150

Найти производную $\frac{dy}{dx}$ данной функции.

Д) $x - y + e^y arctgx = 0$.

Решение.

Давайте продифференцируем данное выражение по переменной *x*. Получим

$$\left(x - y + e^y arctgx\right)' = x' - y' + \left(e^y arctgx\right)' = 0.$$

Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$(UV)' = U'V + UV'$$

Учтём, что $x' = 1$, а $y' = \frac{dy}{dx}$. В результате этого получим

$$1 - y' + \left(e^y\right)' arctgx + e^y \left(arctgx\right)' = 0. \qquad (1)$$

Воспользуемся известными производными (смотрите таблицу производных)

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \ \left(e^x\right)' = e^x.$$

Но $e^y = e^{y(x)}$ есть сложная функция. По теореме о производной сложной

$$\left[f\left(y(x)\right)\right]' = f'_y(y) \cdot y'(x).$$

Учитывая это, получим

$$\left(e^y\right)' = e^y y'.$$

Подставляя найденные выражения для производных в формулу (1), получим

$$1 - y' + e^y y' arctgx + e^y \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Вынесем y' во втором и третьем слагаемом левой части последнего равенства за скобки и перепишем его в виде

$$y'\left(e^y arctgx - 1\right) + 1 + \frac{e^y}{1+x^2} = 0.$$

Два других слагаемых перенесём в правую часть равенства. В результате получим

$$y'\left(e^y arctgx - 1\right) = -\left(1 + \frac{e^y}{1+x^2}\right).$$

Разделим обе части равенства на $e^y arctgx - 1$. Получим

kvadromir.com

$$\frac{y'\left(e^y arctgx-1\right)}{e^y arctgx-1}=\frac{-\left(1+\frac{e^y}{1+x^2}\right)}{e^y arctgx-1}.$$

После сокращения первой дроби на $e^y arctgx-1$, получим

$$y'=\frac{-\left(1+\frac{e^y}{1+x^2}\right)}{e^y arctgx-1}.$$

Числитель дроби, стоящей в правой части приведём к общему знаменателю. В результате получим

$$y'=\frac{-\frac{1+x^2+e^y}{1+x^2}}{e^y arctgx-1},$$

или учитывая свойство дробей

$$y'=-\frac{1+x^2+e^y}{\left(e^y arctgx-1\right)\left(1+x^2\right)}.$$

Но $e^y arctgx-1=-\left(1-e^y arctgx\right)$, следовательно, выражение можем переписать в виде

$$y'=-\frac{1+x^2+e^y}{-\left(1-e^y arctgx\right)\left(1+x^2\right)}=\frac{1+x^2+e^y}{\left(1-e^y arctgx\right)\left(1+x^2\right)}.$$

Итак, окончательно получаем

$$y'=\frac{1+x^2+e^y}{\left(1-e^y arctgx\right)\left(1+x^2\right)}.$$

Ответ: $\frac{dy}{dx}=\frac{1+x^2+e^y}{\left(1-e^y arctgx\right)\left(1+x^2\right)}.$

Kvadromir.com