## №430

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$$

Исследовать на сходимость

Решение:

$$u_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}; \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!}$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!*n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)^2}{n^n n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)*\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} =$$

$$= e*1 = e.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \text{ ряд расходится.}$$

## №440

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{n(n+1)}$$

Найти интервал сходимости

Решение:

$$a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}; \quad a_{n+1} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$$

Найдём радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+4}{n^2+3n} = 1$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{n(n+1)}$ сходится при $-1 < x < 1$.

## №450

$f(x)=\sqrt{1+x^2}, \quad b=0{,}5$

Найти: $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx$

*Решение*:

Разложим $(1+x^2)^{1/2}$ в ряд

$$(1+x^2)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1*2}x^4+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\right)}{1*2*3}x^6+\ldots=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6-\ldots$$

$$\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^{0,5}\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6\right)dx=\left(x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\frac{x^7}{112}\right)\Bigg|_0^{0,5}=0{,}5+0{,}0208-0{,}0008=0{,}5200.$$

## №460

$y' = x + x^2 + y^2; \qquad y(0) = 5$

Найти три первых числа.

Решение:

Из условия $y(0) = 5$ имеем:

$y'(0) = 0 + 0 + 25 = 25$

Дифференцируем уравнение

$y'' = 1 + 2x + 2yy'$

$y''(0) = 1 + 0 + 2 * 5 * 25 = 251$

Искомое решение:

$$y = 5 + \frac{25x}{1!} + \frac{251x^2}{2!} + ... = 5 + 25x + 125{,}5x^2 + ....$$

## №470

Разложить функцию f(x) в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$

$$f(x)=\begin{cases}2, & \pi<x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

*Решение*:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_m\cos mx+bm\sin mx)$$

Найдём $a_0$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1dx=\frac{1}{\pi}2x\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}*1*x\Big|_{0}^{\pi}=0+2+1=0$$

Найдём $a_m$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\cos mxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cos mxdx=\frac{2}{\pi m}\sin mx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi m}\sin mx\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{2}{\pi m}\sin(-\pi m)+\frac{1}{\pi m}\sin(\pi m)=0+0=0$$

Найдём $b_m$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\sin mxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\sin mxdx=-\frac{2}{\pi m}\cos mx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi m}\cos mx\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{2}{\pi m}+\frac{2}{\pi m}\cos(-\pi m)+\frac{1}{\pi m}\cos(\pi m)-\frac{1}{\pi m}=-\frac{3}{\pi m}+\frac{3}{\pi m}\cos\pi m=-\frac{3}{\pi m}+\frac{3}{\pi m}(-1)^m$$

$m=1 \qquad b_1=-\frac{3}{b\pi}+\frac{3}{\pi}=-\frac{b}{\pi}$

$m=2 \qquad b_2=\frac{-1}{2\pi}+\frac{3}{2\pi}=0$

$m=3 \qquad b_3=\frac{-3}{3\pi}-\frac{3}{3\pi}=-\frac{3}{\pi}$

$m=4 \qquad b_4=\frac{-3}{4\pi}+\frac{3}{4\pi}=0$

Таким образом:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}bm\sin mx=\frac{3}{2}+\left(\frac{-6}{\pi}\right)\sin x+\left(-\frac{2}{\pi}\right)\sin 2x+...$$