№421

$u_n = \dfrac{n+3}{n^3-2}$ Сравним этот ряд с рядом, у которого общий член $V_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)n^2}{n^3-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2}{n^3-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^3}} = 1.$$

Т.к. предел конечен и отличен от нуля, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - сходится. Докажем это:

По интегральному признаку:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = -(0-1) = 1 \text{ - конечное число} \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

Итак: ряд $u_n = \dfrac{n+3}{n^3-2}$ – *сходится.*

№431

Найдём интервал сходимости ряда:

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|$$

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[3]{(n+2)^{n+1}}}{(n+1)!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!} * \frac{(n+1)!}{\sqrt[3]{(n+2)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n+3}{3}}}{(n+2)^{\frac{n+1}{3}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}(n+1) * n^{\frac{n}{3}}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}(n+2)^{\frac{1}{3}} * n^{\frac{n}{3}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{3}}}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}} * \sqrt[3]{\frac{(n+1)^3}{(n+2)}} = \infty$$

Интервал сходимости данного ряда:

$-\infty < x < +\infty.$

№441

$$f(x)=e^{\frac{-x^2}{3}};\quad b=1;\quad \varepsilon=0{,}001$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{3}}dx$$

Воспользуемся известным расположением в ряд:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$$

Получаем:

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}}dx=\int_0^1\left(1+\frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^3}{3!}+\ldots\right)dx=\int_0^1\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{18}-\frac{x^6}{162}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{90}-\frac{x^7}{1134}+\ldots\right)\Big|_0^1\approx 1-\frac{1}{9}+\frac{1}{90}-\frac{1}{1134}=1-0{,}111+0{,}011-0{,}001=0{,}899.$$

№451

$y' = \cos x + y^2 \qquad y(0) = 1$

Решение данного дифференциального ур-ия будем искать в виде:

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

$y(0) = a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x_2 + \ldots$

Подставляем в уравнение разложенные в ряд y'', y' и $\cos x$

$y'' = a_0^2 + a_0 a_1 x + a_0 a_2 x^2 + a_0 a_3 x^3 + \ldots + a_0 a_1 x + a_1^2 x^2 + a_1^2 x^2 + a_1 a_2 x^3 + \ldots + a_0 a_2 x^2 + a_2 a_1 x_3 + \ldots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

Получаем:

$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots + a_0^2 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2 + a_1^2 x^2 + a_0 a_3 x^3 + 2a_1 a_2 x^3 + \ldots$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получим:

$a_1 = 1 + a_0^2 \Rightarrow a_1 = 2$

$2a_2 = -\frac{1}{2} + 2a_0 a_1 = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{7}{4}$

$y(x) \approx y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} * (x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{y''''(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 \ldots$

$y'(0) = \cos 0 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

$y'' = (\cos x + y^2)' = -\sin x + 2yy'$

$y''(0) = -\sin 0 + 2 * 1 * 2 = 0 + 4 = 4$

$y''' = (-\sin x + 2yy')' = -\cos x + 2y'y' + 2yy''$

$y'''(0) = -\cos 0 + 2 * 2 * 2 + 2 * 1 * 4 = -1 + 8 + 8 = 15$

$y(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x - 0) + \frac{y}{2!}(x - 0)^2 + \frac{15}{3!}(x - 0)^3 + \ldots$

Решение уравнения имеет вид:

$y(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \ldots$

№461

$f(x) = x + 1 \ (-\pi; \pi)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi\right) = \frac{2\pi}{2}.$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos mxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mxdx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx = \begin{vmatrix} x = u; \quad du = dx \\ dV = \cos mxdx \\ V = \frac{1}{m}\sin mx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(k\frac{1}{m}\sin mx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{m}\sin mxdx\right) + \frac{1}{\pi m}\sin mx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{m}\sin m\pi - \frac{\pi}{m}\sin m\pi + \frac{1}{m^2}\cos mx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi m}(\sin m\pi + \sin m\pi) = \frac{1}{\pi m^2}(\cos m\pi - \cos m\pi) = 0$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin mxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mxdx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mxdx = \begin{vmatrix} u = x; \quad du = dx \\ dV = \sin mxdx \\ V = \frac{1}{m}\cos mx \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{m}\cos mx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{m}\cos mxdx\right) - \frac{1}{\pi m}\cos mx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{m}\cos m\pi - \frac{\pi}{m}\cos m\pi + \frac{1}{m^2}\sin mx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) - \frac{1}{\pi m}$$

$$(\cos m\pi - \cos(-m\pi)) = -\frac{2\pi}{2m}\cos m\pi + \frac{1}{\pi m^2}(\sin m\pi + \sin m\pi) = -\frac{2\pi}{\pi m}(-1)^m = \frac{-2(-1)^m}{\pi m} = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}$$

Таким образом, разложение функции в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+1}}{m} * \cos mx.$$