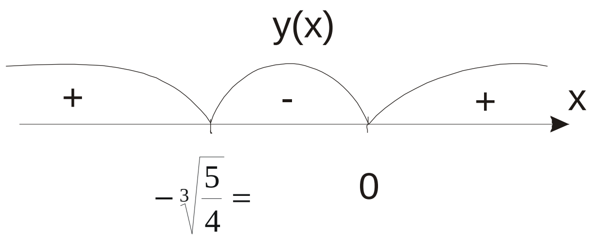
Задачи 196, 206, 216, 226 из сборника заданий Арутюнова Ю. С.
http://kvadromir.com/arutunov.html

№196

1. Область определения функции $y(x)$: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
2. $y=0 \sim 4x^3+5=0$. Корни: $x=-\sqrt[3]{\frac{5}{4}}=-\frac{\sqrt[3]{10}}{2}\approx -1{,}0772$.

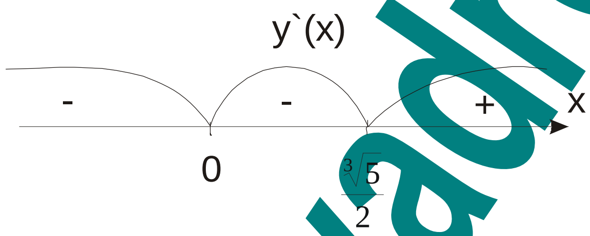


$y(x)>0$ для $x\in\left(-\infty;-\sqrt[3]{5/4}\right)\cup(0;+\infty)$;
$y(x)<0$ для $x\in\left(-\sqrt[3]{5/4};0\right)$.

3. Не четная, не нечетная, не периодическая
4. Функция $y(x)$ непрерывна для $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

   $\lim\limits_{x\to -0}=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to +0}=+\infty;\quad x=0$ -точка разрыва второго рода
5. Наклонных асимптот нет
6. $y'=\left(4x^2+\frac{5}{x}\right)'=8x-\frac{5}{x^2}=\frac{8x^3-5}{x^2}$

   $y'=0 \sim 8x^3=5 \sim x=\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\approx 0{,}855$



$y(x)$ возрастает при $x\in\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{2};+\infty\right)$

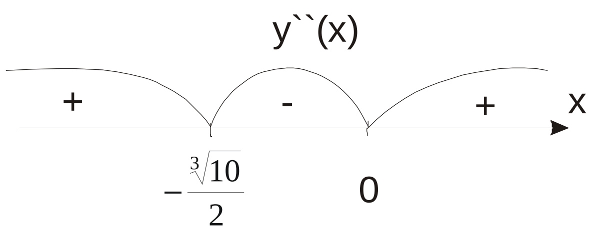
$y(x)$ убывает при $x\in(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

$x=\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$ - точка минимума,

$y\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)=3\sqrt[3]{25}\approx 8{,}772$

7. $y''=\left(8x-\frac{5}{x^2}\right)'=8+\frac{10}{x^3}=\frac{8x^3+10}{x^3}$

   $y''=0 \quad \sim \quad 8x^3+10=0 \quad \sim \quad x=-\frac{\sqrt[3]{10}}{2}$



$y(x)$ выпукла вниз при $x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt[3]{10}}{2}\right)\cup(0;+\infty)$

$y(x)$ выпукла вверх при $x\in\left(-\frac{\sqrt[3]{10}}{2};+\infty\right)$

$x=-\frac{\sqrt[3]{10}}{2}$ - точка перегиба, $y\left(-\frac{\sqrt[3]{10}}{2}\right)=0$

8. Построим график функции $y(x)$

http://kvadromir.com/arutunov.html

http://kvadromir.com/arutunov.html

№206

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

$$y = e^{\frac{1}{2-x}}$$

Решение:

1. Область определения $D(y) = (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$

2. Т.к. $y(-x) = e^{\frac{1}{2+x}}$ и $y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$, функция не является ни чётной, ни не чётной

3. Точки пересечения с оосями координат с ОУ: $x = 0$ $y(0) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} = 1{,}65$ $A(0;1{,}65)$

С осью ОХ: $y = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2-x}} = 0$ У этого уравнения нет решений, значения с осью ОХ график функции не пересекается.

4. Асимптоты:

$$\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{2-x}} = \infty, \quad \lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{2-x}} = 0$$

$x = 2$ - вертикальная асимптота при $x \to 2-0$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{x} = \left(\frac{1}{\pm\infty}\right) = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - k*x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(e^{\frac{1}{2-x}} - 0*x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{2-x}} = 1.$$

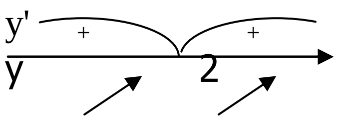
Значит $y = kx + b = 0*x + 1 = 1$ – горизонтальная асимптота.

5. ТОчки экстремума и интервалы возрастания (убывания)

$$y' = e^{\frac{1}{2-x}} * \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{2-x}} = 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{2-x}} = 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Уравнение $e^{\frac{1}{2-x}} = 0$ не имеет решений



http://kvadromir.com/arutunov.html

Функция $y = e^{\frac{1}{2-x}}$ возрастает всюду в области определения; точек экстремума нет.

$$6.\ y'' = \left(\frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2}\right)' = \frac{e^{\frac{1}{2-x}} * \frac{1}{(2-x)^2} * (2-x)^2 - e^{\frac{1}{2-x}} * 2(2-x)(-1)}{(2-x)^4} = \frac{e^{\frac{1}{2-x}}(1+4-2x)}{(2-x)^4} = e^{\frac{1}{2-x}} * \frac{(5-2x)}{(2-x)^4}$$

$$y''=0 \Rightarrow \begin{cases} (5-2x) * e^{\frac{1}{2-x}} = 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 5 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Т.к. $e^{\frac{1}{2-x}} \neq 0 \forall x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2{,}5 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

y'' + 2 + 2,5 -

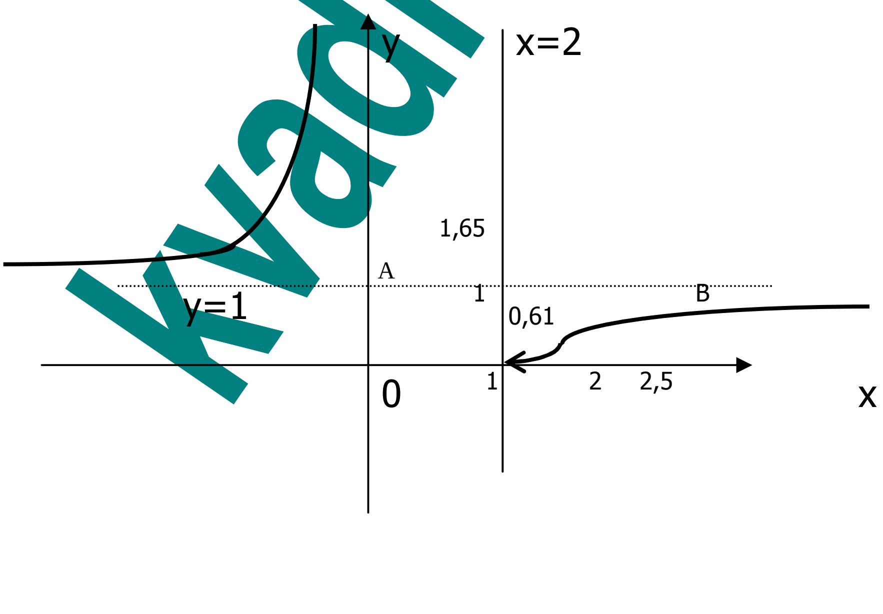
y ∪ 2 ∪ 2,5 ∩

Функция воогнута на интервалах $(-\infty;2) \cup (2;2{,}5)$, функция вогнутана интервале $(2{,}5;+\infty)$

$x = 2{,}5$ - тоочка перегиба $y(2{,}5) = e^{\frac{1}{2-2{,}5}} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}61$

$B(2{,}5;0{,}61)$

7.*График*:



http://kvadromir.com/arutunov.html

№216

Найти уравнения касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии r = r(t) в точке t_0

$r(t) = 2ti - 3tj + \ln tgtk;\quad t_0 = \pi/4$

$x'(t) = 2;\quad y'(t) = -3;\quad z'(t) = \frac{1}{tgt} * \frac{1}{\cos^2 t} = ctgt * \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{1}{\sin t \cos t} = \frac{2}{\sin 2t}$

При $t_0 = \frac{\pi}{4};\quad x(t_0) = 2t\Big/_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$

$y(t_0) = \frac{-3t}{t = \frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}\pi$

$z(t_0) = \ln tg\frac{\pi}{4} = \ln 1$

$x'(t_0) = 2$

$y'(t_0) = -3$

$z'(t_0) = \frac{1}{tg\frac{\pi}{4}} * \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$

Уравнение касательной имеет вид:

$$\frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{y - \frac{3}{2}\pi}{3} = \frac{z - \ln 1}{2}$$

Уранение нормальной плоскости следующее:

$$2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3\left(y + \frac{3}{2}\pi\right) + 2(z - \ln 1) = 0$$

Найдём кривизну кривой k

$$k = \frac{\left|\left[\frac{d\bar{r}}{dt} * \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^3}$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \frac{1}{tgt} * \frac{1}{\cos^2 t}\bar{k} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \frac{2}{\sin^2 t}\bar{k}$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 0i + 0j - \frac{2}{\sin^2 2t}(\sin 2t)'k$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{4\cos 2t}{\sin^2 t}\bar{k}$$

$$\left.\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4\cos 2\frac{\pi}{4}\bar{k}}{\sin^2 2\frac{\pi}{4}} = -\frac{4\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = -\frac{4*0*k}{1^2} = 0$$

$$\frac{dr}{dt}*\frac{d^2r}{dt^2}=(2i-3j+2k)(0i+0j+0k)=0$$

Найдём:

$$\left[\frac{d\bar{r}}{dt}*\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=1j$$

$k=0.$

№226

$x^3+x-1=0$

В промежутке $[0,1]$ лежит корень этого уравнения, т.к.:

$f(0)=-1<0$

$f(1)=1+1-1>0$

Имеем $f(x)=x^3+\text{x}-1,\ f'(x)=3x^2+1;\ \ f''(x)=6x$

В указанном промежутке $\text{f}''(\text{x})>0$, поэтому за первое приблежение в способе касательных берем $\text{x}_0=1$, т.к. $f(1)>0$.

$$x_{11}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75$$

$$x_{12}=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}=0-\frac{(1-0)(-1)}{1-(-1)}=\frac{1}{2}=0,5$$

Искомый корень принадлежит промежутку $(0,5;0,75)$. Имеем $f(0,5)=-0,375$, $f(0,75)=0,17,\quad f'(0,75)=2,69.$

$$x_{21}=0,75-\frac{0,17}{2,69}=0,68$$

$$x_{21}=0,5-\frac{(0,75-0,5)(-0,375)}{0,17+0,375}=0,5+\frac{0,09}{0,55}=0,66$$

Искомый корень принадлежит промежутку $(0,66;0,68)$.

$f(0,66)=-0,05;\quad f(0,68)=-0,01.$

$f'(0,68)=2,39.$

$$x_{31}=0,68-\frac{-0,01}{2,39}=0,67$$

$$x_{32}=0,66-\frac{(0,68-0,66)(-0,01)}{-0,01+0,05}=0,66+\frac{0,0002}{0,04}=0,67$$

Искомый корень равен $\overline{\text{x}}=0,67.$