n+1)(n+2)}{2*2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

На концах интервала сходимости $\left(\text{то есть в точках } x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}\right)$ члены ряда по абсолютному значению равны.

$$|a_n| = \frac{1}{n(n+1)}$$

Поскольку

$$|a_n| = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный ряд по признаку сравнения также сходится.

Таким образом, исходный ряд сходится в отрезке $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

№442

$$f(x)=\cos\sqrt{x};\qquad b=1;\ \varepsilon=0{,}001,$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\cos\sqrt{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^6}{6!}+\ldots\right)dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{720}x^3+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{72}-\frac{x^4}{2880}+\ldots\right)\Bigg|_0^1\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880}\approx 1-0{,}25+0{,}014-0{,}0003\approx 0{,}764.$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 2. Номера 422, 432, 442, 452, 462

№452

$$y'=e^x+y^2;\quad y(0)=0$$

$$y=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots$$

$$y(0)=e^0+0^2=1+0=1$$

$$y''=(e^x+y^2)'=e^x+2yy'$$

$$y''(0)=e^0+2*0*1=1+0=1$$

$$y'''=(e^x+2yy')'=e^x+2y'^2+2yy''$$

$$y'''(0)=e^0+2*1^2+2*0*1=1+2+0=3$$

$$y=0+\frac{1}{1!}(x-0)+\frac{1}{2!}(x-0)^2+\frac{3}{3!}(x-0)^3+$$

$$y=1x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\ldots$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 2. Номера 422, 432, 442, 452, 462

№462

$f(x)=x^2+1; \quad (-2;2)$

Определим кэффициенты ряда Фурье:

Т.к. функция $f(x)=x^2+1$ чётная в интервале (-2;2), то коэффициенты $b_m=0$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^2+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}$$

$$a_m=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{m\pi x}{2}=\int_0^2(x^2+1)\cos\frac{m\pi x}{2}dx=\int_0^2 x^2\cos\frac{m\pi x}{2}dx+\int_0^2\cos\frac{m\pi x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x^2=u; \quad du=2xdx \\ dV=\cos\frac{m\pi x}{2}dx \\ V=\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2}\end{array}\right|=x^2\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2}*2xdx+\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2=$$

$$=4*\frac{2}{m\pi}\sin m\pi-0-\frac{4}{m\pi}\int_0^2 x\sin\frac{m\pi x}{2}dx+\frac{2}{m\pi}(\sin m\pi-\sin 0)=\left[\begin{array}{l} u=x; \quad du=dx \\ dV=\sin\frac{m\pi x}{2}dx \\ V=-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{4}{m\pi}\left(-x\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\int_0^2\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2}dx\right)=\frac{8}{m^2\pi^2}(2\cos m\pi-0\cos 0)-\frac{4}{m\pi}\frac{4}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{8}{m^2\pi^2}2(-1)^m-\frac{16}{m^3\pi^3}(\sin m\pi-\sin 0)=\frac{16}{m^2\pi^2}(-1)^m$$

Разложение данной функции в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\frac{7}{3}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{16}{m^2\pi^2}(-1)^m\cos mx.$$